

## К электродинамике полупроводниковых магнитоплазменных волноводов

© М.В. Давидович

Национальный исследовательский Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия

E-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

Поступила в Редакцию 21 февраля 2024 г.

В окончательной редакции 20 июня 2024 г.

Принята к публикации 21 августа 2024 г.

Рассмотрена дисперсия магнитоплазмов, распространяющихся вдоль поверхности метаматериала с периодическими хорошо проводящими полупроводниковыми или металлическими включениями при приложении сильного внешнего магнитного поля вдоль направления распространения. Тензор эффективной диэлектрической проницаемости метаматериала в присутствии поля найден на основе метода эффективной среды. Показано, что в ТГЧ-диапазоне существуют замедленные магнитоплазмы с малыми потерями, т.е. такая структура с ровной поверхностью ведет себя как замедляющая система и может быть использована в ЛБВ с магнитной индукцией порядка 1 Тл, которая необходима для фокусировки ленточного электронного пучка. Магнитное поле эффективно управляет дисперсией.

**Ключевые слова:** магнитоплазмон, ЛБВ ТГЧ, дисперсия, гиперболический метаматериал, гомогенизация, дисперсионные уравнения.

DOI: 10.61011/FTR.2024.06.58942.6062

### 1. Введение

Магнитоплазмы (МП) — это электромагнитные волны вдоль поверхностей волнующих структур с проводящими элементами в присутствии внешнего постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0$ . Оно может иметь различные направления: нормально к поверхности, касательно к поверхности и быть направлено под произвольным углом. Изменяя направление и величину  $\mathbf{H}_0$ , можно управлять дисперсией МП. В данной работе мы рассматриваем такой волновод поверхностной волны с касательным магнитным полем, направленным вдоль движения МП (рис. 1) с зависимостью  $\exp(i\omega t - ik_z z)$ . Такой МП можно эффективно возбудить ленточным электронным пучком, если его скорость близка к фазовой скорости МП. При этом МП эффективно взаимодействует с таким пучком и может им усиливаться, что интересно для создания усилителей бегущей волны, например, ЛБВ диапазона КВЧ и ТГЧ. Для этого необходимы замедления  $n$  порядка нескольких единиц. Возбуждение МП релятивистскими электронными пучками можно обнаружить, если в некотором месте снять магнитное поле или поставить призму так, что МП станет вытекающим.

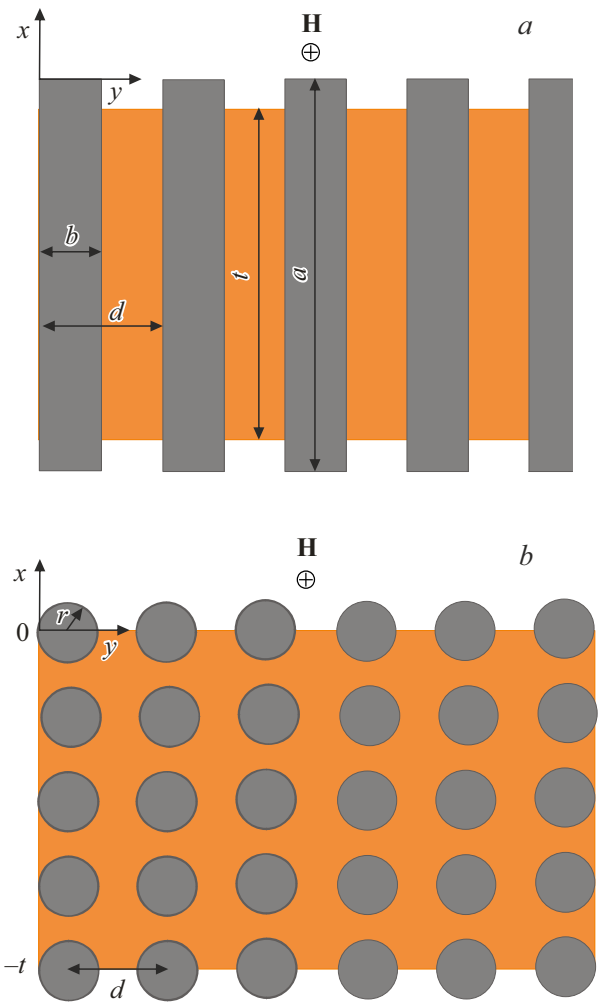
Простейший плазменный волновод представляет собой хорошо проводящую тонкую пластину с поверхностной волной [1]. Пластина может быть металлической или полупроводниковой, а вдоль ее поверхностей распространяются плазмон-поляритоны (ПП). Интересны сильно замедленные ПП, для чего необходим тонкий слой. С уменьшением толщины максимум  $n'$  смещается в низкочастотную область. Снижать толщину менее нескольких нанометров проблематично, так как пленка

растекается на островки. Перспективны полупроводниковые пленки, для которых плазменные частоты (ПЧ)  $\omega_p$  сильно меньше, чем у металлов. При наложении магнитного поля возникают циклотронные частоты (ЦЧ)  $\omega_H$ , при этом замедление может сильно возрасти. Для индукции 1 Тл ларморовская ЦЧ в меди имеет значение  $\omega_H = 176$  ГГц. В полупроводниках за счет малой эффективной массы ЦЧ попадают в ТГЧ-диапазон. В этот же диапазон за счет легирования и путем изменения температуры можно сдвинуть и ПЧ. Частоту столкновений (ЧС) можно сделать существенно ниже  $\omega_p$  и  $\omega_H$ , что делает полупроводниковые материалы весьма перспективными для получения медленных МП. Если один из поперечных размеров большой, строго говоря, бесконечный, (например, вдоль оси  $y$  рис. 1), задача для однородной пластины с магнитным полем и без него решается аналитически. При этом поля не зависят от  $y$ , а поле медленного поверхностного МП или ПП убывает от поверхности в направлении  $\pm x$ . Волны для быстрых МП вытекают. Для МП следует использовать тензорную диэлектрическую проницаемость (ДП) полупроводниковой плазмы в магнитном поле, при этом в общем случае неоднородной или конечной пластины задача формулируется в виде одномерного интегрального уравнения (ИУ) относительно распределения поперечного электрического поля [2]. Принципиально можно получить явные дисперсионные уравнения (ДУ) для плоскостных структур с однородными металлическими или диэлектрическими слоями [1]. Отметим, что строгие квантовые подходы типа метода функционала плотности [3] и неравновесных функций Грина–Келдыша [4] для исследования МП не применялись, а использовались только для получения статических проводимостей

