

# 18

## Многофотонное рассеяние резонансными атомами как задача теории интегрируемых квантовых систем

© В.И. Рупасов, В.И. Юдсон<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> Международная лаборатория физики конденсированного состояния, НИУ Высшая школа экономики, Москва, Россия

<sup>2</sup> Институт спектроскопии РАН, Троицк, Москва, Россия

<sup>3</sup> Российский квантовый центр, Сколково, Москва, Россия

e-mail: rupasov.valery@gmail.com; vyudson@hse.ru

Поступила в редакцию 02.07.2024 г.

В окончательной редакции 29.07.2024 г.

Принята к публикации 29.07.2024 г.

Рассмотрена задача о рассеянии многофотонного состояния электромагнитного поля произвольной статистики на резонансном атоме. С использованием набора точных собственных состояний интегрируемой модели „квантовое поле + двухуровневый атом“ получено выражение для многочастичной волновой функции рассеянных фотонов. Общий формализм проиллюстрирован на частном примере, когда налетающее поле находится в стационарном когерентном состоянии — при этом известные для этого случая результаты (спектр и корреляционная функция второго порядка) выведены без привлечения линдбладовского подхода и теоремы регрессии. Развитый формализм применим к произвольному, в том числе неклассическому (некогерентному), состоянию налетающих фотонов.

**Ключевые слова:** интегрируемые системы, квантовая оптика, резонансная флуоресценция.

DOI: 10.61011/OS.2024.08.59029.6848-24

### 1. Введение

Нелинейная оптика резонансных сред давно стала одним из основных объектов приложения теории классических интегрируемых систем [1,2]. Однако, в таких явлениях, как спонтанное излучение и резонансная флуоресценция, квантовый характер поля имеет принципиальное значение, и их последовательное описание, строго говоря, возможно только в рамках квантовой теории поля. Формально оба упомянутых явления можно описывать как квантовую задачу Коши с различными начальными условиями: „падающие фотоны + атомы в основном состоянии“ (резонансная флуоресценция) или „вакуум поля + атомы в возбужденном состоянии“ (спонтанное излучение). Впервые задача о рассеянии падающего квантового поля излучения была сформулирована и решена (для слабого поля — в однофотонном приближении) Вайскопфом [3] (см. также [4]). Распространение теории Вайскопфа на случай сильного поля было осуществлено с помощью разнообразных подходов и приближений в многочисленных работах, сформировавших современную теорию резонансной флуоресценции [5–9].

Тем не менее, несомненный интерес представляет описание резонансной флуоресценции как динамической задачи в рамках теории интегрируемых квантовых систем, т.е. прямое построение точного решения квантовой задачи Коши для многочастичного уравнения Шредингера системы „фотоны + атомы“. Подобная

программа была осуществлена ранее [10] для описания спонтанного распада возбужденных компактно расположенных атомов (геометрия Дике [11]) в фотонный вакуум. Используя аналогичный подход для задачи о многофотонном рассеянии, мы получим точное выражение для многочастичного состояния рассеянных фотонов в случае произвольного квантового состояния налетающего поля (принципы подхода были сформулированы в ранней работе [12], не доведенной до регулярной журнальной публикации). Полученное выражение для out-состояния содержит полную информацию о квантовой статистике и корреляционных функциях рассеянного поля. В частном случае, когда налетающее поле находится в стационарном когерентном состоянии, спектр рассеянных фотонов соответствует известному триплету Моллоу [7]. В описываемом ниже подходе этот результат получается регулярным квантово-механическим вычислением без привлечения изощренных подходов с уравнением Линдблада, теоремой регрессии и т.п. [13].

В разд. 2 содержится описание модели и формальная постановка задачи рассеяния. В разд. 3 с использованием полного набора собственных состояний гамильтониана системы получено out-состояние многофотонной задачи рассеяния. Развитый общий формализм проиллюстрирован в разд. 4 и 5 на частном примере, когда налетающее поле находится в стационарном когерентном состоянии; вычисляются корреляционные функции рассеянного поля.

## 2. Описание модели и постановка задачи рассеяния

Гамильтониан системы „квантовое поле + двухуровневый атом“ в рамках дипольного резонансного приближения может быть записан в виде:  $H_0 + H_{int}$ , где

$$H_0 = \sum_{j,m} \int \frac{d\omega}{2\pi} (\omega - \omega_{12}) c_{jm}^\dagger(\omega) c_{jm}(\omega) + \omega_{12} \left( s^3 + \frac{1}{2} \right), \quad (1)$$

$$H_{int} = \sqrt{\gamma} \int \frac{d\omega}{2\pi} [c^\dagger(\omega) s^- + c(\omega) s^+] \quad (2).$$

