

02

## Дрожащее движение таммовских поляритонов в магнитном поле

© Е.С. Седов<sup>1,2</sup>, М.М. Глазов<sup>3</sup>, А.В. Кавокин<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup> Лаборатория оптики спина им. И.Н. Уральцева, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Владимир, Россия

<sup>3</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

<sup>4</sup> Международный центр теоретической физики им. А.А. Абрикосова, Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

e-mail: evgeny\_sedov@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2024 г.

В окончательной редакции 16.05.2024 г.

Принята к публикации 29.07.2024 г.

Теоретически исследовано дрожащее движение (циттербеуегунг — *zitterbewegung*) таммовских поляритонных состояний на границе двух многослойных бинарных гетероструктур с перекрывающимися запрещенными зонами, принадлежащих к точечной группе симметрии  $C_{3v}$  и поддерживающих экситонный резонанс. Дрожащее движение состоит в осцилляциях траектории таммовского состояния по мере его распространения в плоскости границы раздела. Продемонстрирована возможность управления характеристиками дрожащего движения, в том числе периодом и амплитудой осцилляций, при помощи внешнего магнитного поля, приложенного в геометрии Фарадея.

**Ключевые слова:** таммовские состояния, дрожащее движение, *zitterbewegung*, экситон-поляритоны, спин-орбитальное взаимодействие.

DOI: 10.61011/OS.2024.08.59024.6690-24

### Введение

Эффекты пространственной дисперсии в природных и искусственных кристаллах, особую роль которых в процессах взаимодействия света с веществом подчеркивал В.М. Агранович [1], очень ярко проявляются для экситонных поляритонов в квантовых микрорезонаторах [2]. Настоящая работа посвящена теории так называемых таммовских экситон-поляритонных состояний, недавно предложенных нами в [3]. Они представляют собой локализованные состояния электромагнитного поля, возникающие на границе двух оптических гетероструктур с разными энергетическими спектрами в условиях сильного взаимодействия электромагнитного поля с возмущениями среды. Поверхностные состояния, связанные с нарушением периодичности одноэлектронного потенциала вблизи границы кристалла, были предсказаны И.Е. Таммом [4] в рамках простейшей модели Кронига-Пенни. Подобные поверхностные или краевые состояния активно изучаются и по сей день. Таммовские состояния ранее были предсказаны для электронов на границе полупроводниковых сверхрешеток [5], а также для оптических мод на границе двух многослойных бинарных диэлектрических гетероструктур [6,7]. При этом обе оптические подструктуры могут быть сформированы как из разных [6], так и из одинаковых пар материалов [7]. В последнем случае толщины слоев из одного материала в разных подструктурах выбираются разными, чтобы

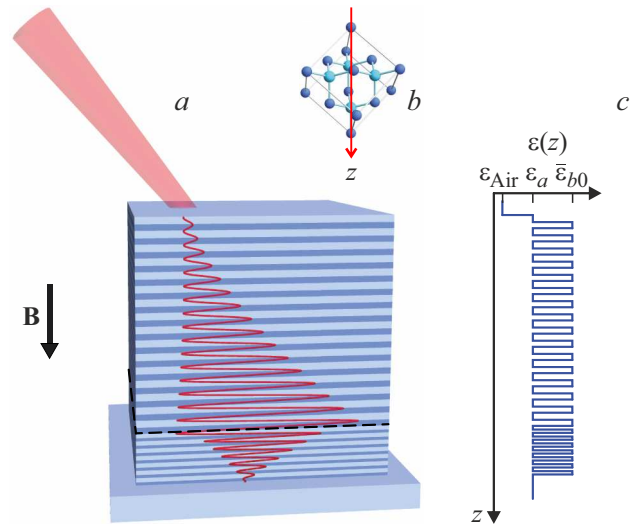
обеспечить различие их энергетических спектров. Таммовские состояния формируются в запрещенных зонах обеих подструктур, что создает необходимое условие для их возникновения — перекрытие этих запрещенных зон. В случае подструктур, сформированных из одинаковых пар материалов, очевидным дополнением к этому условию является необходимость зон иметь различные порядковые номера.

Таммовские состояния присущи и экситон-поляритонным системам. Преобразование фотонной таммовской структуры в поляритонную осуществляется при наличии в структуре экситонного резонанса и обеспечения сильной связи экситонных и фотонных состояний с образованием смешанных экситон-поляритонных мод. Экситонные резонансы возникают при встраивании узких квантовых ям в слои из одного материала каждой подструктуры [8–10], либо при использовании резонансного материала для слоев одного типа [3,11].

Характерной особенностью слоистых оптических структур является расщепление их собственных *s*- (ТЕ) и *p*-поляризованных (ТМ) мод [12]. Вследствие этого в поляритонной структуре вблизи экситонного резонанса формируется дублет таммовских поляритонных состояний с ортогональными поляризациями [3]. Важным преимуществом поляритонных систем перед фотонными является возможность эффективного управления их свойствами, в том числе дисперсионными и поляризационными, при помощи внешнего воздействия.

Расщепление собственных состояний структуры помимо обогащения ее спектра ведет к появлению новых эффектов при распространении квазичастиц. Одним из наиболее ярких явлений такого рода является дрожащее движение (циттербевергунг, zitterbewegung). Эффект состоит в пространственных осцилляциях траектории частицы при ее свободном распространении. Этот эффект обсуждался на заре релятивистской квантовой теории [13,14] для свободных электронов, однако именно в конденсированных средах ожидаются его наиболее яркие проявления. Это обусловлено значительным снижением частоты дрожания, которая определяется по порядку величины шириной запрещенной зоны  $E_g/\hbar$  (в единицах приведенной постоянной Планка), а не энергией покоя свободного электрона  $2m_0c^2/\hbar$  [15]. Помимо полупроводников [15] явление дрожащего движения предсказано и наблюдалось в ряде физических систем, включая бозе-эйнштейновские конденсаты ультрахолодных атомов [16], волноводные решетки [17], графен [18]. Известен также циттербевергунг фотонов и экситонных поляритонов в полупроводниковых микрорезонаторах [19–23]. Весьма интересным является проявление дрожащего движения электрона, вызванного его спиновой прецессией [24]. Эффект является результатом спин-орбитального взаимодействия (реального или искусственного, связанного с продольно-поперечным расщеплением в случае поляритонов), состоящего в обоюдном влиянии внутреннего спинового движения и внешнего распространения частицы в структуре (применительно к таммовским поляритонным состояниям — в плоскости границы многослойных оптических гетероструктур).

В работе [3] нами была показана возможность возбуждения таммовских поляритонных состояний на границе двух бинарных слоистых резонансных подструктур. Также продемонстрировано возникновение невязимности распространения таких поляритонов и снятие энергетического вырождения между состояниями, соответствующими противоположным направлениям их распространения в плоскости структуры под действием внешнего магнитного поля, приложенного в геометрии Фарадея. Однако в рассмотрении [3] мы ограничивались распространением таммовских состояний в плоскости структуры вдоль одного направления (ось  $y$ ), в котором вырождение было снято. Соответствующий этому случаю физический предел предполагает бесконечную ширину волнового пакета в ортогональном направлении  $x$  в плоскости структуры. Такие условия позволили нам выявить влияние спин-орбитального взаимодействия на спиновые (поляризационные) свойства таммовских поляритонных состояний. В настоящей работе мы фокусируемся на свойствах таммовских состояний, связанных с особенностями их распространения в плоскости структуры. Используя обобщенный формализм матриц переноса  $4 \times 4$ , теоретически исследовано дрожащее движение таммовских поляритонных волновых пакетов конечной ширины. Продемонстрировано влияние невязимности дисперсии на особенности проявлений цит-



**Рис. 1.** (а) Схематическое изображение структуры и оптического возбуждения таммовского поляритонного состояния в присутствии внешнего магнитного поля, приложенного в направлении роста структуры. (б) Элементарная ячейка CdTe, ориентированная в осях координат рассматриваемой структуры. (с) Схематическое изображение профиля диэлектрической проницаемости структуры вдоль оси ее роста.

