04.2

Квазилинейная модификация функции распределения ионов в присутствии ионных бернштейновских волн в плазме токамака

© А.Ю. Попов [1], Н.В. Теплова [1,2]

[1] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.popov@mail.ioffe.ru, natalia.teplova@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 14 мая 2024 г.
В окончательной редакции 12 июля 2024 г.
Принято к публикации 12 июля 2024 г.

Получено квазилинейное уравнение, которое описывает эволюцию функции распределения ионов под действием ионных бернштейновских волн промежуточного диапазона частот. Показано, что квазилинейное уравнение может быть приближенно сведено к одномерному уравнению в пространстве поперечных скоростей ионов, причем коэффициент диффузии пропорционален мощности, поглощаемой при взаимодействии частиц с волнами.

Ключевые слова: ионная бернштейновская волна, квазилинейная диффузия.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.21.58956.19991

В экспериментах по электронному циклотронному резонансному нагреву в тороидальных установках магнитного удержания плазмы обнаружен ряд аномальных явлений, сопровождающих распространение мощных пучков СВЧ-волн. Среди них можно отметить появление групп ускоренных ионов [1,2], для которых отсутствуют линейные механизмы взаимодействия с СВЧ-волнами. Однако это явление может быть объяснено как следствие низкопорогового распада СВЧ-волны на две верхнегибридные волны [3]. Насыщение первичной неустойчивости происходит за счет каскада распадов первичных дочерних волн, причем на каждом шаге возбуждаются высокочастотная верхнегибридная волна и низкочастотная ионная бернштейновская (ИБ) волна. Возбуждение именно этих дочерних волн было подтверждено в результате моделирования двухплазмонного параметрического распада СВЧ-волны необыкновенной поляризации методом частиц в ячейках (particle-in-sell, PIC) [4]. Взаимодействие дочерних ИБ-волн с ионами может объяснить эффект генерации групп ускоренных ионов при электронном циклотронном резонансном нагреве. Для количественной оценки результата взаимодействия волна–частица требуется анализ квазилинейной эволюции функции распределения ионов. В настоящей работе мы приводим вывод квазилинейного уравнения, описывающего эволюцию ионной функции распределения. Учтен эффект центробежного и градиентного дрейфа ионов в присутствии неоднородного магнитного поля, имеющего конечную кривизну силовых линий. Пренебрегается эффектом шира магнитного поля, который в результате перепроектирования приводит к появлению продольной компоненты волнового вектора волны. Однако этот эффект является более слабым, чем рассмотренный в настоящей работе, если выполняется условие $\Delta x_d/(\rho_i q) < 1$, где q — запас устойчивости, $\rho_i = v_{ti}/\omega_{ci}$ — ионный ларморовский радиус, v_{ti} — ионная тепловая скорость, ω_{ci} — ионная циклотронная частота, Δx_d — пространственный размер области, где в результате каскада распадов возбуждается ИБ-волна.

Рассмотрим локальное кинетическое уравнение для бесстолкновительной плазмы в неоднородном магнитном поле $\mathbf{B} = B(x)\mathbf{e}_z$, которое описывает функцию распределения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_j\frac{\partial}{\partial x_j} + v_{di,j}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{Ze}{m_i}\left(E_j + e_{jkl}v_k B_l\right)\frac{\partial}{\partial v_j} + \omega_{ci}e_{jkz}v_k\frac{\partial}{\partial v_j}\right)f_i = 0, \quad (1)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, e_{jkz} — полностью антисимметричный единичный тензор, Ze — заряд иона, $\mathbf{v}_{di} = \mathbf{e}_y(v_\perp^2 + 2v_z^2)/(R\omega_{ci})$ — дрейфовая скорость ионов, R — радиус кривизны магнитной силовой линии (большой радиус установки). Уравнение (1) записано в произвольной системе координат. Если для описания волны более удобной является декартова система координат $(x,\ y,\ z)$, то для описания движения частицы в магнитном поле адекватной является цилиндрическая система координат $(v_\perp,\ \theta,\ v_z)$, где θ — азимутальный угол. Связь между поперечными компонентами скорости в обеих системах координат задается соотношениями $v_x = v_\perp\cos\theta$ и $v_y = v_\perp\sin\theta$. Далее будем искать решение уравнения (1) в виде разложения в ряд Тейлора по амплитуде волны $f_i = \bar{n}f_0 + f^{(1)}$, где $\bar{n}$ — фоновая плотность, $f_0(v_\perp, v_z)$ — не зависящая от гироугла θ функция распределения ионов, $f^{(1)}$ — линейная поправка к функции распределения, частота $\omega \gg \omega_{ci}$ и поперечное волновое число $q_\perp \gg 1/\rho_i$ которой „навязаны“ электрическим полем ИБ-волны с амплитудой A_0, распространяющейся строго поперек магнитного поля