Здесь  $\gamma = 4\omega_{12}^3 d^2/3$ ,  $\omega_{12}$  и  $d$  — скорость радиационной релаксации, частота и дипольный момент атомного перехода (скорость света и постоянная Планка положены равными единице). Спинные операторы  $\mathbf{s} = (s^1, s^2, s^3)$  с коммутационными соотношениями  $[s^j, s^k] = i e_{jkl} s^l$  описывают двухуровневый атом ( $s = 1/2$ );  $s^\pm = s^1 \pm i s^2$ . Операторы электромагнитного поля разложены в ряд по сферическим гармоникам [4]:

$$a_{\mathbf{k}} = \sum_{j,m} \int \frac{d\omega}{2\pi} \Phi_{jm\omega}(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|) c_{jm}(\omega). \quad (3)$$

Дипольное приближение позволяет ограничиться в (2) учетом взаимодействия атома только с электродипольными фотонами (с угловым моментом  $j = 1$ ). При этом  $c(\omega) \equiv c_{j=1,m=0}(\omega)$ , где проекция момента  $m = 0$  фиксируется поляризацией падающего поля (здесь для определенности выбрана линейная поляризация).

Введем обозначение для операторов поля (формальную фурье-переменную  $x$  можно условно рассматривать как „радиальную координату“: налетающие фотоны имеют  $x < 0$ , улетающие  $x > 0$ ):

$$\varepsilon(x) = \int \frac{d\omega}{2\pi} c(\omega) e^{i(\omega - \omega_{12})x}, \quad (4)$$

отвечающим коммутационным соотношениям  $[\varepsilon(x), \varepsilon^\dagger(x')] = \delta(x - x')$ , и перепишем гамильтониан системы „атом + электродипольные фотоны“ в виде

$$H = \int dx \{ -i \varepsilon^\dagger(x) \partial_x \varepsilon(x) + \sqrt{\gamma} \delta(x) [\varepsilon^\dagger(x) s^- + \varepsilon(x) s^+] \} + \omega_{12} \left( s^3 + \frac{1}{2} \right). \quad (5)$$

Таким образом, задача о резонансном взаимодействии атома с квантовым электромагнитным полем описывается эффективно одномерной моделью. Эта модель изучалась нами ранее [10] в связи с проблемой спонтанного сверхизлучения Дике. Методом подстановки Бете был построен полный набор собственных состояний гамильтониана (5), что составляет основу для описания временной эволюции произвольного начального состояния системы. В отличие от рассмотренной в [10] задачи распада начального атомного возбуждения, в задаче о

резонансной флуоресценции начальное состояние системы ( $t \rightarrow -\infty$ ) содержит налетающие на атом фотоны. Физические характеристики рассеянного поля определяются конечным состоянием системы ( $t \rightarrow +\infty$ ), которое находится в результате решения уравнения Шредингера:

$$i \partial_t |\Psi(t)\rangle = H |\Psi(t)\rangle,$$

$$|\Psi(t \rightarrow -\infty)\rangle = e^{-iH_0 t} |In\rangle, \quad (6)$$

$$|\Psi(t \rightarrow +\infty)\rangle = e^{-iH_0 t} |Out\rangle. \quad (7)$$

Рассмотрим конфигурацию, где на атом, находящийся в начале координат, падает пучок фотонов с характерным волновым вектором  $\mathbf{k}$ , направленным вдоль оси  $z$ . Считаем, что пучок имеет поперечное сечение  $S$  и протяженность  $L$  вдоль оси  $z$ . Фоковское состояние падающего поля, содержащее  $N$  свободных фотонов, дается выражением

$$|In, N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} [a_{\mathbf{k}}^\dagger]^N |0\rangle, \quad (8)$$

где  $|0\rangle$  - вакуумное состояние поля. Произвольное состояние пучка идентичных независимых фотонов имеет в фоковском базисе вид:

$$|In\rangle = \sum_N A_N |In, N\rangle. \quad (9)$$

Особый интерес представляет случай, когда падающее поле находится в когерентном состоянии

$$|In, \alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} + \alpha a_{\mathbf{k}}^\dagger\right) |0\rangle, \quad (10)$$

что соответствует пуассоновской статистике коэффициентов в выражении (9):  $|A_N|^2 = \exp(-\bar{N}) \bar{N}^N / N!$ , где  $\bar{N} = |\alpha|^2$  - среднее число фотонов. Как будет видно в дальнейшем, когерентные состояния являются удобным базисом для исследования рассеяния поля с произвольной статистикой.

Свойства рассеянного света определяются усреднением полевых операторов по out-состоянию. Случаю стационарной флуоресценции во внешнем поле отвечает предельный переход

$$\bar{N} \rightarrow \infty; L \rightarrow \infty; \frac{\bar{N}}{L} \rightarrow \text{Const.} \quad (11)$$

Нашей ближайшей задачей является нахождение out-состояния рассеянного поля.