тонких пленок. МП в проводящих полупроводниковых пленках исследовались в ряде работ [5–9]. В работе [5] рассмотрены поверхностные МП, распространяющиеся перпендикулярно магнитному полю, что отличается от нашего случая. В работах [6–9] рассмотрено возбуждение МП. Дисперсионные уравнения МП, распространяющихся в тонкой проводящей пленке вдоль магнитного поля, рассмотрены в статье [10]. Свойства проводящих элементов, малых по сравнению с длиной свободного пробега электронов, сильно отличаются от макроскопических, особенно в части проводимости [11], что связано в основном с сильным увеличением ЧС из-за влияния границ. Однако для сильного магнитного поля  $H_{0z}$  и рассматриваемых весьма высоких частот ларморовский радиус  $r_L = E_0/(B_{0z}\omega)$  при небольшой амплитуде электрического поля  $E_0$  существенно меньше размеров, поэтому можно использовать рассматриваемую далее классическую диэлектрическую проницаемость (ДП) намагниченной полупроводниковой плазмы.

Перспективными для МП являются структуры типа представленных на рис. 1, так как позволяют изменять дисперсию, изменяя конфигурацию. Далее считаем  $a = t$  и один из размеров большим:  $a \gg b$ , используя гомогенизацию для конечного по оси  $x$  слоя метаматериала (рис. 1) из полупроводниковых включений в диэлектрик при воздействии внешнего магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B} = z_0\mu_0 H_0$ . Оно необходимо для фокусировки ленточного электронного пучка и сильно влияет на замедление МП. Непосредственно использовать сплошную металлическую пластину проблематично, так как ПЧ металлов существенно больше ЦЧ. Кроме того, для металлов ЧС при комнатной температуре попадают в ТГЦ-диапазон, что не позволяет получить существенное замедление при низких потерях. Структура, показанная на рис. 1,  $b$ , с круглыми проволочками позволяет снизить эффективные ПЧ более чем на 2 порядка. Если взять их радиус  $r < 0.17d$ , то при  $r < 0.0056d$  получаем снижение на 4 порядка и более. Взяв длину волны  $\lambda = 0.3$  мм, получим приемлемый период для гомогенизации  $d = 3$  мкм и радиус  $r = 17$  нм. В этом случае эффективная ПЧ попадает в ТГЦ-диапазон, а ЧС снижается на несколько порядков. При наличии магнитного поля соответствующие МП имеют слабо выраженный магнитный характер и могут рассматриваться как возмущенные магнитным полем электрические  $E$ -ПП с пониженными частотами плазмонного резонанса.

Структуры типа представленных на рис. 1,  $a$  соответствуют МП. Они рассматривались в работе [12]. Там применен несколько другой подход, чем используемый далее, и исследован коэффициент отражения от слоя метаматериала, а МП не рассматривались. Без магнитного поля структуры, показанные на рис. 1, в некоторых диапазонах частот могут демонстрировать свойства гиперболических метаматериалов (ГММ) [13]. Дисперсия ПП вдоль слоев ГММ и расчет коэффициентов отражения и прохождения от слоя ГММ, в том числе и с повернутой осью анизотропии, рассматривались в



**Рис. 1.** Плазмонные волноведущие структуры с прямоугольными ( $a$ ) и круглыми полупроводниковыми или металлическими цилиндрическими вдоль оси  $z$  включениями ( $b$ ).

работах [14,15]. При наложении магнитного поля такие структуры становятся двухосными искусственными средами (фотонными кристаллами) и при дифракции могут демонстрировать ряд новых свойств, включая преобразование типов волн и невзаимность [15]. Структуры типа, показанных на рис. 1, можно отнести к проволочным метаматериалам (wire media). Они рассматривались во многих работах, например, в статьях [16–24], где демонстрируются свойства ГММ и ENZ (epsilon-near-zero)-метаматериалов [25], продолжая привлекать внимание [13]. Обычно электродинамику таких ИС рассматривают на основе только уравнения Френеля (УФ) даже без учета пространственной дисперсии (ПД). Большой спектр применений подобных метаматериалов требует построения их строгих электродинамических моделей, что возможно на основе метода ИУ, позволяющего корректно учесть ПД. Для таких сред ПД существенна даже на низких частотах [16]. Однако при распространении МП вдоль проводов (в нашем случае при  $k_y = 0$ )

ПД можно пренебречь. Наложение магнитного поля, особенно с произвольной ориентацией в пространстве, приводит к сильному усложнению ДУ, получаемых на основе строгих подходов, а использованный далее подход весьма прост.

Цель данной работы — исследование дисперсии МП вдоль границ слоя метаматериала с полупроводниковыми и металлическими включениями (рис. 1) при приложении внешнего магнитного поля, а также получение результатов для сплошной тонкой полупроводниковой пластины. Так как дисперсионные кривые имеют сложный вид с чередованием медленных и быстрых ветвей, целью является определение характерных частот перехода, на которых замедление  $n$  равно единице, а также частот максимально быстрых волн. Максимально замедленные ветви лежат в областях между двумя ближайшими точками с  $n = 1$ , внутри которых нет точек быстрых волн с  $n \approx 0$ .

## 2. Метод эффективной ДП и дисперсионные уравнения

Получение ДУ для структур, показанных на рис. 1, методом ИУ достаточно сложная численная задача, требующая затем многократного численного решения для получения комплексных корней. Так как размеры включений на порядки меньше рассматриваемых длин волн  $\lambda$  ТГЧ-диапазона, далее используем гомогенизацию на основе формулы Гарнетта для получения эффективной ДП при  $d \ll \lambda$ . Концентрация проводящих включений для структур с рис. 1, *a* имеет значение  $\delta = b/d$  и может быть малой или порядка 1. Структура, показанная на рис. 1, *a*, имеет то преимущество, что существенный вклад в свойства МП дает компонента  $\varepsilon_{xx}$ . Для этой структуры коэффициент деполяризации  $L_z = 0$ , а сумма двух коэффициентов других равна единице. Берем  $L_x = b/a \ll 1$ ,  $L_y = 1 - b/a$ . Для компонент эффективной ДП имеем модификацию формулы Гарнетта ( $k = x, y, z$ )

$$\frac{\varepsilon_{kk} - \varepsilon_d}{L_k(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_d) + \varepsilon_d} = \delta \frac{\varepsilon - \varepsilon_d}{\varepsilon + L_k(\varepsilon - \varepsilon_d)}.$$