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{A}}{2}\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - i\omega t) + \text{c.c.} \tag{2}$$

Волновой вектор, который имеет компоненты $\mathbf{q} = (q_x, q_y, 0)$, является решением дисперсионного уравнения для продольных (ИБ) волн. Амплитуда электрического поля ИБ-волны имеет компоненты $\mathbf{A} = -i(q_x, q_y, 0)A_0$. Подставим это разложение для функции распределения неравновесной плазмы в уравнение (1) и, выделяя члены первого и второго порядка по амплитуде электрического поля, получим уравнения для линейных поправок к функции распределения

$$\left(-i\alpha + i\lambda\cos(\theta - \psi) - \frac{\partial}{\partial\theta}\right) f^{(1)} = -\frac{\bar{n}Ze}{2m_i\omega_{ci}}\mathbf{A}\frac{\partial f_0}{\partial\mathbf{v}}, \tag{3}$$

где $\alpha = (\omega - \omega_{di})/\omega_{ci}$, $\omega_{di} = q_y v_{di}$, $\lambda = q_\perp v_\perp/\omega_{ci}$, $\psi = \arctan(q_y/q_x)$. Интегрируя уравнение (3), получим

$$f^{(1)} = i\frac{\bar{n}Ze}{2m_i\omega_{ci}}A_0\exp\big(i\lambda\sin(\theta - \psi) - i\alpha\theta\big)$$
$$\times \int\limits_{\infty}^{\theta} d\theta' \exp\big(i\alpha\theta' - i\lambda\sin(\theta' - \psi)\big)$$
$$\times\left[q_x\cos\theta'\frac{\partial}{\partial v_\perp} + q_y\sin\theta'\frac{\partial}{\partial v_\perp}\right] f_0(v_\perp, v_z). \tag{4}$$

Воспользуемся представлением

$$\exp\big(-i\lambda\sin(\theta' - \psi)\big) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(\lambda)\exp\big(-ip(\theta' - \psi)\big),$$

где J_p — функция Бесселя. С учетом того, что $q_x = q_\perp\cos\psi$, $q_y = q_\perp\sin\psi$ и $\cos\psi\cos\theta' + \sin\psi\sin\theta' = \cos(\theta' - \psi)$, интегрирование по азимутальному углу в выражении (4) приводит к следующему результату:

$$f^{(1)} = c\frac{q_\perp A_0}{2B}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\big(i\lambda\sin(\theta - \psi) - ip(\theta - \psi)\big)}{\alpha - p}$$
$$\times\frac{pJ_p(\lambda)}{\lambda}\frac{\partial}{\partial v_\perp} f_0. \tag{5}$$

Используя (1), (2) и (5) , получим для стационарной части функции распределения уравнения второго порядка по амплитуде волны

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 = -\frac{Ze}{2m_i}\left[A_x\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial v_\perp} - \sin\theta\frac{\partial}{v_\perp\partial\theta}\right)\right.$$
$$\left. + A_y\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \cos\theta\frac{\partial}{v_\perp\partial\theta}\right)\right] f^{(1)^*} + \ldots. \tag{6}$$