## 3. Многочастичная задача рассеяния

1. В разложении (3) для  $a_{\mathbf{k}}$  выделим оператор электродипольных фотонов:

$$a_{\mathbf{k}} = \tilde{a}_{\mathbf{k}} + \sqrt{\frac{\sigma_1}{SL}} c(\omega), \quad (12)$$

где  $\tilde{a}_k$  включает фотонные операторы с угловыми моментами  $j > 1$ , не взаимодействующие с атомом;  $\sigma_1$  — „прицельная площадь“ фотонов с  $j = 1$  [14]. С учетом (12), фоковское состояние (8) приобретает вид:

$$|In, N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{n=0}^N C_N^n \left(\frac{\sigma_1}{SL}\right)^{n/2} (\tilde{a}_k^\dagger)^{N-n} [c^\dagger(\omega)]^n |0\rangle. \quad (13)$$

Таким образом, исходная задача рассеяния сводится к задаче рассеяния состояния  $|in, n\rangle$ , содержащего только „дипольные“ фотоны

$$\begin{aligned} |in, n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} [c^\dagger(\omega)]^n |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int d^n x \prod_{j=1}^n e^{i(\omega - \omega_{12})x_j} \varepsilon^\dagger(x_j) |0\rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

временная эволюция которого определяется гамильтонианом (5).

2. Возможность точного решения задачи (5), (14) обусловлена полной интегрируемостью модели (5). Полный набор собственных состояний гамильтониана (5) имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle \equiv |\lambda_1, \dots, \lambda_n\rangle &= \int d^n y \mathcal{F}_B(\lambda, \mathbf{y}) \prod_{j=1}^n e^{i\lambda_j y_j} \\ &\times \left[ \varepsilon^\dagger(y_j) + \frac{\sqrt{\gamma}}{\lambda_j} s^+ \delta(y_j) \right] |vac\rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где состояние  $|vac\rangle$  соответствует невозбужденному атому и отсутствию фотонов, а фактор Бете

$$\mathcal{F}_B(\lambda, \mathbf{y}) = \prod_{j<l, l}^n \left[ 1 + \frac{i\gamma}{\lambda_j - \lambda_l} \text{sign}(y_j - y_l) \right] \quad (16)$$

учитывает многочастичные корреляции. Допустимые значения комплексных величин  $\{\lambda_j\}$  определяются условием ограниченности волновой функции (15) [10]. Собственная энергия состояния (15) равна  $E(\lambda) = \sum_j \lambda_j$ .

Эволюция произвольного начального состояния  $|\Psi_{in}\rangle$  определяется с помощью точного интегрального представления [15]:

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-iHt} |\Psi_{in}\rangle = \int_{\Gamma} d^n \lambda e^{-it \sum_{j=1}^n \lambda_j} |\lambda\rangle \langle \lambda | \Psi_{in}\rangle \\ &\rightarrow e^{-iH_{ot}} |\Psi_{out}\rangle \end{aligned} \quad (17)$$

где интегрирование идет по специальному контуру  $\Gamma$  в  $n$ -мерном комплексном пространстве переменных  $\{\lambda\}$ , а вспомогательное состояние  $|\lambda\rangle$  отличается от (15) отсутствием фактора Бете. Опуская подробно описанные в [Y–85] детали, выпишем точные выражения для искомого out-состояния:

$$|\Psi_{out}\rangle = \int d^n x \Phi_{out}(\mathbf{x}) \prod_{j=1}^n \varepsilon^\dagger(x_j) |0\rangle, \quad (18)$$

$$\Phi_{out}(\mathbf{x}) = \int d^n y \mathcal{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_{in}(\mathbf{y}), \quad (19)$$

где  $\mathcal{S}$  — матрица, связывающая волновые функции улетающих и налетающих фотонов имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int \frac{d^n \lambda}{(2\pi)^n} \prod_{j<l}^n \frac{\lambda_j - \lambda_l - i\gamma \text{sign}(x_j - x_l)}{\lambda_j - \lambda_l + i\gamma} \\ &\times \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j - i\gamma/2}{\lambda_j + i\gamma/2} e^{i\lambda_j(x_j - y_j)} = \sum \theta(x_1 > \dots > x_n) \\ &\times \prod_{j=1}^n \left[ \delta(x_j - y_j) - \theta(y_j - x_j) e^{\gamma(x_j - y_j)/2} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Суммирование в (20) ведется по перестановкам координат  $x_j$ .

Выражение (20) для  $\mathcal{S}$ -матрицы отвечает случаю резонансной флуоресценции одного атома. В случае рассеяния фотонов на ансамбле  $M$  близко расположенных атомов в выражении (20) следует произвести замену

$$\frac{\lambda_j - i\gamma/2}{\lambda_j + i\gamma/2} \rightarrow \frac{\lambda_j - iM\gamma/2}{\lambda_j + iM\gamma/2}. \quad (21)$$

Это существенно усложняет математическую структуру теории — в конечном состоянии рассеянного поля появятся сгруппированные („струнные“) состояния фотонов. В этой работе мы ограничимся рассмотрением сравнительно простого случая резонансной флуоресценции одного атома.