Записывая ее для трех компонент диагонального тензора, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_d \frac{\varepsilon_d + L_x(\varepsilon - \varepsilon_d) + \delta(1 - L_x)(\varepsilon - \varepsilon_d)}{\varepsilon_d + L_x(\varepsilon - \varepsilon_d) - \delta L_x(\varepsilon - \varepsilon_d)} \\ &\approx \varepsilon_d [1 + \delta(\varepsilon/\varepsilon_d - 1)], \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_d \frac{\varepsilon_d + L_y(\varepsilon - \varepsilon_d) + \delta(1 - L_y)(\varepsilon - \varepsilon_d)}{\varepsilon_d + L_y(\varepsilon - \varepsilon_d) - \delta L_y(\varepsilon - \varepsilon_d)} \\ &\approx \varepsilon_d \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \delta(\varepsilon - \varepsilon_d)} \approx \varepsilon_d - \delta \varepsilon_d (1 - \varepsilon_d/\varepsilon), \\ \varepsilon_{zz} &= \varepsilon_d + \delta(\varepsilon - \varepsilon_d). \end{aligned} \quad (1)$$

Применяя формулу Рытова [26] для случая  $a \rightarrow \infty$ , получим  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_d(1 - \delta) + \delta\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_d/[1 - \delta(1 - \varepsilon_d/\varepsilon)] \approx \varepsilon_{yy} = [(1 - \delta)/\varepsilon_d + \delta/\varepsilon]^{-1} \approx \varepsilon_d - \varepsilon_d\delta(1 - \varepsilon_d/\varepsilon)$ , что соответствует (1). Аналогичная формула Бруггемана с введением коэффициентов деполяризации имеет вид

$$\delta \frac{\varepsilon_{kk} - \varepsilon}{\varepsilon_{kk} + L_k(\varepsilon - \varepsilon_{kk})} + (1 - \delta) \frac{\varepsilon_{kk} - \varepsilon_d}{\varepsilon_{kk} + L_k(\varepsilon_d - \varepsilon_{kk})} = 0.$$

Для продольной компоненты сразу получаем  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_d + \delta(\varepsilon - \varepsilon_d)$ , т.е. результат (1). Для поперечных компонент получаем квадратные уравнения. Так, имеем

$$\varepsilon_{xx} = \frac{L_x \{ \varepsilon \delta [\varepsilon_d + (1 - \delta)\varepsilon] - (1 - \delta)\varepsilon_d \varepsilon \} - \varepsilon_{xx}^2}{\delta L_x \varepsilon_d - \varepsilon \delta (1 - L_x) - (1 - \delta)(1 - L_x)\varepsilon_d}. \quad (2)$$

Физическому решению соответствует один корень. Первый член в фигурных скобках в числителе (2) мал. Опуская его, можно взять приближенное решение  $\varepsilon_{xx} = (1 - L_x)[\varepsilon\delta + (1 - \delta)\varepsilon_d] - \delta L_x \varepsilon_d$ . При  $L_x \rightarrow 0$  оно совпадает с (1). Но его можно уточнить, подставив в правую часть (2), т.е. взяв одну итерацию. Для второго случая структуры (см. рис. 1, *b*), когда включения сферические, все коэффициенты деполяризации равны 1/3, а формула Гарнетта дает изотропную среду с эффективной ДП

$$\varepsilon_{ef} = \varepsilon_d \frac{1 + 2\delta(\varepsilon - \varepsilon_d)/(\varepsilon + 2\varepsilon_d)}{1 - \delta(\varepsilon - \varepsilon_d)/(\varepsilon + 2\varepsilon_d)} \approx \varepsilon_d \left( 1 + 3\delta \frac{\varepsilon - \varepsilon_d}{\varepsilon + 2\varepsilon_d} \right). \quad (3)$$

В формуле (3)  $\delta = 4\pi r^3/(3d^3) \ll 1$ . Когда включения суть бесконечные цилиндры, то  $\delta = \pi r^2/d^2 \ll 1$ ,  $L_x = L_y = 1/2$ ,  $L_z = 0$ . Тогда  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}$ ,  $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel}$ , и

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} &= \varepsilon_d \frac{1 + \delta(\varepsilon - \varepsilon_d)/(\varepsilon + \varepsilon_d)}{1 - \delta(\varepsilon - \varepsilon_d)/(\varepsilon + \varepsilon_d)} \\ &\approx \varepsilon_d [1 + 2\delta(\varepsilon - \varepsilon_d)/(\varepsilon + \varepsilon_d)], \\ \varepsilon_{\parallel} &= \varepsilon_d + \delta(\varepsilon - \varepsilon_d). \end{aligned} \quad (4)$$

Такая среда из металлических цилиндров в двухчастотных диапазонах может являться ГММ:  $\varepsilon_{\parallel}\varepsilon_{\perp} < 0$  (в пренебрежении потерями). При отсутствии магнитного поля ДП в форме Друде–Лоренца имеет вид  $\varepsilon = \varepsilon_L - \omega_p^2/(\omega^2 - i\omega\omega_c)$ , а при наложении магнитного поля ДП становится тензором:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(\omega) = \varepsilon_{yy}(\omega) = \varepsilon_{\perp} &= \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2 - i\omega\omega_{co}}, \\ \varepsilon_{xy}(\omega) = -\varepsilon_{yx}(\omega) &= \frac{-i\omega_p^2\omega_H}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2 - i\omega\omega_{co})} = -i\beta, \\ \varepsilon_{zz}(\omega) = \varepsilon(\omega) &= \varepsilon_L - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\omega_{co}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\omega_p^2 = N_e e^2/(\varepsilon_0 m_e^*)$  — ПЧ,  $\omega_H = \mu_0 H_0 e/m_e$  — ЦЧ,  $\omega_{co}$  — ЧС,  $\varepsilon_L$  — терм Лоренца,  $m_e$  — эффективная масса электрона. Для металлов вплоть до оптических