тербевергунга поляритонов. Также продемонстрирована возможность управления его характеристиками, в частности, периодом осцилляций и амплитудой, при помощи внешнего магнитного поля.

### Рассматриваемая структура

Рассматривается структура, предложенная в работе [3] (рис. 1, а). Структура состоит из двух многослойных подструктур, сформированных из 14 (верхняя подструктура) и 7 (нижняя подструктура) пар слоев SiO<sub>2</sub>/CdTe. Нижняя подструктура расположена на подложке из SiO<sub>2</sub>. Слои SiO<sub>2</sub> приняты оптически изотропными с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_a = 2.25$ . Слои CdTe выступают в роли резонансной (объемной) среды с энергией экситонного резонанса  $\hbar\omega_x \approx 1.67$  eV. Материал является кубическим полупроводником с точечной группой симметрии  $T_d$ . В случае ориентации оси  $z$  вдоль кристаллической оси [111] структура принадлежит к точечной группе  $C_{3v}$  (рис. 1, б). В присутствии внешнего магнитного поля, ориентированного вдоль оси  $z \parallel [111]$ ,  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , компоненты тензора диэлектрической проницаемости CdTe,  $\hat{\epsilon}_b = \hat{\epsilon}_{b0} + \hat{\epsilon}_{b1}(B) + \hat{\epsilon}_{b2}(B, \mathbf{k})$  ( $\mathbf{k}$  — квазиволновой вектор экситонов), принимают следующий вид:

$$\hat{\epsilon}_{b0} = \bar{\epsilon}_{b0} \left( 1 + \frac{\omega_{LT}}{\omega_x - \omega - i\Gamma} \right) \hat{I}_3,$$

$$\hat{\epsilon}_{b1}(B) = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_1 B & 0 \\ -i\gamma_1 B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\varepsilon}_{b2}(B, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} -gBk_x & gBk_y & hBk_x \\ gBk_y & gBk_x & -hBk_x \\ hBk_y & -hBk_x & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\bar{\varepsilon}_{b0}$  — фоновая диэлектрическая проницаемость,  $\omega_{LT}$  — частота продольно-поперечного расщепления экситонов,  $\Gamma$  — скорость безызлучательного распада экситонов. Коэффициент  $\gamma_1$  характеризует зеемановское расщепление,  $g$  и  $h$  характеризуют магнитопроцентную дисперсию [25–28]. Именно линейные по  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}$  члены в диэлектрической проницаемости отвечают за асимметричную дисперсию и невзаимное распространение экситонных поляритонов в рассматриваемой нами системе. В расчетах приняты следующие значения параметров:  $\bar{\varepsilon}_{b0} = 7.8$ ,  $\hbar\omega_{LT} = 0.14$  meV,  $\hbar\Gamma = 0.1$  meV,  $\gamma_1 = 0.0002T^{-1}$ ,  $g = -0.0008 \mu\text{m}/T$ ,  $h = 0.004 \mu\text{m}/T$ .

В соответствии с [3] выбор толщин слоев обосновывается следующим образом. Нижняя (прилежащая к подложке) подструктура представляет собой распределенный брэгговский отражатель, для которого выполняется условие брэгговского резонанса первого порядка:  $d_a^{\text{bot}} \sqrt{\varepsilon_a} = d_b^{\text{bot}} \sqrt{\varepsilon_{b0}} = \pi c / 2\omega_{\text{Br}}$ , где  $c$  — скорость света в вакууме,  $d_{a,b}^{\text{bot}}$  — толщины соответствующих слоев нижней подструктуры. Брэгговская частота  $\omega_{\text{Br}}$  выбирается из условия, чтобы частота экситонного резонанса  $\omega_{\text{X}}$  совпадала с нижним краем первой фотонной запрещенной зоны зеркала.

Верхняя подструктура слоистая, однако условие брэгговского резонанса для нее нарушено в соответствии со следующим выражением:  $(d_a^{\text{top}} + \delta d) \sqrt{\varepsilon_a} = (d_b^{\text{top}} - \delta d) \sqrt{\varepsilon_{b0}} = \pi c / \omega_{\text{Br}}$ . Нарушение, состоящее в изменении толщин слоев на величину  $\pm \delta d$ , приводит к открытию второй фотонной запрещенной зоны. Кроме того, поскольку толщина слоев приблизительно в два раза превышает толщину слоев верхней подструктуры, первая и вторая запрещенные зоны соответственно нижней и верхней подструктур перекрываются [3]. В расчетах приняты следующие значения параметров:  $d_a^{\text{top}} = 101.8$  nm,  $d_b^{\text{top}} = 54.5$  nm,  $d_a^{\text{bot}} = 148.6$  nm,  $d_b^{\text{bot}} = 164.1$  nm,  $\delta d = 55$  nm. Профиль диэлектрической проницаемости всей структуры схематично показан на рис. 1, с.

## Метод расчета

Для изучения дисперсионных свойств структуры и моделирования распространения через нее светового излучения мы используем обобщенный формализм матрицы переноса  $4 \times 4$ , учитывающий явным образом поляризацию электромагнитного поля [29–33]. В рамках данного подхода в структуре, сформированной из множества плоских однородных слоев, для каждого слоя решается система уравнений Максвелла, при этом решения согласуются на границах соседних слоев.

Рассматривается распространение светового пучка, падающего на структуру со стороны верхней подструктуры. Используемый формализм нацелен на анализ рас-

пространения плоских монохроматических волн. В связи с этим для падающего пучка конечной ширины требуется выполнить преобразование Фурье в плоскости микрорезонатора. Это позволяет перейти в обратное пространство и затем применить формализм матриц переноса к каждой компоненте фурье-спектра [33].

При распространении через структуру плоской волны с частотой  $\omega_0$  тангенциальные компоненты ее волнового вектора,  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ , сохраняются при пересечении границы слоев. Нормальная компонента,  $k_z$ , при этом изменяется в соответствии с дисперсионными свойствами соответствующего слоя. Такое изменение обеспечивает непрерывность электрического и магнитного полей и их производных на границе слоев. Система уравнений Максвелла для плоской волны в слое  $j$  может быть сведена к задаче на собственные значения,  $\kappa_j = k_{z,j}c/\omega_0$ , характеристической матрицы  $\hat{\Delta}_j$  для данного слоя:

$$\kappa_j \Psi_j = \frac{c}{\omega_0} \hat{\Delta}_j \Psi_j, \quad (1)$$

где  $\Psi_j = (E_{x,j}, H_{y,j}, E_{y,j}, H_{x,j})^T$  — вектор  $x$ - и  $y$ -компонент электрического и магнитного полей. Характеристическая матрица в общем виде задается следующим образом:

$$\hat{\Delta}_j = \frac{1}{\varepsilon_{zz}} \times \begin{pmatrix} k_x \varepsilon_{zx} & k_x^2 - \varepsilon_{zz} & k_x \varepsilon_{zy} & -k_x k_y \\ \varepsilon_{zx} \varepsilon_{zx} - \varepsilon_{xx} \varepsilon_{zz} & k_x \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{xz} \varepsilon_{zy} - \varepsilon_{xy} \varepsilon_{zz} & -k_y \varepsilon_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon_{yx} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} + k_x k_y \varepsilon_{zz} & -k_x \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zy} - k_x^2 \varepsilon_{zz} & -k_y \varepsilon_{yz} \end{pmatrix},$$

где  $\varepsilon_{mm'}$  представляют собой компоненты диэлектрического тензора в слое  $j$ ;  $m, m' = x, y, z$ . Детали вывода характеристической матрицы  $\hat{\Delta}_j$  и уравнения (1) см. в работах [3,32–34].