3. Выражение (20) представляет собой сумму  $2^n$  слагаемых (без учета перестановок), описывающих все возможные процессы рассеяния  $n$  фотонов, причем множители типа  $\delta(x - y)$  отвечают нерассеявшимся (свободно пролетевшим) фотонам. Операторы нерассеявшихся дипольных фотонов, складываясь с операторами  $\tilde{a}_k^\dagger$  фотонов с  $j > 1$  (3), восстанавливают в out-состоянии оператор  $a_k^\dagger$ . В итоге конечное состояние поля  $|Out, N\rangle$  дается выражением

$$|Out, N\rangle = \sum_{n=0}^N \sqrt{C_N^n} \left(\frac{\sigma_1}{SL}\right)^{n/2} |scat, n\rangle \otimes |In, N - n\rangle. \quad (22)$$

Здесь состояние  $|In, N - n\rangle$  (8) соответствует  $N - n$  фотонам в прошедшем (нерассеявшемся) пучке, а  $|scat, n\rangle$  описывает состояние  $n$  рассеянных фотонов:

$$|scat, n\rangle = \int d^n x \Phi_{scat}(\mathbf{x}) \prod_{j=1}^n \varepsilon^\dagger(x_j) |0\rangle, \quad (23)$$

$$\Phi_{scat}(\mathbf{x}) = \int d^n y T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_{in}(\mathbf{y}), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (-\gamma)^n L^{-n/2} \sqrt{n!} \theta(x_1 > \dots > x_n) \\ &\times \prod_{j=1}^n \theta(y_j - x_j) e^{\gamma(x_j - y_j)/2}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $T$ -матрица (25) является компонентой суммы (20), не содержащей нерассеянных дипольных фотонов. Подчеркнем, что выражения (22)–(25) правильно учитывают все возможные каналы рассеяния. При этом отметим некоторую условность в применении символа  $\otimes$  в (22). Дело в том, что гильбертово пространство формирующих состояние  $|scat, n\rangle$  операторов  $\varepsilon^\dagger(x)$  является подпространством гильбертова пространства операторов  $a_k^\dagger$ , порождающих состояние  $|In, N - n\rangle$ . Поэтому при вычислении средних по состоянию (22) необходимо учитывать вытекающее из (4) и (3) отличие от нуля коммутатора

$$[\varepsilon(x), a_k^\dagger] = \left(\frac{\sigma_1}{SL}\right)^{1/2} e^{i(\omega - \omega_{12})x}. \quad (26)$$

4. Для начального состояния (14) волновая функция (24) рассеянных фотонов имеет вид:

$$\Phi_{scat}(\mathbf{x}) = (-1)^n \frac{2^n n!}{L^{n/2}} \theta(x_1 > \dots > x_n) \prod_{j=1}^n \psi(x_{j-1}, x_j), \quad (27)$$

$$\psi(x_{j-1}, x_j) = \frac{\gamma}{2} \int_{x_j}^{x_{j-1}} dy e^{i(\Delta + i\gamma/2)(y - x_j)} \times \theta(-L/2 < y < L/2), \quad (28)$$

(здесь  $x_{j=0} \equiv L/2$ ). В дальнейшем для простоты мы ограничимся случаем точного резонанса, когда отстройка частоты падающего излучения  $\Delta = \omega - \omega_{12} = 0$ . При этом

$$\psi(x_{j-1}, x_j) = \theta(x_{j-1} - x_j) \left[ 1 - e^{-\gamma(x_{j-1} - x_j)/2} \right]; \quad j = 1, \dots, n; \quad x_n > -L/2, \quad (29)$$

$$\psi(x_{n-1}, x_n) = \theta(x_{n-1} - x_n) \left[ e^{\gamma(x_n + L/2)/2} - e^{-\gamma(x_{n-1} - x_n)/2} \right]; \quad x_n < -L/2. \quad (30)$$

Формула (30) отражает тот факт, что последний фотон рассеянного поля может быть испущен и после окончания действия возбуждающего светового импульса.

Совокупность полученных выражений (22)–(30) является основным результатом работы, позволяющим полностью описать out-состояние рассеянного поля для произвольного состояния поля налетающих фотонов. В следующем разделе мы продемонстрируем работу развитого формализма на примере простейшей, но физически интересной ситуации, когда налетающее поле находится в когерентном состоянии. Корреляционные функции рассеянного поля будут получены прямым вычислением средних от соответствующих операторов по out-состоянию (без отсылки к формализму Линдблада, теореме регрессии и т.п.).

#### 4. Рассеяние поля в когерентном состоянии

1. С учетом выражений (22) находим out-состояние для случая, когда падающее поле находится в когерентном состоянии (10):

$$|Out, \alpha\rangle = \sum_{n=0}^N \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left(\frac{\sigma_1}{SL}\right)^{n/2} |scat, n\rangle \otimes |In, \alpha\rangle. \quad (31)$$