частот терм  $\varepsilon_L$  почти постоянный и действительный. Для серебра можно взять  $\varepsilon_L = 9.3$ ,  $\omega_p = 1.57 \cdot 10^{16}$  Гц. При температуре 300 К для серебра  $\omega_{co} = 3.56 \cdot 10^{13}$  Гц. Эти значения получены с учетом концентрации электронов, экспериментального значения проводимости на постоянном токе и экспериментального значения частоты перехода реальной части ДП через нуль [27]. Для меди  $\varepsilon_L = 13.09$ ,  $\omega_p = 1.65 \cdot 10^{16}$  Гц,  $\omega_c = 4.23 \cdot 10^{13}$  Гц. Для металлов ЧС обратно пропорциональна температуре, а концентрация  $N_e$  и ПЧ практически от нее не зависят. При температуре порядка 1 К можно взять  $\omega_{co} \sim 10^{11}$  Гц. Получение медленных МП в металлических структурах в ТГЧ-диапазоне требует сверхсильных магнитных полей и криогенных температур. Однородный слой металла с ДП (3) является не очень хорошим МП волноводом в диапазоне ТГЧ из-за большой ПЧ [10]. Поэтому полупроводниковые структуры более удобны. Для них используем связь концентрации с температурой и шириной запрещенной зоны. При низких температурах концентрации и ПЧ малы. Изменять ПЧ можно, используя легирование. При сильном легировании ПЧ слабо зависит от температуры. Удобными материалами могут служить: сильно легированный антимонид индия  $n$ -InSb ( $\varepsilon_L = 17.0$ , эффективная масса электронов  $m_e^* = 0.013m_e$ , подвижность электронов  $1.1 \cdot 10^6$  см<sup>2</sup>/(В·с) при  $T = 77$  К);  $n$ -GaAs, легированный кремнием ( $\varepsilon_L = 14.0$ ,  $m_e^* = 0.067m_e$ , подвижность электронов  $8500$  см<sup>2</sup>/(В·с) при 300 К); бесщелевой теллурид ртути HgTe (с концентрацией электронов  $10^{21}$  м<sup>-3</sup>, эффективной массой  $0.013m_e$  и подвижностью  $10^8$  см<sup>2</sup>/(В·с) при  $T = 4.2$  К [28]). Структуры, показанные на рис. 1, удобны тем, что позволяют регулировать эффективные ПЧ, ЧС и ЦЧ, не используя низкие температуры. Эффективная ДП (3) метаматериала имеет сниженные эффективные ПЧ и ЧС. Также снижается и эффективная циклотронная частота. Поэтому магнитное поле на структуру, представленную на рис. 1,  $b$ , влияет слабее, чем на сплошной полупроводник. Использование низких температур для металлов изменяет в основном ЧС, которая снижается. Для полупроводников резко снижается концентрация и, соответственно, ПЧ и ЧС. При этом ПЧ может стать совсем низкой, поэтому необходимо легирование, позволяющее повысить концентрацию и получить ПЧ в ТГЧ-диапазоне. Что касается циклотронной частоты, то при эффективной массе порядка  $0.01$ – $0.1$  от массы электрона она при индукции 1 Тл попадает в ТГЧ-диапазон. В формуле (4) для  $\varepsilon_{\perp}$  следует использовать вместо  $\varepsilon$  значение  $\varepsilon_{\perp}$  из (5), а для  $\varepsilon_{\parallel}$  формула сохраняется. Это относится и к формуле (3), которая также при наложении магнитного поля становится тензорной.

В случае наложения магнитного поля на структуру с ДП (1) будем использовать эффективные компоненты ДП, обозначенные тильдой, приведенные в Приложении (формула (П.1)). Используя уравнения Максвелла (формулы (П.2)–(П.12) Приложения), для слоя

получаем ДУ [1], которое распадается на два:

$$\frac{k_{x\pm}/k_{0x} + \tilde{\varepsilon}_{zz}}{k_{x\pm}/k_{0z} + \tilde{\varepsilon}_{zz}} = \pm\psi, \quad (6)$$

$$\frac{k_{x\pm}/k_{0x} + 1}{k_{x\pm}/k_{0x} - 1} = \pm\psi, \quad (7)$$

где  $\psi = \exp(-ik_{x\pm}t)$ . Также можно записать  $k_{x\pm} = \tilde{\varepsilon}_{zz}k_{0x}[-i \tan(k_{x\pm}t/2)]^{\pm 1}$ . Уравнение (7) получается из (6) при замене  $\tilde{\varepsilon}_{zz} \rightarrow 1$ . Здесь для вакуума  $k_{0x} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$ . При большой толщине  $t$  и наличии даже бесконечно слабой диссипации  $\psi = 0$ , поэтому  $k_{x\pm} + \tilde{\varepsilon}_{zz}\sqrt{k_0 - k_z} = 0$ . Мы упростили задачу, считая слой метаматериала толстым, когда отраженной от дальней границы волной можно пренебречь. Под величинами  $k_{x\pm}$  понимаем соответственно корни УФ (П.5) такие, что  $\text{Im}(\sqrt{B \pm D}) < 0$ . Это означает, что волна  $\exp(-ik_{x\pm}x)$  затухает в сторону положительных  $x$ . Это также означает, что квадрат указанной величины равен  $K_{x\pm}^2 = k_{x\pm}^2 - k_{x\pm}''^2 - 2ik_{x\pm}'k_{x\pm}''$  и имеет мнимую часть, знак которой определяется знаком  $k_{x\pm}'$ . Для прямой вдоль оси  $x$  волны  $k_{x\pm}'k_{x\pm}'' > 0$ , а для обратной волны  $k_{x\pm}'k_{x\pm}'' < 0$ . В вакууме при  $x > 0$  поля имеют вид  $E_y(x) = E_{0y}^+ \exp(-ik_{0x}x)$ ,  $h_z(x) = y_{0h}E_{0y}^+ \exp(-ik_{0x}x)$ ,  $E_z(x) = E_{0z}^+ \exp(-ik_{0x}x)$ ,  $h_y(x) = -y_{0e}E_{0z}^+ \exp(-ik_{0x}x)$ . Здесь  $y_{0e} = k_0/k_{0x} = 1/n_{0x}$ ,  $y_{0h} = k_{0x}/k_0 = n_{0x} = \sqrt{1 - n_z^2}$ . Сшивая поля при  $x = 0$ , получаем ДУ  $(\beta_{zx} - y_{0h}\rho_{hz})(y_{0e}\alpha_{zx} - y_{ez} = 0$ . Оно распадается на два:  $y_{0e} = y_{ez}/\alpha_{zx}$  и  $y_{0h} = \beta_{zx}/\rho_{hz}$ . Для второго имеем  $\sqrt{1 - n_z^2} = -n_x$  или  $n_z^2 = 1 - n_x^2$ . Здесь введены комплексные замедления  $n_{x\pm} = k_{x\pm}/k_0$  и  $n_z = n = k_z/k_0$ . Далее для удобства классификации будем рассматривать волны с бесконечно малой диссипацией. Конечную диссипацию учтем в численных расчетах. Чтобы недиссипативный МП был медленным,  $n_{x\pm}^2$  должна быть отрицательной величиной, а  $k_{x\pm}$  величиной мнимой и большой по модулю. Такая волна — поверхностная. При большом замедлении в отсутствие диссипации  $n = k_z/k_0 \gg 1$ ,  $B \approx -k_z^2(1 + \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx})/2$ ,  $C \approx k_z^4\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}$ . Поэтому  $k_{x\pm}^2 \approx [-k_z^2(1 + \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}) \pm k_z^2(1 - \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx})]/2$ . Взяв верхний знак в значении корня, получим  $k_{x+}^2 \approx k_z^2\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}$ . Если  $\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx} > 0$ , волны внутри слоя имеют зависимости  $\exp(\mp ik_{x\pm}x)$ , а при  $\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx} < 0$  зависимости экспоненциальные  $\exp(\mp k_{zx}x\sqrt{|\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}|})$ . В случае полупространства метаматериала поля в нем убывают от границы в сторону отрицательных  $x$ , т.е. следует оставить только волну  $\exp(k_{zx}x\sqrt{|\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}|})$ . Для большого замедления должно быть  $\tilde{\varepsilon}_{zz} \geq -\tilde{\varepsilon}_{xx}$ . Взяв нижний знак в значении корня, получим  $k_{x-}^2 \approx -k_z^2$ . В этом случае медленная волна также затухает в структуре как  $\exp(k_{zx}x)$ . При численных расчетах следует строго использовать две ветви УФ  $k_{x\pm}^2 = k_0^2 - B \mp D$ . Для первого ДУ имеем  $1/\sqrt{1 - n_z^2} = -\tilde{\varepsilon}_{zz}/n_{x\pm}$ , откуда  $n_z^2 = 1 - (n_{x\pm}/|\tilde{\varepsilon}_{zz}|)^2$ . Для сильно медленной волны величина в скобках