Собственные значения  $\kappa_j^l$  [ $l = 1, \dots, 4$ ] уравнения (1) соответствуют эффективным волновым векторам распространяющихся в слое  $j$  в положительном ( $\kappa_j^{1,2}$ ) и отрицательном ( $\kappa_j^{3,4}$ ) направлениях оси  $z$  волн разных поляризаций ( $\kappa_j^{1,3}$  и  $\kappa_j^{2,4}$ ). Электрическое поле в этом базисе задается вектором

$$\mathbf{E}_j = (E_j^1, E_j^2, E_j^3, E_j^4)^T. \quad (2)$$

В этом случае связь соседних слоев,  $j-1$  и  $j$ , может быть описана следующим уравнением:

$$\mathbf{E}_{j-1} = \hat{A}_{j-1}^{-1} \hat{A}_j \hat{P}_j \mathbf{E}_j. \quad (3)$$

В (3) матрица взаимодействия  $\hat{A}_j$  используется для проецирования вектора  $\mathbf{E}_j$  на вектор  $\Psi_j$ . Матрица  $\hat{A}_j$  строится таким образом, что ее столбцы представляют собой собственные векторы характеристической матрицы  $\hat{\Delta}_j$ , полученные в результате решения уравнения (1).

Собственно распространение поля через слой  $j$  (от передней границы слоя,  $z_j$ , к задней границе,  $z_j + d_j$ , где  $d_j$  — толщина слоя) описывается матрицей распространения  $\hat{P}_j$ , компоненты которой определяются как  $\hat{P}_j^{ll'} = \delta_{ll'} \exp[i(\omega_0/c)\kappa_j^l d_j]$ , где  $\delta_{ll'}$  — символ Кронекера. Хотя в модели учитываются члены, линейные по волновому вектору  $\mathbf{k}$  в диэлектрической проницаемости слоев, присутствие в (2) только тангенциальных компонент электрического поля исключает необходимость введения дополнительных граничных условий на интерфейсах между слоями. Вектор поля на входе,  $\mathbf{E}_0$ , связан с вектором поля,  $\mathbf{E}_{N+1}$ , на выходе из структуры, состоящей из  $N$  слоев, уравнением

$$\mathbf{E}_0 = \hat{T}\mathbf{E}_{N+1} = \hat{A}_0^{-1}(\prod_{j=1}^N \hat{A}_j \hat{P}_j \hat{A}_j^{-1})\hat{A}_{N+1}, \quad (4)$$

где индексом  $N + 1$  обозначается сплошная среда, прилегающая к слою  $N$ . Матрица  $\hat{T}$  — есть матрица переноса через структуру.

Отметим, что в отсутствие внешнего магнитного поля ( $B = 0$ ) базис (2) составляют волны  $s$ - и  $p$ -поляризации. Однако присутствие магнитного поля индуцирует анизотропию оптических свойств структуры, ведущую к смешиванию поляризаций. В этом случае, описывая прохождение излучения через соответствующие слои, корректно говорить о распространении в них обыкновенной и необыкновенной волн [35].

### Условие возникновения и дисперсия таммовского поляритонного состояния

Основные рассуждения, позволяющие получить условие возникновения таммовских поляритонных состояний, подробно приведены в работах [3,36]. Для полноты изложения приведем их здесь в сжатом виде. Мысленно переместимся на плоскость границы двух подструктур. Рассмотрим распространение из этой плоскости в глубь каждой из подструктур двух противоположно направленных волн произвольной поляризации. Каждая из волн претерпевает отражение от соответствующей подструктуры, которое характеризуется амплитудными коэффициентами отражения  $\hat{r}^L$ , где  $L = \text{top}$  и  $L = \text{bot}$  для верхней и нижней подструктур соответственно. Коэффициенты отражения  $\hat{r}^L$  имеют вид матриц  $2 \times 2$ , диагональные элементы которых,  $r_{pp}^L$  и  $r_{ss}^L$ , характеризуют отражение волн без изменения поляризации. Наличие внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$  индуцирует смешивание поляризаций, в связи с чем недиагональные элементы  $r_{ps}^L$  и  $r_{sp}^L$ , характеризующие отражение волны с изменением поляризации на противоположную, в общем случае являются ненулевыми. Чтобы не перегружать изложение дополнительными обозначениями, мы используем обозначения  $s$  и  $p$  для волн как в оптически изотропных, так и анизотропных слоях. Для существования таммовского поляритонного состояния необходимо, чтобы на границе раздела поле заданной поляризации, входящее в одну из подструктур (верхнюю или нижнюю), совпадало с

полем той же поляризации, отраженным от другой подструктуры (нижней или верхней соответственно). С учетом смешивания поляризаций условие существования таммовского поляритонного состояния принимает следующий вид [3]:

$$(r_{ss}^{\text{top}} r_{ss}^{\text{bot}} + r_{ps}^{\text{top}} r_{sp}^{\text{bot}}) \cos \theta + (r_{pp}^{\text{top}} r_{pp}^{\text{bot}} + r_{sp}^{\text{top}} r_{ps}^{\text{bot}} - 1) \sin \theta = 0, \quad (5a)$$

$$(r_{pp}^{\text{top}} r_{pp}^{\text{bot}} + r_{sp}^{\text{top}} r_{ps}^{\text{bot}} - 1) \cos \theta + (r_{ss}^{\text{top}} r_{ss}^{\text{bot}} + r_{ps}^{\text{top}} r_{sp}^{\text{bot}}) \sin \theta = 0, \quad (5b)$$

где  $\theta$  — комплексный параметр, характеризующий поляризацию таммовского состояния. Коэффициенты отражения могут быть найдены в соответствии со следующими выражениями:

$$r_{(pp,ss)} = [T_{(31,42)}T_{(22,11)} - T_{(32,41)}T_{(21,12)}]/\det \hat{T}$$

и

$$r_{(ps,sp)} = [T_{(41,32)}T_{(22,11)} - T_{(42,31)}T_{(21,12)}]/\det \hat{T}.$$

В отсутствие внешнего магнитного поля ( $B = 0$ ) условия (5) для поляризаций  $s$  и  $p$  разделяются и сводятся к упрощенному виду:  $r_{nn}^{\text{top}} r_{nn}^{\text{bot}} = 1$ ,  $n = s, p$  [36].