Выражение (31) описывает как рассеянное, так и нерассеянное поля, включая корреляции между ними. Если интересоваться характеристиками только рассеянного поля, то используя (31), можно разработать эффективное описание в терминах исключительно рассеянного поля. Для этого заметим, что при усреднении по (31) произвольного функционала  $O(\varepsilon^\dagger, \varepsilon)$  от операторов рассеянного поля естественно возникают выражения вида:

$$e^{-\bar{N}} \langle 0 | e^{\sqrt{\bar{N}} a_k} \prod_{j=1}^n \varepsilon(x'_j) O(\varepsilon^\dagger, \varepsilon) \prod_{l=1}^n \varepsilon^\dagger(x_l) e^{\sqrt{\bar{N}} a_k^\dagger} | 0 \rangle \quad (32)$$

(величина  $\alpha$  выбрана для определенности вещественной,  $\alpha = \sqrt{\bar{N}}$ ). Переставляя экспоненты от операторов и используя соотношение (26), представим (32) в виде

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^n [\varepsilon(x'_j) + \sqrt{\rho} \theta(-L/2 < x'_j < L/2)] O(\varepsilon^\dagger, \varepsilon) \times \prod_{l=1}^n [\varepsilon^\dagger(x_l) + \sqrt{\rho} \theta(-L/2 < x_l < L/2)] | 0 \rangle, \quad (33)$$

где  $\rho = \sigma_1 \bar{N} / (SL)$  – плотность потока дипольных фотонов в падающем пучке. При переходе от (32) к (33) предполагалось в духе обычной физической постановки задачи рассеяния (конечная апертура пучка), что измерение наблюдаемой  $O$  производится в точках пространства, где отсутствует поле прошедшей волны. Как следствие, входящие в  $O(\varepsilon^\dagger, \varepsilon)$  операторы коммутируют с операторами  $a_k^\dagger$  и  $a_k$  и, следовательно, не подвергаются сдвигке. Таким образом, среднее от оператора  $O(\varepsilon^\dagger, \varepsilon)$  представляется в виде

$$\langle Out, \alpha | O(\varepsilon^\dagger, \varepsilon) | Out, \alpha \rangle = \langle \widetilde{Out}, \alpha | O(\varepsilon^\dagger, \varepsilon) | \widetilde{Out}, \alpha \rangle, \quad (34)$$

где эффективное out-состояние  $|\widetilde{Out}, \alpha\rangle$  имеет вид:

$$|\widetilde{Out}, \alpha\rangle = |0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4\rho)^{n/2} \int d^n x \times \prod_{j=1}^n \psi(x_{j-1}, x_j) [\varepsilon^\dagger(x_j) + \sqrt{\rho} \theta(-L/2 < x_j < L/2)] | 0 \rangle. \quad (35)$$

Вывод выражения (35) непосредственно обобщается на случай произвольной формы огибающей  $E(x)$  падающего импульса, что приводит в (35) к замене  $\sqrt{\rho}\theta(-L/2 < x_j < L/2) \rightarrow E(x)$ . Множитель  $E(x)$  появится и в подынтегральном выражении в (28). Тем самым развиваемый формализм распространяется и на случай нестационарного возбуждения флуоресценции.

2. Раскрывая произведение квадратных скобок в выражении (35), представим (35) в виде суммы слагаемых с различным числом фотонов:

$$\begin{aligned} |\widetilde{Out}, \alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4\rho)^{n/2} \int d^n x v(x_n) \\ &\times \prod_{j=1}^n u(x_{j-1}, x_j) \varepsilon^\dagger(x_j) |0\rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь введены функции  $u(x, y)$  и  $v(x)$ , удовлетворяющие уравнениям

$$u(x, y) = \psi(x, y) - 2\rho \int_{-L/2}^{L/2} \psi(x, z) u(z, y) dz, \quad (37)$$

$$v(x) = 1 - 2 \int_{-L/2}^{L/2} u(x, y) dy. \quad (38)$$

В случае флуоресценции в поле с постоянной амплитудой функции  $\psi(x, y)$  и  $u(x, y)$  зависят только от разности координат и выражение (36) приобретает простой вид:

$$\begin{aligned} |\widetilde{Out}, \alpha\rangle &= v(L) |0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4\rho)^{n/2} \\ &\times \int d^n x u(L/2 - x_1) u(x_1 - x_2) \dots u(x_{n-2} - x_{n-1}) \\ &\times \left[ u(x_{n-1} - x_n) v(x_n + L/2) + u(x_{n-1} + L/2) \right. \\ &\left. \times \theta(-L/2 - x_n) e^{\gamma(x_n + L/2)/2} \right] \prod_{j=1}^n \varepsilon^\dagger(x_j) |0\rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

Функции  $u(x)$  и  $v(x)$  отличны от нуля только при  $x > 0$ . Их фурье-компоненты, определяемые из (37) и (38), даются выражениями

$$u(\omega) = -\frac{\gamma/2}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)}, \quad (40)$$

$$v(\omega) = \frac{i(\omega + i\gamma/2)}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)}, \quad (41)$$

где

$$\omega_{\pm} = -i\gamma/4 \pm \sqrt{\gamma\rho - (\gamma/4)^2}. \quad (42)$$

Совокупность полученных результатов (34)–(42) содержит всю информацию о рассеянном излучении и позволяет вычислять его физические характеристики.