должна быть мнимой и большой по модулю. Мнимой и большой по модулю может быть  $\tilde{\varepsilon}_{zz}$  на очень низких частотах. На частотах плазмоники можно считать  $\tilde{\varepsilon}_{zz} < 0$ . Используя первый приближенный корень, получаем  $n_z^2 \approx 1 - n_z^2/(\tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{xx})$ . Очевидно, должно быть  $(\tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{xx}) \approx -1$ . В отсутствие диссипации имеем  $\varepsilon < 0$  при  $\omega < \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L}$  и  $\varepsilon_{\perp} < 0$  при  $\omega_H < \omega < \sqrt{\omega_H^2 + \omega_p^2/\varepsilon_L}$ . В этом случае  $(\varepsilon - \varepsilon_d)(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_d) > 0$ , и для выполнения условия необходимо

$$\delta \approx \frac{\varepsilon_d^2 + \delta^2(\varepsilon - \varepsilon_d)(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_d) + 1}{(2\varepsilon_d - \varepsilon - \varepsilon_{\perp})\varepsilon_d}.$$

Используя второй приближенный корень, получаем  $n_z^2 \approx 1 + n_z^2/\tilde{\varepsilon}_{zz}^2$ . Этому условию должно соответствовать  $\tilde{\varepsilon}_{zz} \approx 1$  или  $\omega \approx \omega_p\sqrt{\delta}/\sqrt{\varepsilon_d - 1 + \delta(\varepsilon_L - \varepsilon_d)}$ .

Для получения уточненных формул для дисперсии при больших замедлениях следует учесть следующие члены в представлении величин  $B$  и  $C$ . Именно  $B = B_0 + \Delta B$ ,  $C = C_0 + \Delta C$ ,  $B_0 = -k_z^2(1 + \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx})/2$ ,  $C_0 = k_z^4\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}$ ,  $\Delta B = k_0^2(\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{\varepsilon}_{yy}) - (\delta\beta)^2/\tilde{\varepsilon}_{xx})/2$ ,  $\Delta C = k_0^4(2\tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{yy} - (\delta\beta)^2\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}) - k_z^2k_0^2\tilde{\varepsilon}_{zz}(1 - \tilde{\varepsilon}_{yy}/\tilde{\varepsilon}_{xx})$ . Считаем  $k_z \gg k_0$ , а добавки малыми по сравнению с величинами, обозначенными ноликами. Рассмотрим сначала первый приближенный корень  $k_x^2 \approx k_z^2\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}$ . Для второго ДУ должно выполняться  $n_z^2 \approx 1 - n_z^2\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}$ , т.е.  $\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx} \approx -1$ . Считая циклотронную частоту большой  $\omega_H^2 \gg \omega_p^2/(\varepsilon_d(1 - \delta)/\delta + \varepsilon_L)$ , найдем  $\omega^2 \approx \omega_H^2$  либо  $\omega^2 \approx \omega_p^2/[2\varepsilon_d(1 - \delta)/\delta + 2\varepsilon_L]$ . В случае малой циклотронной частоты  $\omega_H^2 \ll \omega_p^2/(\varepsilon_d(1 - \delta)/\delta + \varepsilon_L)$  имеем либо  $\omega^2 \approx \omega_p^2/[\varepsilon_d(1 - \delta)/\delta + \varepsilon_L]$ , либо  $\omega^2 \approx \omega_H^2/2$ . Теперь величины  $k_{x+}^2$  и  $k_{x-}^2$  при учете первого члена разложения по малому параметру можно представить в виде

$$\begin{aligned} k_{x+}^2 &= -k_z^2\tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx} + \Delta B \\ &+ \frac{k_z^2(1 - \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx})}{2} \frac{4B_0\Delta B + 4(\Delta B)^2 - 2\Delta C}{k_z^4(1 - \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx})}, \\ k_{x-}^2 &= -k_z^2 + \Delta B \\ &- \frac{k_z^2(1 - \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx})}{2} \frac{4B_0\Delta B + 4(\Delta B)^2 - 2\Delta C}{k_z^4(1 - \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx})}. \end{aligned}$$