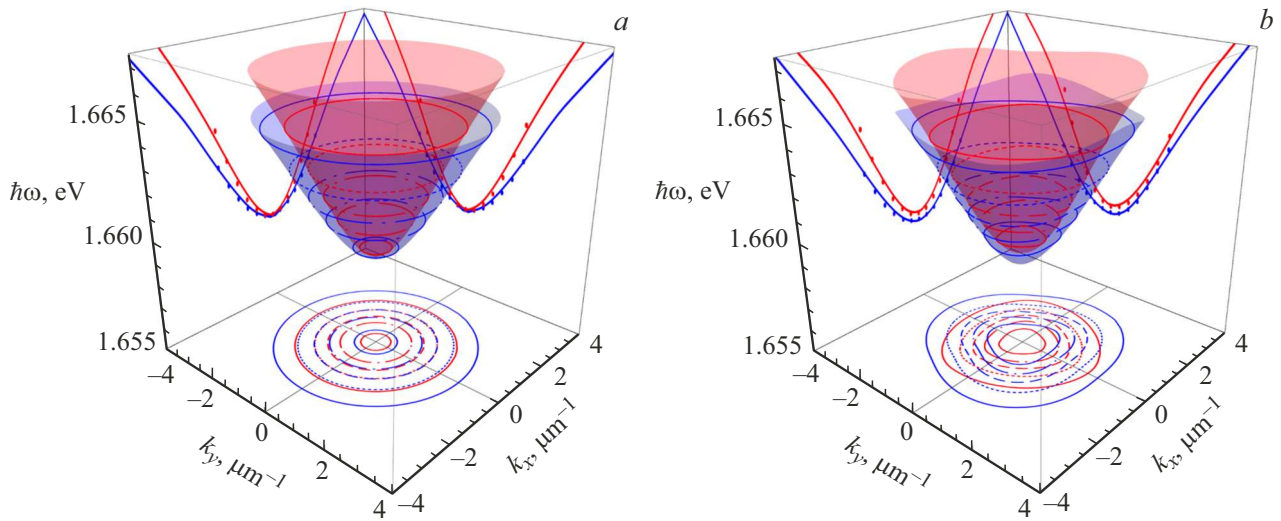
Решением уравнений (5) в рамках обобщенного формализма матрицы переноса  $4 \times 4$  можно рассчитать дисперсию дублета таммовских поляритонных состояний в плоскости структуры. На рис. 2 приведены дисперсионные поверхности, полученные при индукции магнитного поля  $B = 0$  и 10 Т. В отсутствие внешнего магнитного поля (рис. 2, *a*) дисперсия собственных ( $s$ - и  $p$ -поляризованных) мод обладает аксиальной симметрией. В присутствии магнитного поля (рис. 2, *b*) дисперсия имеет лишь ось вращения третьего порядка,  $C_3 \parallel z$ , также имеется зеркальное отражение  $x \rightarrow -x$  [3].

### Циттербеверг таммовского поляритонного состояния

Рассмотрим прохождение непрерывного лазерного пучка через описанную структуру в рамках обобщенного формализма матриц переноса. Выберем пучок гауссовой формы:

$$\mathbf{E}_0 \propto \exp[-\mathbf{r}^2/2w^2 + i(k_0 y - \omega_0 t)]\mathbf{p}_0,$$

шириной  $w$ , где  $\mathbf{r} = (x, y)$ .  $\omega_0$  — частота излучения лазера. Пучок падает на структуру под некоторым углом в плоскости  $yz$ , так что его волновой вектор в плоскости структуры  $\mathbf{k}_0 = (0, k_0)$ . При этом волновое число  $k_0$  выбирается таким, что при заданной частоте  $\omega_0$  его значение находилось посередине между расщепленными дисперсионными ветвями на рис. 2, *b*. Это позволяет наиболее эффективно возбуждать суперпозицию собственных состояний. Вектор-столбец  $\mathbf{p}_0$  характеризует поляризацию падающего излучения. Поляризация выбирается циркулярной и в базисе (2) во всех численных



**Рис. 2.** Дисперсия таммовских поляритонных состояний при  $B = 0$  (a),  $10\text{ Т}$  (b), полученная путем решения уравнений (5) в рамках обобщенного формализма матрицы переноса  $4 \times 4$ . Двумерные изображения получены при  $k_x = 0$  (правое),  $k_y = 0$  (левое). Точками изображены дисперсионные кривые, полученные из гамильтониана (6). Эквифазовые контуры (внизу) соответствуют сечениям на трехмерном изображении.

экспериментах задается как  $\mathbf{p}_0 = (1, i, p_3, p_4)^T$ , где компоненты  $p_3$  и  $p_4$  находятся из (4) самосогласованным образом.

На рис. 3 показаны нормированное распределение интенсивности  $I(\mathbf{r}) = |E_x(\mathbf{r})|^2 + |E_y(\mathbf{r})|^2$ , а также распределение компонент вектора Стокса (поляризационных компонент):

$$S_x(\mathbf{r}) = (|E_x(\mathbf{r})|^2 - |E_y(\mathbf{r})|^2)/I(\mathbf{r}),$$

$$S_y(\mathbf{r}) = 2\text{Re}[E_x(\mathbf{r})E_y^*(\mathbf{r})]/I(\mathbf{r}),$$

$$S_z(\mathbf{r}) = -2\text{Im}[E_x(\mathbf{r})E_y^*(\mathbf{r})]/I(\mathbf{r}),$$

таммовских поляритонных состояний в плоскости границы подструктур, полученные при индукции магнитного поля  $B = -5\text{ Т}$ , а также волновых числах  $k_0 = -1$  (a–d),  $1\text{ μm}$  (e–h). Величины  $E_x(\mathbf{r})$  и  $E_y(\mathbf{r})$  характеризуют распределение электрического поля в поляризациях  $x$  и  $y$  в соответствующей плоскости. Траектории центров масс волновых пакетов,  $X(y) = \int xI(\mathbf{r})dx / \int I(\mathbf{r})dx$ , изображены зелеными кривыми поверх распределения интенсивностей на рис. 3, a, e. В обоих рассмотренных случаях имеет место циттербевергунг: распределение интенсивности имеет немонотонный характер с выраженными осцилляциями в направлении, поперечном направлению распространения волнового пакета. Как видно, период осцилляций в разных случаях разный и зависит от направления распространения.

Осцилляции траектории центра масс таммовских поляритонных состояний сопровождаются также осцилляциями степени их поляризации с тем же периодом (рис. 3, b–d, f–h). Примечательно, что компонента поляризации  $S_x$  таммовского поляритонного состояния

(рис. 3, b, f) также претерпевает осцилляции вблизи центральной оси волнового пакета  $x = 0$  в отличие от циттербевергунга поляритонов в планарном резонаторе, индуцированного исключительно ТЕ–ТМ-расщеплением, предсказанного в работе [20].