## 5. Вычисление физических величин

Проиллюстрируем применение полученных выражений для вычисления некоторых корреляционных функций рассеянного излучения.

1. Убедимся прежде всего в том, что вывод состояния не нарушил унитарности и (34) правильно нормировано, т.е.  $\langle \widetilde{Out}, \alpha | \widetilde{Out}, \alpha \rangle = 1$ . Из (34) непосредственно следует

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{Out}, \alpha | \widetilde{Out}, \alpha \rangle &= v^2(L) + \sum_{n=1}^{\infty} (4\rho)^n \\ &\times \int d^n x u^2(L/2 - x_1) u^2(x_1 - x_2) \dots u^2(x_{n-2} - x_{n-1}) \\ &\times \left[ u^2(x_{n-1} - x_n) v^2(x_n + L/2) + u^2(x_{n-1} + L/2) \right. \\ &\left. \times \theta(-L/2 - x_n) e^{\gamma(x_n + L/2)} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Вводя обозначения  $U(x) = u^2(x)$  и  $V(x) = v^2(x)$  с фурье-компонентами

$$U(\omega) = -\frac{i\gamma^2/2}{(\omega + i\gamma/2)(\omega - 2\omega_+)(\omega - 2\omega_-)}, \quad (44)$$

$$V(\omega) = i \frac{(\omega + i\gamma/2)(\omega + i\gamma) - 2\rho\gamma}{(\omega + i\gamma/2)(\omega - 2\omega_+)(\omega - 2\omega_-)}, \quad (45)$$

и переходя к фурье-представлению в (43), имеем

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{Out}, \alpha | \widetilde{Out}, \alpha \rangle &= V(L) + \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega L} W(\omega) \\ &\times [V(\omega) + 1/\gamma]. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь

$$\begin{aligned} W(\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} [4\rho U(\omega)]^n = \frac{4\rho U(\omega)}{1 - 4\rho U(\omega)} \\ &= -2i \frac{\rho\gamma}{(\omega + i0)(\omega - \Omega_+)(\omega - -\Omega_-)}, \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$\Omega_{\pm} = -3i\gamma/4 \pm \sqrt{\Omega_R^2 - (\gamma/4)^2}. \quad (48)$$

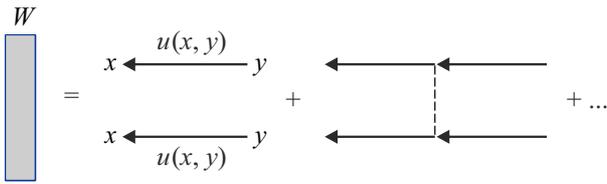
В этом выражении введена величина

$$\Omega_R = \sqrt{4\rho\gamma}, \quad (49)$$

совпадающая с частотой Раби. В рассматриваемом пределе  $L \rightarrow \infty$  (при этом  $V(L) \rightarrow 0$ ) не исчезающий вклад в интеграл по  $\omega$  дает лишь полюс  $\omega = -i0$  и мы получаем

$$\langle \widetilde{Out}, \alpha | \widetilde{Out}, \alpha \rangle = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega L} \frac{i}{\omega + i0} = 1. \quad (50)$$

Суммирование, возникающее в процессе вычисления нормы и приводящее к функции  $W(\omega)$ , проиллюстрировано на рис. 1, где пунктирная линия изображает



**Рис. 1.** Пунктирная линия изображает функцию  $\delta(x_j - x'_j)$ , отвечающую спариванию операторов  $\varepsilon^\dagger(x_j)$  и  $\varepsilon(x'_j)$ .

функцию  $\delta(x_j - x'_j)$ , отвечающую спариванию операторов  $\varepsilon^\dagger(x_j)$  и  $\varepsilon(x'_j)$ .

2. Опишем теперь в качестве примера схему вычисления коррелятора

$$D(x, y) = \langle \widetilde{Out}, \alpha | \varepsilon^\dagger(x) \varepsilon(y) | \widetilde{Out}, \alpha \rangle, \quad (51)$$

фурье-компонента которого по разности  $(x - y)$  определяет спектральную плотность рассеянного света. Используя (39), находим для (51) при  $x > y$  следующее выражение:

$$D(x, y) = D_1(x, y) + D_2(x, y), \quad (52)$$

где

$$D_1(x, y) = \sum_{k, l, m=0}^{\infty} (4\rho)^{k+l+m+3} \times \int dx' dx'' dy' dy'' \langle L/2 | \hat{U}^k | x' \rangle \Gamma_1(x', x, x'') \times \langle x'' | \hat{U}^l | y' \rangle \Gamma_1(y', y, y'') \langle y'' | \hat{U}^m (\hat{V} + \hat{p}^{-1}) | -L/2 \rangle; \quad (53)$$

$$D_2(x, y) = \sum_{k, l=0}^{\infty} (4\rho)^{k+l+2} \int dx' dy' \langle L/2 | \hat{U}^k | x' \rangle \times \Gamma_2(x', x, y, y') \langle y' | \hat{U}^l (\hat{V} + \hat{p}^{-1}) | -L/2 \rangle. \quad (54)$$