Нас будет интересовать второй случай. Для него, переходя к замедлениям, получаем

$$\begin{aligned} n_x^2 &\approx -n_z^2 \\ &+ \frac{2\tilde{\varepsilon}_{yy} - (\delta\beta)^2[2 + \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx}]/\tilde{\varepsilon}_{xx} + \tilde{\varepsilon}_{zz}(3\tilde{\varepsilon}_{yy} + \tilde{\varepsilon}_{zz})/\tilde{\varepsilon}_{xx}}{2} \\ &- \frac{(\tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{yy})^2 + [(\delta\beta)^2/\tilde{\varepsilon}_{xx} - 2\tilde{\varepsilon}_{yy}](\delta\beta)^2/\tilde{\varepsilon}_{xx}}{2n_z^2}. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в ДУ, имеем

$$n_z^2 \approx \frac{(\tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{yy})^2 + [(\delta\beta)^2/\tilde{\varepsilon}_{xx} - 2\tilde{\varepsilon}_{yy}](\delta\beta)^2/\tilde{\varepsilon}_{xx}}{2\tilde{\varepsilon}_{yy} - (\delta\beta)^2(2 + \tilde{\varepsilon}_{zz}/\tilde{\varepsilon}_{xx})/\tilde{\varepsilon}_{xx} + \tilde{\varepsilon}_{zz}(3\tilde{\varepsilon}_{yy} + \tilde{\varepsilon}_{zz})/\tilde{\varepsilon}_{xx} - 2}. \quad (8)$$

Этот результат верен только для больших замедлений. Если величина  $\delta$  весьма мала, то

$$n_z^2 \approx \frac{\tilde{\varepsilon}_{xx}(\tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{yy})^2}{2\tilde{\varepsilon}_{yy}\tilde{\varepsilon}_{xx} + 3\tilde{\varepsilon}_{yy}\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{zz} - 2\tilde{\varepsilon}_{xx}}.$$

Для большого замедления знаменатель должен быть близок к нулю. Нетрудно найти частоты, на некоторых это выполнено. Для первого ДУ  $n_z^2 = 1 - n_{x\pm}^2/\tilde{\varepsilon}_{zz}^2$  медленный МП будет при  $\tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{xx} < 0$  и  $\tilde{\varepsilon}_{zz} \approx 1$ . Последнее возможно в узкой полосе при  $\omega \approx \omega_p/\sqrt{\varepsilon_L - \varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)/\delta}$ . При  $\varepsilon_d \sim \varepsilon_L \sim 10$  и малом  $\delta \sim 10^{-4}$  эта частота может быть весьма низкой, порядка  $0.3\omega_p \cdot 10^{-2}$ . Подставляя  $\tilde{\varepsilon}_{zz} = 1$  в (8), найдем замедление  $n_z \approx \varepsilon_d/\sqrt{2\varepsilon_d + (3\varepsilon_d)/\tilde{\varepsilon}_{xx}}$ .

### 3. Численные результаты и обсуждение

Заметим, что все результаты также применимы для случая полного заполнения  $\delta = 1$ . Тогда все коэффициенты деполяризации выпадают из соотношений, и получаем ДП полупроводника или металла в магнитном поле (5). Результаты решения ДУ для этого случая приведены в работе [1]. Там же приведены результаты для тонких проводящих металлических или полупроводниковых слоев на подложке. Проблема получения медленного МП связана с получением достаточно высокой ЦЧ и низкой ЧС. Также следует снижать ПЧ. Эта задача решается путем изменения концентрации носителей в полупроводниковых включениях и подбором материала с малой эффективной массой для получения ЦЧ в ТГЧ-диапазоне. При этом индукцию магнитного поля следует брать порядка 1 Тл, что характерно для фокусирующих пучков магнитных систем ЛБВ на основе редкоземельных постоянных магнитов. В случае индукции 1 Тл для InSb имеем  $\omega_H = 13.54$  ТГц. ЧС и концентрацию собственных носителей снижаем, используя криогенные температуры. При этом снижение ПЧ компенсируем легированием. При сильном легировании  $n$ -InSb подобен металлу, и его ПЧ слабо зависит от температуры. При эффективной массе электронов  $0.013m_e$  и при концентрации в легированном образце  $N_e = 10^{24} \text{ м}^{-3}$  получаем ПЧ  $\omega_p = 56.6$  ТГц. Так как проводимость при такой концентрации  $\sigma = 1.76 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ , для ЧС имеем  $\omega_{co} = \omega_p^2\varepsilon_0 = 1.6$  ТГц. Это вполне приемлемые параметры для медленного МП в ТГЧ-диапазоне.

Далее используем метод простой итерации и решаем два ДУ:

$$k_z^2 = k_0^2 - B(k_0^2, k_z^2) \mp D(k_0^2, k_z^2), \quad (9)$$

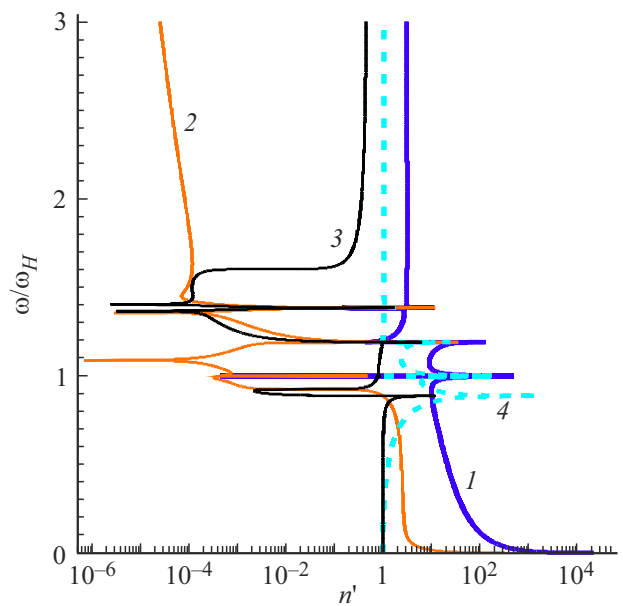
$$k_x^2 = k_0^2 - \frac{B(k_0^2, k_z^2) \mp D(k_0^2, k_z^2)}{\tilde{\varepsilon}_{zz}^2}, \quad (10)$$

а также ДУ (6). Для (9) и (10) возможны четыре ветви. При вычислении  $k_x^2$  следует использовать алгебраические значения входящего в (9) и (10) квадратного корня  $D$ . На рис. 2 представлены результаты для