Интегрируя по азимутальному углу, в том числе по частям, те члены, которые содержат производную по θ, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} f_0 - \frac{1}{v_\perp}\frac{\partial}{\partial v_\perp} v_\perp D(v_\perp, v_z)\frac{\partial}{\partial v_\perp} f_0 = 0, \tag{7}$$

где $D(v_\perp, v_z) = -c^2\frac{q_\perp^2|A_0|^2}{2B^2}\sum\limits_{p=-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\big(\frac{1}{\alpha(v_\perp, v_z) - p}\big)\frac{p^2 J_p(\lambda)^2}{\lambda^2}$ — коэффициент квазилинейной диффузии. Используя подход, предложенный в работе [5], легко показать, что бесконечная сумма произведений функций Бесселя равна

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{m^2 J_m^2(\lambda)}{\alpha - m}\right) = \pi\alpha^2 J_\alpha(\lambda)^2\,\mathrm{Im}\big(\cot(\pi\alpha)\big)$$
$$= -\alpha^2 J_\alpha(\lambda)^2\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\alpha - l). \tag{8}$$

Примем во внимание, что параметры ИБ-волны в промежуточном диапазоне частот удовлетворяют следующим предельным соотношениям: $\lambda \gg 1$ и $\omega/\omega_{ci} \gg 1$, и воспользуемся асимптотическим выражением для функции Бесселя

$$J_\alpha(\lambda) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{\lambda^2 - \alpha^2}}\cos\Psi,$$

где $\Psi = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2} - \alpha\arccos\big(\frac{\alpha}{\lambda}\big) - \frac{\pi}{4} \gg 1$ [6]. Учитывая быстроосциллирующий характер этих функций, выделим неосциллирующую часть в выражении (8):

$$J_\alpha(\lambda)^2 \approx \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}}H(\lambda - \alpha),$$

$H(\lambda - \alpha)$ — функция Хевисайда. С учетом отмеченного выше коэффициент квазилинейной диффузии имеет вид

$$D(v_\perp, v_z) = c^2\frac{|A_0|^2}{2B^2}\frac{\omega^2}{v_\perp^2}\frac{\omega_{ci}^2}{q_\perp}\frac{H(v_\perp - \omega/q_\perp)}{\sqrt{v_\perp^2 - \omega^2/q_\perp^2}}$$
$$\times\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega - l\omega_{ci} - q_y\frac{v_\perp^2 + 2v_z^2}{R\omega_{ci}}\right), \tag{9}$$

где $\delta(\ldots)$ — дельта-функция, которая является вещественной частью обратного ионного пропагатора уравнения (3). Следуя модели резонанса с постоянной энергией [7], приближенно получим

$$D(v_\perp) \approx c^2\frac{|A_0|^2}{4B^2}\frac{\omega^2}{v_\perp^2}\frac{\omega_{ci}}{q_\perp}$$
$$\times\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{H(v_\perp - \omega/q_\perp)}{\sqrt{v_\perp^2 - \omega^2/q_\perp^2}}\frac{R\omega_{ci}^2/q_y}{\sqrt{\omega/\omega_{ci} - l}}\Bigg|_{v_\perp = \sqrt{\frac{\omega - l\omega_{ci}}{q_y/(R\omega_{ci})}}}. \tag{10}$$

Найдем долю энергии волны, теряемой в результате затухания на ионах,

$$Q = \frac{iA_0^*}{8\pi}\mathbf{q}\cdot\mathbf{j} = i\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}}\frac{q_\perp^2|A_0|^2}{(8\pi)^2}\int v_\perp\cos(\theta-\psi)$$

$$\times\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{\exp\big(i\lambda\sin(\theta-\psi)-ip(\theta-\psi)\big)}{\alpha-p}\frac{pJ_p(\lambda)}{\lambda}\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp}d\mathbf{v}.$$

Интегрирование по азимутальному углу приводит к следующему выражению:

$$Q = \frac{\omega_{pi}^2|A_0|^2}{(8\pi)^2}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\frac{\omega}{q_\perp}\frac{H(v_\perp-\omega/q_\perp)}{\sqrt{v_\perp^2-\omega^2/q_\perp^2}}$$

$$\times\frac{R\omega_{ci}^2/q_y}{\sqrt{\omega/\omega_{ci}-l}}\frac{\partial}{\partial v_\perp}f_0\Bigg|_{v_\perp=\sqrt{\frac{\omega-l\omega_{ci}}{q_y/(R\omega_{ci})}}}. \qquad (11)$$