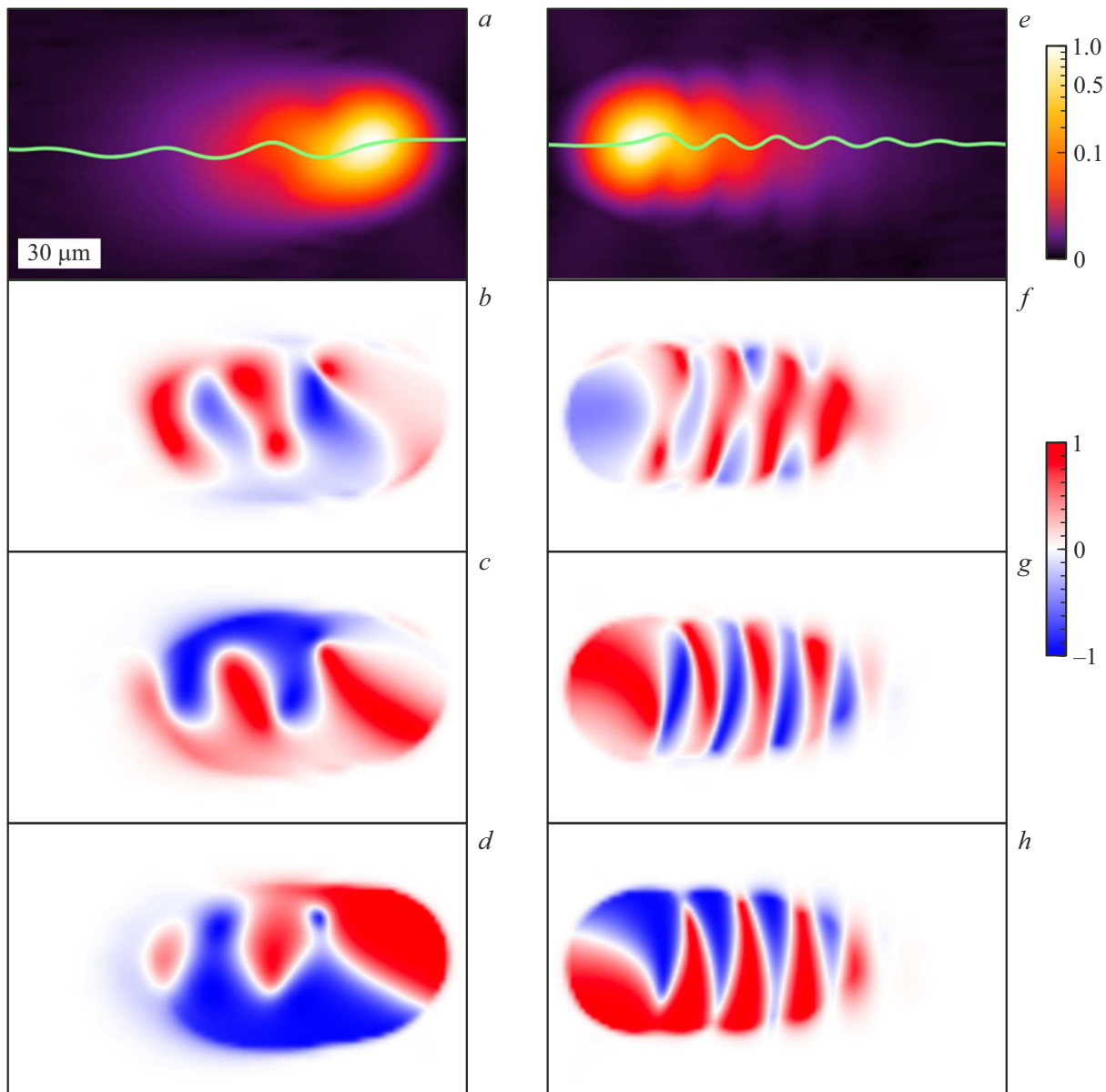
На рис. 4 показано распределение интенсивности описываемых таммовских поляритонных состояний в сопряженном пространстве,  $I(\mathbf{k})$ , в сравнении с пространственным спектром дублета собственных таммовских поляритонных состояний. Как видно, несмотря на одинаковые (с точностью до знака волнового вектора) условия возбуждения, собственные состояния имеют разное расщепление, что приводит к разному периоду осцилляций. Это — проявление магнитоиндуцированной невязимности в рассматриваемой системе.

## Управление циттербевергунгом при помощи внешнего магнитного поля

Эффекты, вызванные спин-орбитальным взаимодействием, удобно рассматривать в рамках псевдоспинового формализма [37]. Симметричный анализ, выполненный ранее в [3], позволяет записать эффективный гамильтониан дублета таммовских поляритонных состояний в базисе правой и левой циркулярных поляризаций:

$$H = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + \hbar\Omega \cdot \mathbf{s}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  — волновой вектор поляритона в плоскости структуры,  $M$  — его эффективная масса, а член  $\propto \Omega \cdot \mathbf{s}$  отвечает за поляризационное расщепление мод. Поляризация поляритонов связана с их псевдоспином, имеющим две проекции на ось роста структуры:  $\mathbf{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$  — оператор псевдоспина поляритонов,



**Рис. 3.** Дрожащее движение таммовских поляритонных состояний в присутствии внешнего магнитного поля с индукцией  $B = -5$  Т при возбуждении наклонным гауссовым лазерным пучком шириной  $7 \mu\text{m}$  с энергией  $\hbar\omega_0 = 1.66035$  eV и квазиимпульсом  $k_0 = -1$  ( $a-d$ ),  $1 \mu\text{m}^{-1}$  ( $e-h$ ). Поляризация возбуждающего излучения циркулярная. На панелях изображено пространственное распределение интенсивности ( $a, e$ ), а также компонент вектора Стокса  $S_x$  ( $b, f$ ),  $S_y$  ( $c, g$ ), и  $S_z$  ( $d, h$ ) таммовских поляритонных состояний в плоскости на границе подструктур, рассчитанное в рамках метода обобщенной матрицы переноса  $4 \times 4$ . Зеленые кривые на ( $a, e$ ) изображают траекторию центра масс таммовского поляритонного состояния.

$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  — вектор матриц Паули. Единичный оператор при первом слагаемом в правой части (6) опущен для краткости. В рамках псевдоспинового формализма расщепление дисперсионных ветвей удобно характеризовать при помощи вектора  $\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ , играющего роль эффективного магнитного поля, индуцирующего прецессию поляритонного псевдоспина. Компоненты вектора  $\Omega$  для дублета таммовских состояний имеют следующий вид:

$$\Omega_x = C_2[(k_x^2 - k_y^2)] + C_3 B k_y, \quad (7a)$$

$$\Omega_y = 2k_x k_y C_2 + C_3 B k_x, \quad (7b)$$

$$\Omega_z = C_1 B. \quad (7c)$$

Коэффициент  $C_1$  в (7c) характеризует зеемановское расщепление в циркулярных поляризациях в присутствии внешнего магнитного поля  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . Константа  $C_2$  описывает ТЕ–ТМ-расщепление таммовских поляритонных мод. Слагаемые с коэффициентом  $C_3$  характеризуют магнитопро пространственную дисперсию, имеющую место в структурах с точечной симметрией  $C_{3v}$  [3,38]. Собственные значения гамильтониана (6) в зависимости от

$k_x$  при  $k_y = 0$  и от  $k_y$  при  $k_x = 0$  изображены на боковых панелях рис. 2, *a* и *b* соответственно для  $B = 0$  и  $10\text{ Т}$  в сравнении с дисперсиями дублета таммовских поляритонных состояний, полученных в рамках обобщенного формализма матриц переноса. Константы расщепления и эффективная масса поляритонов в плоскости структуры оценены как  $\hbar C_1 = 15\ \mu\text{eV}/\text{Т}$ ,  $\hbar C_2 = 0.54\ \text{meV}\cdot\mu\text{m}^2$ ,  $\hbar C_3 = 30\ \mu\text{eV}\cdot\mu\text{m}/\text{Т}$  и  $M = 3.4 \cdot 10^{-5}m_0$ , где  $m_0$  — масса свободного электрона.

Уравнения для операторов координат дублета таммовских состояний поляритонов в плоскости структуры находятся в следующем виде:

$$\begin{aligned}\partial_t x &= \frac{\hbar k_x}{M} + 2C_2[k_x s_x + k_y s_y] + C_3 B s_y, \\ \partial_t y &= \frac{\hbar k_y}{M} + 2C_2[k_x s_y - k_y s_x] + C_3 B s_x.\end{aligned}$$

Как видно, эволюция псевдоспина поляритонов, описываемая уравнением прецессии  $\partial_t \mathbf{s} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}$ , вносит вклад в „дрожание“ их траектории, ср. с [24].