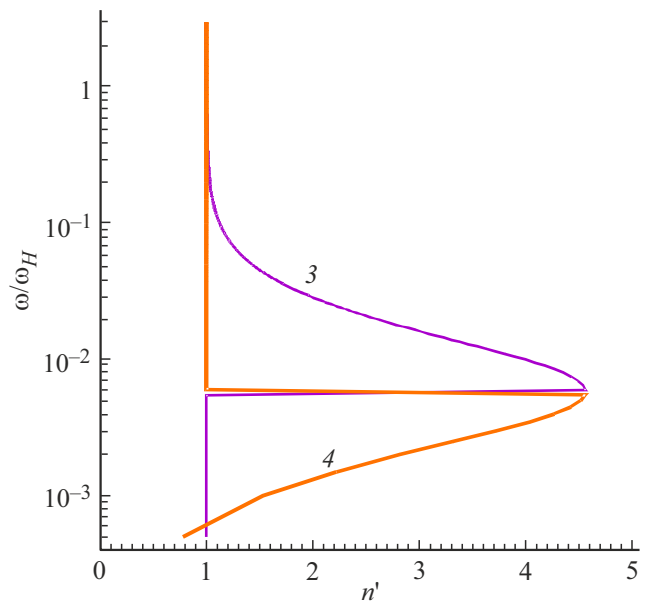
структуры с *n*-InSb, которые сошлись с относительной погрешностью не хуже  $10^{-14}$  за две итерации. Ветви обозначены 1, 2 для (9) и 3, 4 для ДУ (10), при этом  $k_x^2 = B \pm D$ , верхнему знаку соответствует 1 и 3, а нижнему 2 и 4. Кривой 2 при низких частотах соответствует большое замедление и весьма большие потери, так что на низких частотах этот МП возбуждаться и наблюдаться не может. С ростом частоты МП 1 становится весьма быстрым, хотя есть три узкие области, где его замедление большое и резко переходит в малое. Это же относится и к МП 2. Отличие его в том, что на высоких частотах он слабо замедленный, а МП 1 быстрый. МП 3 и 4 на низких частотах имеют замедление порядка 1, в области  $\omega \approx \omega_H$  оно становится большим, а затем резко переходит в весьма малое. Имеются еще две области такого перехода. На высоких частотах МП 3 быстрый, а МП 4 имеет замедление, равное 1. В областях резких переходов от больших к малым замедлениям потери всех МП велики. Однако в ТГц-диапазоне имеются области с замедлениями порядка 10 и с весьма малыми потерями.

Для рис. 2 и 3 в качестве диэлектрика взят CVD (chemical vapor deposition) алмаз. Он обладает большой теплопроводностью и слабой частотной дисперсией, которой пренебрегаем. На рис. 3 представлены результаты в виде ветвей 3 и 4 ДУ (10) для серебра при комнатной температуре. Ветви 1 и 2 имеют огромные замедления и столь высокие потери, что не представляют интереса и на рисунке не представлены. Для ветвей 3 и 4 возможны замедления порядка 4–5, но на частоте порядка 1 ТГц. Кроме того, в этом случае  $n'' \approx n'$ , т.е. потери большие, и использовать такие МП для усиления электронного пучка без компенсации потерь нельзя. Частоте максимального замедления соответствует плазменный резонанс, что увеличивает потери. Для получения медленных слабо диссипативных МП можно использовать тонкие металлические пленки при низких температурах [10]. В этом случае замедление существенно больше, и в области небольших замедлений  $n \sim 4$  при  $n'' \ll n'$ . Ветви демонстрируют изменение знака потерь  $n''$  в ряде областей, что говорит о переходе от прямых МП к обратным. Рассмотрим уравнения для частот таких переходов на примере ДУ (10). Полагая  $n = 1$ , имеем  $B(k_0^2, k_0^2) \pm D(k_0^2, k_0^2) = 0$ . Так как такая волна идет со скоростью света и без потерь, то  $k_{x\pm} = 0$ , т.е. имеем два уравнения  $B(k_0, k_0^2) = 0$  для  $k_{x+} = 0$  и  $C(k_0^2, k_0^2) = 0$  для  $k_{x-} = 0$ . Для быстрой волны  $k_z \approx 0$  и частота определяется из условия  $k_0^2 \varepsilon_{zz}^2 = B(k_0^2, k_0^2) \pm D(k_0^2, k_0^2)$ . Реально диссипация ограничивает большое замедление и увеличивает бесконечно малое, при этом в последнем случае волна сильно вытекает, т.е. имеет большие радиационные потери.

На рис. 4 приведена дисперсия в тонкой однородной пленке *n*-InSb с толщиной  $t = 10$  нм, вычисленная по формуле (6) со знаком плюс при разных уровнях легирования. Увеличение концентрации носителей и плазменной частоты увеличивает частоты максимумов и минимумов  $n'$ . В тонкой полупроводниковой пленке

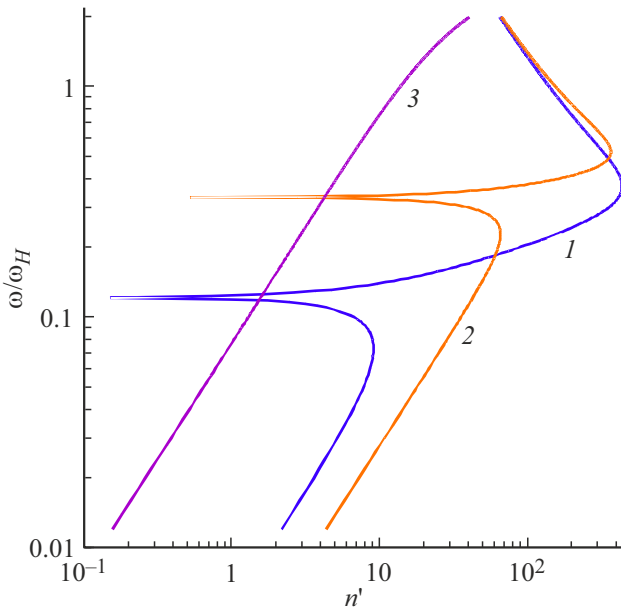


**Рис. 2.** Нормированная дисперсия МП в зависимости от замедления  $n' = k'_z/k'_0$  в структуре, представленной на рис. 1, а, с полупроводником *n*-InSb:  $\varepsilon_L = 17.8$ ,  $\varepsilon_d = 5.6$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\omega_p = 56.6$ ,  $\omega_H = 13.54$ ,  $\omega_{co} = 0.0016$  (ТГц). Кривые 1, 2 соответствуют уравнению (9), кривые 3, 4 — уравнению (10). (Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи).