Выражение (11), пропорциональное мнимой части линейной восприимчивости плазмы [8], определяет плотность энергии продольной волны в неоднородном магнитном поле. Сравнив выражения (10) и (11), отметим, что коэффициент диффузии в пространстве скоростей в уравнении (7) пропорционален величине удельных потерь ИБ-волны:

$$D = Q\Big/\bar{n}m_i\frac{\omega_{ci}}{\omega}\frac{v_\perp^2}{4\pi}\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp}\Bigg|_{v_\perp=\sqrt{\frac{\omega-l\omega_{ci}}{q_y/(R\omega_{ci})}}}. \qquad (12)$$

Таким образом, коэффициент диффузии в пространстве скоростей может быть найден из анализа энерговыделения ИБ-волны, что не требует расчета пространственного распределения электрических полей и позволяет ограничиться рассмотрением поведения лучевых траекторий, соответствующих пучку волн, для вычисления их ионного циклотронного поглощения.

Анализируя (10), отметим, что диапазон поперечных скоростей ионов, которые могут взаимодействовать с ИБ-волной, соответствует неравенству

$$v_\perp^{tail}\approx\sqrt{\frac{R\omega_{ci}^2}{q_y}} > \frac{\omega}{q_\perp}\geqslant v_{ti}. \qquad (13)$$

Неравенство (13) находится в разумном согласии с диапазоном поперечных скоростей, при которых появляются „хвосты“ на функции распределения ионов по поперечным скоростям [1,2].

Квазилинейное уравнение (7) с коэффициентом диффузии (10), которое описывает эволюцию функции распределения ионов в результате поглощения мощности ионных бернштейновских волн промежуточного диапазона частот, может быть использовано для анализа эффективности ионного циклотронного нагрева и интерпретации полученных экспериментальных данных на различных тороидальных установках удержания плазмы и в задачах, связанных с описанием ускорения ионов в ионосферной и космической плазме.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 23-72-00024).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] M. Martínez, B. Zurro, A. Baciero, D. Jiménez-Rey, V. Tribaldos, Plasma Phys. Control. Fusion, **60** (2), 025024 (2018). DOI: 10.1088/1361-6587/aa9f93

[2] Ch. Schlatter, *Turbulent ion heating in TCV tokamak plasmas*, thése No 4479 (École Polytechnique Fédérale De Lausanne, 2009). DOI: 10.5075/epfl-thesis-4479

[3] Е.З. Гусаков, А.Ю. Попов, УФН, **190** (4), 396 (2020). DOI: 10.3367/UFNr.2019.05.038572 [E.Z. Gusakov, A.Yu. Popov, Phys. Usp., **63** (4), 365 (2020). DOI: 10.3367/UFNe.2019.05.038572].

[4] M.G. Senstius, E.Z. Gusakov, A.Yu. Popov, S.K. Nielsen, Plasma Phys. Control. Fusion, **64** (11), 115001 (2022). DOI: 10.1088/1361-6587/ac8f6e

[5] A.D. Piliya, A.Yu. Popov, E.N. Tregubova, Plasma Phys. Control. Fusion, **45** (7), 1309 (2003). DOI: 10.1088/0741-3335/45/7/318

[6] G.N. Watson, *A treatise of the theory of Bessel functions* (Cambridge University Press, London, 1958).

[7] F. Romanelli, S. Briguglio, Phys. Fluids B, **2** (4), 754 (1990). DOI: 10.1063/1.859313

[8] А.Ю. Попов, Физика плазмы, **46** (6), 546 (2020). DOI: 10.31857/S0367292120060062 [A.Yu. Popov, Plasma Phys. Rep., **46** (6), 636 (2020). DOI: 10.1134/S1063780X20060069].