Рассмотрим распространение таммовского поляритонного состояния вдоль границы подструктур, характеризующегося спинором  $|\Psi\rangle = \Psi(\mathbf{r})|\psi\rangle$ , где

$$\Psi(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}$$

— огибающая волновой функции, спинор  $|\psi\rangle$  описывает поляризацию таммовского состояния. Важным является случай распространения циркулярно поляризованного волнового пакета,  $|\psi\rangle = (1, 0)$ , вдоль оси  $y$ ,  $\mathbf{k}_0 = (0, k_0)$ . В этом случае для достаточно широкого волнового пакета (для ширины которого выполняется условие  $d \gg 2\pi/k_0$ ) может быть получено аналитическое выражение для траектории его центра масс,  $X(Y)$ , где  $X(t) = \langle \Psi | x | \Psi \rangle$  и  $Y(t) = \langle \Psi | y | \Psi \rangle$ :

$$X(t) = -\frac{\Omega'_{y0} \Omega_{x0}}{\Omega_0^2} (1 - \cos \Omega_0 t), \quad (8a)$$

$$Y(t) = \frac{\hbar}{M} k_0 t + \frac{\Omega_{x0} \Omega'_{x0}}{\Omega_0^2} C_1 B \left( t - \frac{1}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t \right), \quad (8b)$$

где

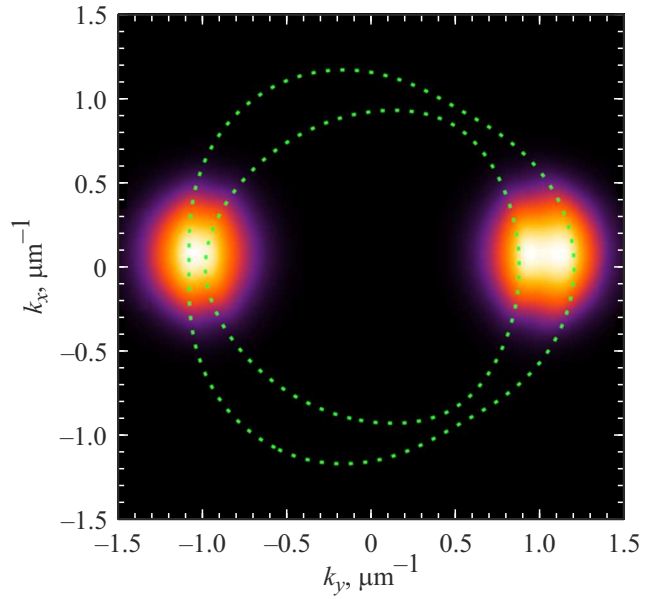
$$\begin{aligned}\Omega_{x0} &= \Omega_x|_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0} = C_3 B k_0 - C_2 k_0^2, \\ \Omega'_{x0} &= (\partial \Omega_x / \partial k_x)|_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0} = B C_3 - 2C_2 k_0, \\ \Omega'_{y0} &= (\partial \Omega_y / \partial k_x)|_{\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_0} = B C_3 + 2C_2 k_0\end{aligned}$$

и

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{x0}^2 + \Omega_{y0}^2 + \Omega_{z0}^2}.$$

Эволюция компонент вектора псевдоспина  $\mathbf{S}(t) = \langle \mathbf{s} \rangle$  в этом случае описывается следующими выражениями:

$$S_x(t) = \frac{B C_1 \Omega_{x0}}{\Omega_0^2} (1 - \cos \Omega_0 t), \quad (9a)$$



**Рис. 4.** Распределение интенсивности таммовских состояний, проиллюстрированных на рис. 3, *a–d* (слева) и рис. 3, *e–h* (справа) в сопряженном пространстве. Зеленые пунктирные кривые изображают линии постоянной энергии таммовских поляритонных состояний при  $\hbar\omega = 1.66035\ \text{eV}$  и  $B = -5\ \text{Т}$ .

$$S_y(t) = -\frac{\Omega_{x0}}{\Omega_0} \sin \Omega_0 t, \quad (9b)$$

$$S_z(t) = \frac{B^2 C_1^2 + \Omega_{x0}^2}{\Omega_0^2} \cos \Omega_0 t. \quad (9c)$$

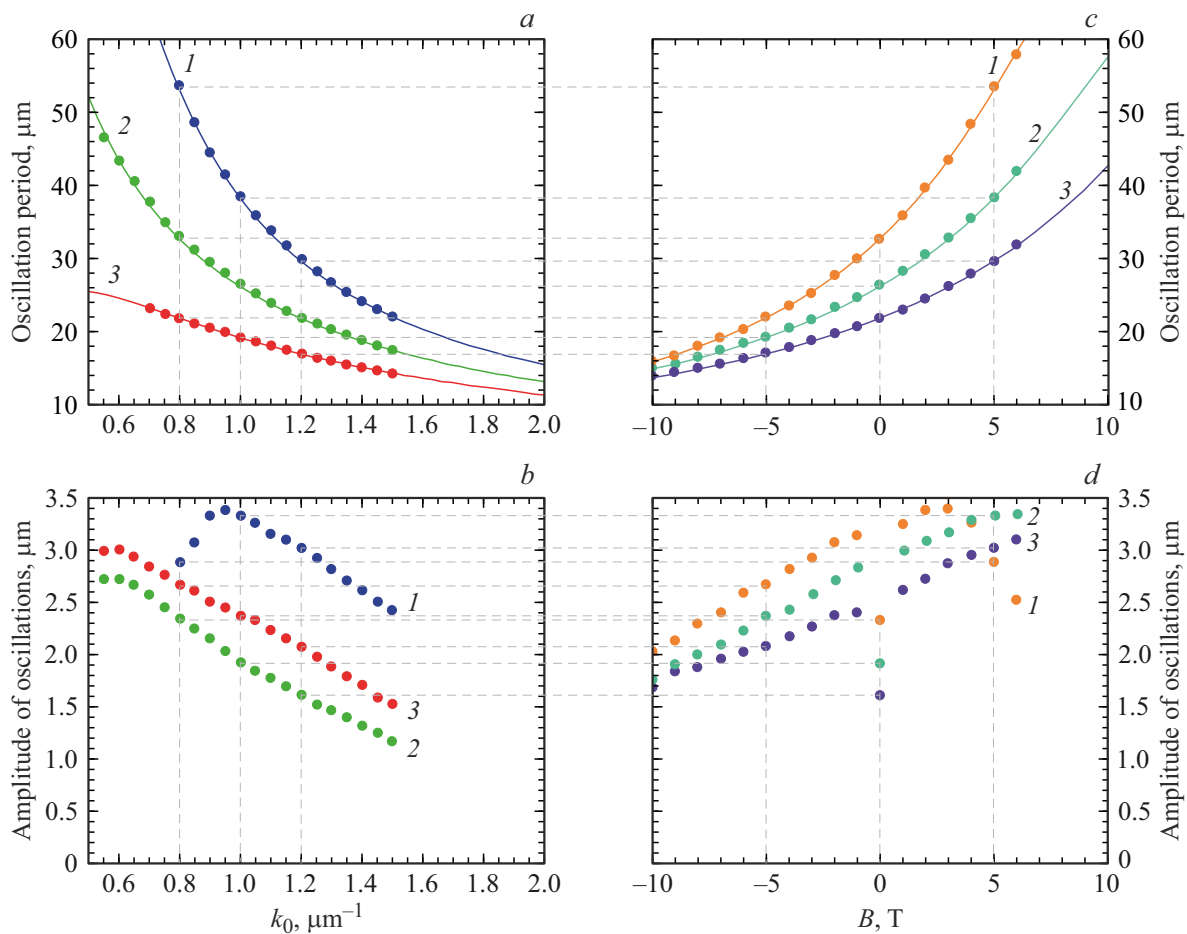
В отсутствие внешнего магнитного поля,  $B = 0$ , выражения (8) и (9) существенно упрощаются, совпадая с полученными для поляритонов в планарном микрорезонаторе [21]:

$$X(t) = -(2/k_0)(1 - \cos \Omega_0 t), \quad Y(t) = \hbar k_0 t / M,$$

$$\mathbf{S}(t) = (0, -\sin \Omega_0 t, \cos \Omega_0 t).$$

Как видно, при  $B = 0$  параметр Стокса  $S_x$ , отвечающий за степень линейной поляризации в осях  $(xy)$ , действительно остается неизменным в ходе эволюции таммовского поляритонного состояния. Однако присутствие внешнего магнитного поля индуцирует его осцилляции вместе с остальными компонентами, как проиллюстрировано на рис. 3, *b, f*.

Пространственный период осцилляций траектории таммовского поляритонного состояния имеет квадратичную зависимость как от волнового числа  $k_0$ , так и от индукции внешнего магнитного поля  $B$ . Это подтверждают зависимости периода от  $k_0$  при фиксированных значениях  $B$ , а также от  $B$  при фиксированных значениях  $k_0$ , приведенные на рис. 5, *a, c*. Сплошные линии демонстрируют зависимости, полученные из аналитических выражений (8). Точками показаны результаты, полученные в результате моделирования распространения



**Рис. 5.** Зависимость периода (*a, c*) и амплитуды (*b, d*) осцилляций траектории таммовского поляритонного состояния: *a, b* — от волнового числа в плоскости структуры  $k_0$  при фиксированных значениях индукции внешнего магнитного поля; *c, d* — от индукции внешнего магнитного поля  $B$  при фиксированных значениях волнового числа. На панелях (*a, b*)  $B = 5$  (1), 0 (2),  $-5$  Т (3). На панелях (*c, d*)  $k_0 = 0.8$  (1), 1 (2),  $1.2 \mu\text{m}^{-1}$  (3). Сплошными кривыми на панелях (*a*) и (*c*) приведены зависимости, полученные из аналитических выражений (8); цветными точками обозначены результаты численного расчета в рамках обобщенного формализма матрицы переноса  $4 \times 4$ ; штриховые прямые соединяют точки с одинаковыми значениями  $k_0$  и  $B$ .

таммовских поляритонных состояний, возбуждаемых лазерным пучком конечной ширины  $w = 7 \mu\text{m}$  в рамках обобщенного формализма матрицы переноса  $4 \times 4$ . Как видно, в диапазоне значений, где численный расчет оказался возможен, отличие от аналитического предела бесконечно широкого волнового пакета без учета диссипации не превышает погрешности численного расчета. Аналогичный результат (не приведен в статье) получен для возбуждающих пучков иной ширины в диапазоне от 5 до  $50 \mu\text{m}$ . Препятствием к выполнению оценки пространственного периода осцилляций в произвольных диапазонах волновых чисел и магнитной индукции стали конечные размер и шаг вычислительной сетки в численном эксперименте, а также в ряде случаев быстрое (в сравнении с периодом) затухание таммовского состояния при удалении от точки его возбуждения.

Зависимость амплитуды от  $k_0$  и  $B$  носит более сложный характер. При этом при фиксированных  $B$  зависимость от  $k_0$  имеет выраженный максимум (рис. 5, *b*).

На зависимости от  $B$  при фиксированном  $k_0$  напротив имеется провал при  $B = 0$ . Важно отметить, что аналитические выражения (8) не позволяют предсказать значение амплитуды циттербеверунга в условиях, близких к экспериментальным, которые воспроизводятся нами путем численного моделирования в рамках обобщенного формализма матрицы переноса  $4 \times 4$ . Это совпадает с выводом, сделанным применительно к циттербеверунгу поляритонов в планарном микрорезонаторе [21]. Причины тому следующие. Во-первых, аналитические выражения (8) не учитывают затухание осцилляций, которое имеет место для волновых пакетов конечной ширины (рис. 3, *a, e*). При этом чем шире спектр волнового пакета, тем, естественно, меньше длина затухания. По этой причине под амплитудой на рис. 5, *b, d* подразумевается максимум отклонения траектории таммовского поляритонного состояния, ближайшего к точке входа лазерного пучка в структуру. Во-вторых, наличие непрерывной оптической накачки оказывает влияние на отклонение



траектории. Это оказывается тем более выражено, чем ближе размер пятна накачки к периоду осцилляций. Наконец, вносит вклад затухание таммовского поляритонного состояния по мере отдаления от пятна накачки. Детальный анализ этих факторов выходит за рамки данной работы.

## Заключение

В настоящей работе теоретически описано явление дрожащего движения (циттербеугунг) таммовских поляритонных состояний в резонансной оптической структуре, сформированной из двух многослойных подструктур SiO<sub>2</sub>/CdTe. Эффект состоит в осцилляциях траектории таммовского состояния при его распространении в плоскости границы подструктур. Эффект имеет место для таммовских поляритонных волновых пакетов конечной ширины и является результатом влияния псевдоспина (поляризации) таммовских поляритонов на их распространение в условиях спин-орбитального взаимодействия, вызванного расщеплением поляризационных мод, включая ТЕ–ТМ-расщепление и магнитоиндуцированное расщепление. Осцилляции траектории сопровождаются осцилляциями поляризации, предсказанными нами ранее для случая одномерного распространения таммовских поляритонов в плоскости структуры [3].

Магнитное поле, приложенное в геометрии Фарадея, модифицирует поляризационные и дисперсионные характеристики таммовских поляритонов, в том числе приводит к невзаимности их дисперсии. Это влечет изменение силы и характера расщепления собственных мод структуры и, как следствие, изменение вклада спин-орбитального взаимодействия в распространение таммовских поляритонных состояний. В работе показано влияние внешнего магнитного поля на характеристики и степени выраженности дрожащего движения и продемонстрирована возможность управления периодом и амплитудой осцилляций траектории таммовских поляритонов при помощи внешнего магнитного поля.