Здесь использованы обозначения

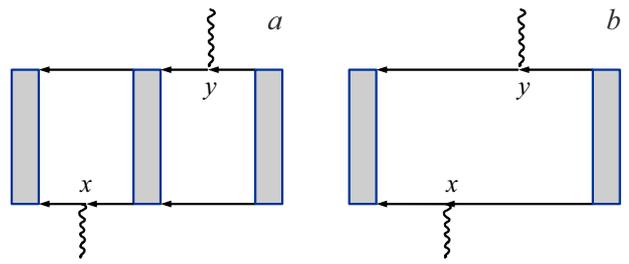
$$\langle x_1 | \hat{f} \hat{g} | x_2 \rangle \equiv \int dx f(x_1, x) g(x, x_2),$$

$$\Gamma_1(x', x, x'') = u(x' - x) u(x - x'') u(x' - x''), \quad (55)$$

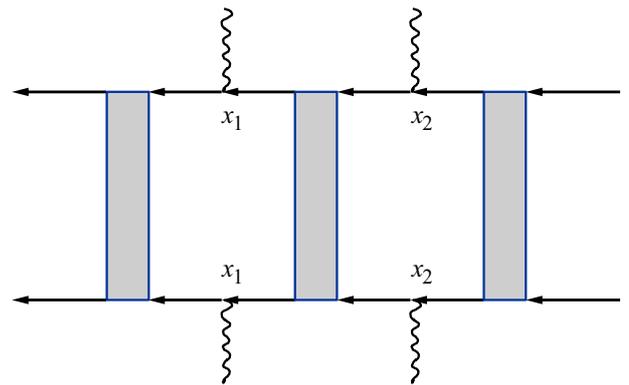
$$\Gamma_2(x', x, y, y') = u(x' - x) u(x - y') u(x' - y) u(y - y'). \quad (56)$$

На рис. 2, *a* и 2, *b* изображены характерные фрагменты общего члена в суммах (53) и (54) соответственно; волнистые линии отвечают внешним координатам  $x$  и  $y$ . Возникающие диаграммы аналогичны диаграммам в методе атомной матрицы плотности [16], использующем технику [17].

Вычисление величин (53) и (54) удобнее проводить переходом к фурье-представлению в подинтегральных выражениях, последующим суммированием по числам фотонов и, наконец, обратным фурье-преобразованием.



**Рис. 2.** Волнистые линии отвечают внешним координатам  $x$  и  $y$ .



**Рис. 3.** Факторизация корреляционной функции  $n$ -го порядка

В рассматриваемом пределе стационарного возбуждения ( $L \rightarrow \infty$ ) получаем

$$D(x - y) = \frac{\Omega_R^2 \gamma / 4}{\Omega_R^2 + \gamma^2 / 2} \left\{ \frac{\gamma^2}{\Omega_R^2 + \gamma^2 / 2} + e^{-\gamma|x-y|/2} + \frac{\Omega_R^2 - \gamma^2 / 2}{\Omega_R^2 + \gamma^2 / 2} \cos[\Omega(x - y)] e^{-3\gamma|x-y|/4} + \frac{\gamma}{\Omega_R} \frac{(5/4)\Omega_R^2 - \gamma^2 / 2}{\Omega_R^2 + \gamma^2 / 2} \sin(\Omega|x - y|) \times e^{-3\gamma|x-y|/4} \right\}, \quad (57)$$

где  $\Omega \equiv \sqrt{\Omega_R^2 - (\gamma/4)^2}$ . Фурье-преобразование этого коррелятора по  $(x - y)$  дает спектр рассеянного излучения, где помимо центрального пика имеются уширенные боковые пики на частотах  $\pm\Omega_R$  (при  $\Omega_R > \gamma/4$ ), образующие в совокупности знаменитый триплет Моллоу [7].

3. Полученное точное выражение (39) для состояния рассеянного света позволяет полностью описать статистические свойства излучения. Так, например, нетрудно заметить (рис. 3), что корреляционная функция  $n$ -го порядка

$$\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \widetilde{Out}, \alpha | \varepsilon^\dagger(x_1) \dots \varepsilon^\dagger(x_n) \varepsilon(x_n) \dots \varepsilon(x_1) | \widetilde{Out}, \alpha \rangle \quad (58)$$

выражается через корреляционную функцию второго порядка  $\rho^{(2)}(x_1, x_2)$ . Именно, в области  $x_1 > \dots > x_n$  имеем

$$\rho^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \rho^{(2)}(x_1, x_2)\rho^{(2)}(x_2, x_3) \dots \times \rho^{(2)}(x_{n-1}, x_n). \quad (59)$$

Вычисление  $\rho^{(2)}(x_1, x_2)$  аналогично проделанному выше выводу выражения для (51) и дает

$$\rho^{(2)}(x_1, x_2) = \left( \frac{\Omega_R^2 \gamma / 2}{\Omega_R^2 + \gamma^2 / 2} \right)^2 \left\{ 1 - \left[ \cos(\Omega|x_1 - x_2|) + \frac{3\gamma}{4\Omega} \sin(\Omega|x_1 - x_2|) \right] e^{-3\gamma|x_1 - x_2|/4} \right\}. \quad (60)$$

Обратим внимание на то, что выражение (60) (и, следовательно, (59)) описывает явление так называемой антигруппировки фотонов, т.е. корреляторы (60), (58) обращаются в нуль при совпадении координат. В развитии здесь подходе это является очевидным следствием „фермиевской“ структуры волновой состояния рассеянных фотонов (39), которое обращается в нуль при совпадении фотонных координат.