## Финансирование работы

Е.С.С. и А.В.К. благодарят Санкт-Петербургский государственный университет (грант № 122040800257-5). Работа Е.С.С. выполнена в рамках государственного задания в сфере научной деятельности Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема FZUN-2024-0019, госзадание ВлГУ). А.В.К. благодарит Московский физико-технический институт в рамках программы стратегического академического лидерства „Приоритет-2030“. Симметричный анализ и аналитические модели развивались при поддержке гранта РНФ № 23-12-00142 (М.М.Г.).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург. *Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов* (Наука, М., 1965).
- [2] A. Kavokin, J.J. Baumberg, G. Malpuech, F.P. Laussy. *Microcavities* (Oxford University Press, Oxford, UK, 2011).
- [3] E. Sedov, M. Glazov, A. Kavokin. *Phys. Rev. Appl.*, **17** (2), 024037 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.17.024037
- [4] И.Е. Тамм. *ЖЭТФ*, **3**, 34 (1933).
- [5] М.Р. Владимировна, А.В. Кавокин. *ФТТ*, **37** (7), 2163 (1995). [M.R. Vladimirova, A.V. Kavokin. *Phys. Solid State*, **37** (7), 1178 (1995)].
- [6] H.Y. Dong, J. Wang, K.H. Fung. *Opt. Lett.*, **38** (24), 5232 (2013). DOI: 10.1364/OL.38.005232
- [7] A.V. Kavokin, I.A. Shelykh, G. Malpuech. *Phys. Rev. B*, **72** (23), 233102 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevB.72.233102
- [8] A. Askitopoulos, L. Mouchliadis, I. Iorsh, G. Christmann, J.J. Baumberg, M.A. Kaliteevski, Z. Hatzopoulos, P.G. Savvidis. *Phys. Rev. Lett.*, **106** (7), 076401 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.076401
- [9] E.S. Sedov, I.V. Iorsh, S.M. Arakelian, A.P. Alodjants, A. Kavokin. *Phys. Rev. Lett.*, **114** (23), 237402 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.237402
- [10] E.S. Sedov, E.D. Cherotchenko, S.M. Arakelian, A.V. Kavokin. *Phys. Rev. B*, **94** (12), 125309 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevB.94.125309
- [11] F. Biancalana, L. Mouchliadis, C. Creatore, S. Osborne, W. Langbein. *Phys. Rev. B*, **80** (12), 121306 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevB.80.121306
- [12] G. Panzarini, L.C. Andreani, A. Armitage, D. Baxter, M.S. Skolnick, V.N. Astratov, J.S. Roberts, A.V. Kavokin, M.R. Vladimirova, M.A. Kaliteevski. *Phys. Rev. B*, **59** (7), 5082 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevB.59.5082
- [13] G. Breit. *Proc. National Academy of Sciences*, **14**, 553 (1928). DOI: 10.1073/pnas.14.7.553
- [14] E. Schrödinger. *Berliner Ber.*, P. 418–428 (1930).
- [15] W. Zawadzki. *Phys. Rev. B*, **72** (8), 085217 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevB.72.085217
- [16] M. Merkl, F.E. Zimmer, G. Juzeliūnas, P. Öhberg. *Europhys. Lett.*, **83** (5), 54002 (2008). DOI: 10.1209/0295-5075/83/54002
- [17] F. Dreisow, M. Heinrich, R. Keil, A. Tünnermann, S. Nolte, S. Longhi, A. Szameit. *Phys. Rev. Lett.*, **105** (14), 143902 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.143902
- [18] T.M. Rusin, W. Zawadzki. *Phys. Rev. B*, **76** (19), 195439 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevB.76.195439
- [19] E. Sedov, I. Sedova, S. Arakelian, A. Kavokin. *Opt. Lett.*, **46** (8), 1836–1839 (2021). DOI: 10.1364/OL.418337
- [20] E.S. Sedov, Y.G. Rubo, A.V. Kavokin. *Phys. Rev. B*, **97** (24), 245312 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevB.97.245312
- [21] E.S. Sedov, I.E. Sedova, S.M. Arakelian, A.V. Kavokin. *New J. Phys.*, **22** (8), 083059 (2020). DOI: 10.1088/1367-2630/aba731
- [22] И.Е. Седова, Е.С. Седов, С.М. Аракелян, А.В. Кавокин. *Известия РАН. Серия физическая*, **84** (12), 1712–1718 (2020). DOI: 10.31857/S0367676520120339 [I.E. Sedova, E.S. Sedov, S.M. Arakelian, A.V. Kavokin. *Bull. Russ. Acad. Sci.: Physics*, **84** (12), 1453–1458 (2020). DOI: 10.3103/S1062873820120333].
- [23] S. Lovett, P.M. Walker, A. Osipov, A. Yulin, P.U. Naik, C.E. Whittaker, I.A. Shelykh, M.S. Skolnick,

- D.N. Krizhanovskii. *Light. Sci. Appl.*, **12**, 126 (2023). DOI: 10.1038/s41377-023-01162-x
- [24] С.А. Тарасенко, А.В. Пошакинский, Е.Л. Ивченко, И. Степанов, М. Эрсфельд, М. Лепса, Б. Бешотен. Письма в ЖЭТФ, **108**(5), 348 (2018). DOI: 10.1134/S0370274X18170083 [S.A. Tarasenko, A.V. Poshakinskiy, E.L. Ivchenko, I. Stepanov, M. Ersfeld, M. Lepsa, B. Beschoten. *JETP Lett.*, **108**(5), 326–328 (2018). DOI: 10.1134/S0021364018170022].
- [25] O.V. Gogolin, V.A. Tsvetkov, E.G. Tsitsishvili. *JETP*, **60**(3), 593 (1984).
- [26] Б.Б. Кричевцов, Р.В. Писарев, А.А. Ржевский, Х.-Ю. Вебер. Письма в ЖЭТФ, **69**(5), 514 (1999). [B.V. Krichevstov, R.V. Pisarev, A.A. Rzhavskii, H.-J. Weber. *JETP Lett.*, **69**(7), 551 (1999)].
- [27] T. Godde, M.M. Glazov, I.A. Akimov, D.R. Yakovlev, H. Mariette, M. Bayer. *Phys. Rev. B*, **88**(15), 155203 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.88.155203
- [28] L.V. Kotova, V.N. Kats, A.V. Platonov, V.P. Kochereshko, R. André, L.E. Golub. *Phys. Rev. B*, **97**(12), 125302 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevB.97.125302
- [29] P. Yeh. *J. Opt. Soc. Am.*, **69**(5), 742 (1979). DOI: 10.1364/JOSA.69.000742
- [30] D.W. Berreman. *J. Opt. Soc. Am.*, **62**(4), 502 (1972). DOI: 10.1364/JOSA.62.000502
- [31] W. Xu, L.T. Wood, T.D. Golding. *Phys. Rev. B*, **61**(3), 1740 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevB.61.1740
- [32] N.C. Passler, A. Paarmann. *J. Opt. Soc. Am. B*, **34**(10), 2128 (2017). DOI: 10.1364/JOSAB.34.002128
- [33] G.D. Landry, T.A. Maldonado. *Appl. Opt.*, **35**(30), 5870 (1996). DOI: 10.1364/AO.35.005870
- [34] E.S. Sedov, M.M. Glazov, P.G. Lagoudakis, A.V. Kavokin. *Phys. Rev. Research*, **6**(2), 023220 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevResearch.6.023220
- [35] N.C. Passler, M. Jeannin, A. Paarmann. *Phys. Rev. B*, **101**(16), 165425 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevB.101.165425
- [36] M. Kaliteevski, I. Iorsh, S. Brand, R.A. Abram, J.M. Chamberlain, A.V. Kavokin, I.A. Shelykh. *Phys. Rev. B*, **76**(16), 165415 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevB.76.165415
- [37] K.V. Kavokin, I.A. Shelykh, A.V. Kavokin, G. Malpuech, P. Bigenwald. *Phys. Rev. Lett.*, **92**(1), 017401 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.017401
- [38] M.M. Glazov, F. Dirnberger, V.M. Menon, T. Taniguchi, K. Watanabe, D. Bougeard, J.D. Ziegler, A. Chernikov. *Phys. Rev. B*, **106**(12), 125303 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevB.106.125303