Полученные для рассмотренного в этом разделе частного случая стационарного возбуждения когерентным полем выражения (57) и (60) находятся в соответствии с известными результатами и иллюстрируют применение общего теоретико-полевого подхода, описанного в предыдущих разделах.

## 6. Заключение

Представлен точный теоретико-полевой подход к описанию рассеяния многофотонного состояния электромагнитного поля произвольной статистики на резонансном атоме. Подход основан на прямом регулярном применении гамильтонова формализма без использования матрицы плотности и связанной с этим редукцией описания. Возможность осуществить такой, как правило, нереализуемый подход основана на том исключительном обстоятельстве, что рассматриваемая система „атом + поле“ является интегрируемой, что позволяет найти полный набор многофотонных собственных состояний. Тем самым описание резонансной флуоресценции может быть представлено как точное решение квантовой задачи Коши, отвечающей динамической трансформации заданного начального in-состояния (налетающее поле) в конечное out-состояние (рассеянное и пролетевшее поле). Построенное точное out-состояние позволяет вычислить характеристики рассеянного поля для произвольного квантового состояния возбуждающего поля. Разработанный в разд. 2–3 общий формализм проиллюстрирован в разд. 4–5 на частном примере, когда налетающее поле находится в стационарном когерентном состоянии. Полученные для этого случая спектр и

корреляционная функция второго порядка рассеянного поля совпадают с известными результатами. При этом представленный здесь вывод является регулярным квантово-механическим вычислением без привлечения изощренных подходов с уравнением Линдблада, теоремой регрессии и т.п. Следует ожидать востребованности представленного подхода для современных задач квантовой оптики, когда падающее поле находится в неклассическом (некогерентном) состоянии.

Мы посвящаем эту статью памяти основателя и первого руководителя теоретического отдела Института спектроскопии, В.М. Аграновича (1929–2024).

## Финансирование работы

Работа В.И. Юдсона выполнялась в рамках госзадания (FFUU-2024-0003); он также благодарит программу фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

## 6.1. Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. *Теория солитонов: метод обратной задачи* (Наука, Москва 1980).
- [2] Дж. Лэм. *Введение в теорию солитонов* (Мир, Москва 1983).
- [3] V. Weisskopf. *Ann. der Phys.*, **9**, 23 (1931).
- [4] В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва 1989).
- [5] С.Г. Раутиан, И.И. Собельман. *ЖЭТФ*, **41**, 456 (1961). [S.G. Rautian, I.I. Sobel'man. *Sov. Phys. JETP*, **14**, 328 (1962)].
- [6] M.C. Newstein. *Phys. Rev.*, **167**, 89 (1968). DOI: 10.1103/PhysRev.167.89
- [7] R.R. Mollow. *Phys. Rev.*, **188**, 1969 (1969). DOI: 10.1103/PhysRev.188.1969
- [8] H.J. Kimble, L. Mandel., *Phys. Rev., A* **13**, 2123 (1976). DOI: 10.1103/PhysRevA.13.2123
- [9] Н.Б. Делоне, В.П. Крайнов. *Атом в сильном световом поле* (Энергоиздат, Москва 1984).
- [10] В.И. Рупасов, В.И. Юдсон. *ЖЭТФ*, **87**-(5), 1617 (1984). [V.I. Rupasov, V.I. Yudson. *Sov. Phys. JETP*, **60**-(5), 927 (1984)].
- [11] R.H. Dicke. *Phys. Rev.*, **93**, 99 (1954). DOI: 10.1103/PhysRev.93.99
- [12] В.И. Рупасов, В.И. Юдсон. Препринт № 26 (Институт спектроскопии АН СССР, Троицк, Моск. обл., 1987).
- [13] М. Скалли, М. Зубайри. *Квантовая оптика* (Физматлит, Москва 2003).
- [14] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика* (Наука, Москва 1989).
- [15] В.И. Юдсон. *ЖЭТФ*, **88**-(5), 1757 (1985). [V.I. Yudson. *Sov. Phys. JETP*, **61**-(5), 1043 (1985)].
- [16] Д.Ф. Смирнов, А.С. Трошин. *ЖЭТФ*, **72**-(6), 2055 (1977).
- [17] О.В. Константинов, В.И. Перель. *ЖЭТФ*, **39**-(1), 2055 (1960).