**Рис. 3.** Нормированная дисперсия МП в зависимости от замедления  $n' = k'_z/k'_0$  в структуре, представленной на рис. 1, а, с серебряными  $\varepsilon_L = 9.3$ ,  $\varepsilon_d = 5.6$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\omega_p = 1.57 \cdot 10^{16}$ ,  $\omega_H = 1.76 \cdot 10^{11}$ ,  $\omega_{co} = 3.56 \cdot 10^{13}$  (Гц). Кривые 3, 4 соответствуют уравнению (10).

возможны замедления более 100, при этом для замедлений порядка 10 потери весьма низкие и это может быть реализовано в диапазоне от 200 ГГц до 1 ТГц при



**Рис. 4.** Дисперсия МП в пленке  $n$ -InSb с  $t = 10$  нм при  $\omega_H = 13.5$ ,  $\omega_{co} = 1$  по формуле (6) при разных ПЧ  $\omega_p$ : 18 (кривая 1), 25 (2), 180 (3). Частоты в ТГц.

толщине  $\sim 10$  нм и более. Отметим, что расположение такой пленки на электрически тонкой подложке из CVD алмаза не сильно изменяет дисперсию, но конструктивно необходимо и решает вопрос с теплоотводом. Тонкую диэлектрическую пленку толщины  $d$  можно описать как поверхностную проводимость  $\sigma(\omega) = i\omega\varepsilon_0 d(\varepsilon_d - 1)$ , и ее приближенный учет сводится к добавлению к компонентам  $\varepsilon_{zz}$  и  $\varepsilon_{yy}$  величины  $-i\sigma(\omega)/\omega\varepsilon_0 = d(\varepsilon_d - 1)$ , т.е. к замене  $\varepsilon_L \rightarrow \varepsilon_L + \varepsilon_d - 1$ .

Рассмотрим решения ДУ на сверхнизких частотах при  $\omega \rightarrow 0$ . Имеем  $\tilde{\varepsilon}_{xx}(0) = \varepsilon_L + \omega_p^2/\omega_H^2 \gg 1$ ,  $\beta^2(0) = \omega_p^4/(\omega_H^2 \omega^2) \gg 1$ , величины  $\tilde{\varepsilon}_{zz}(0) \approx -\omega_p^2/(\omega\omega_c)$ ,  $B(0) = -(k_z^2 \tilde{\varepsilon}_{zz}(0)/\tilde{\varepsilon}_{xx}(0) + \delta^2 k_p^2 \omega_p^2/(\omega_H^2 \tilde{\varepsilon}_{xx}(0)))/2$  и  $C(0) = -k_z^4 (\tilde{\varepsilon}_{zz}(0)/\tilde{\varepsilon}_{xx}(0))$  большие по модулю, причем  $D(0, k_z^2) \approx B(0)(1 - C(0)/(2B^2(0)))$ . Получаем два корня  $k_x^2 \approx 2B(0) - C(0)/(2|B(0)|)$  и  $k_x^2 \approx -C(0)/(2|B(0)|)$ . Если величина  $-C(0)/2|B(0)|$  мала, то для первой ветви получаем  $k_z^2 \approx 2B(0)$  и  $k_z \approx (1 - i)\delta k_p \sqrt{\omega\omega_c}/(\sqrt{2}\omega_H)$ , т.е. это сильно диссипативный МП, быстрый на сверхнизких частотах. При  $\omega\omega_c \sim \omega_H^2$  и большом  $k_p$  его замедление может быть существенным, и тогда оно определяется из уравнения  $k_z^2 + \tilde{\varepsilon}_{xx}\alpha k_z/\tilde{\varepsilon}_{zz} + \tilde{\varepsilon}_{xx}\alpha^2/\tilde{\varepsilon}_{zz} = 0$ , где  $\alpha^2 = \delta^2 k_p^2 \omega_p^2/(\omega_H^2 \tilde{\varepsilon}_{xx}(0))$ . Это уравнение определяет диссипативный МП. Для второй ветви  $k_z^2 \approx k_0^2 + C(0)/(2|B(0)|)$ , и при малой величине  $-C(0)/|B(0)|$  МП быстрый:  $k_z^2 \approx k_0^2$ . Если величина  $-C(0)/|B(0)|$  большая, то  $k_z^2 = -i\delta^2 k_0 k_c \omega_p^2/(2\omega_H^2)$ . Его замедление  $n = (1 - i)\delta\omega_p/(2\omega_p)\sqrt{\omega_c/\omega}$  обратно пропорционально квадратному корню из частоты. Это условие может выполняться при  $\omega \ll \delta^2 \omega_p^2 \omega_c/(4\omega_H^2)$ , при этом МП —

диссипативный. Для третьей и четвертой ветвей в силу большой по модулю величины  $\tilde{\varepsilon}_{zz}^2$  всегда на низких частотах  $k_z \approx k_0$ . На ИК и оптических частотах магнитное поле влияет слабо, и имеет место обычный ПП, с  $n \approx \sqrt{\tilde{\varepsilon}_{zz}/(\tilde{\varepsilon}_{zz} + 1)}$ , возмущенный магнитным полем.

#### 4. Заключение

В работе рассмотрены простейшие искусственные среды из проводящих (полупроводниковых и металлических) элементов или метаатомов и тонкая полупроводниковая пленка в сильном внешнем магнитном поле как волноведущие структуры для МП ТГц- и СВЧ-диапазонов. Такие МП волноводы могут служить как замедляющие системы миллиметрового и ТГц-диапазонов, не требующие выполнения гребенок и иных структур с необходимостью применения технологий типа МЕМС. Также в таких ТГц-волноводах возможно управление дисперсией с помощью магнитного поля. Для снижения потерь перспективно использование спазеров в виде оптически накачанных графеновых листов или активных полупроводниковых структур. Для изготовления структур типа, представленных на рис. 1, а, удобно использовать CVD технологию в сочетании с другими технологиями получения слоистых планарных тонкопленочных структур.

#### Финансирование работы

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (государственное задание FSR-2023-0008).

#### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

#### Приложение

Используем эффективные компоненты ДП, которые имеют вид

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = \varepsilon_d \frac{\varepsilon_d + (L_x + \delta(1 - L_x))(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_d)}{\varepsilon_d + L_x(1 - \delta)(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_d)}$$

$$\approx \varepsilon_d [1 + \delta(\varepsilon_{\perp}/\varepsilon_d - 1)],$$

$$\tilde{\varepsilon}_{yy} = \varepsilon_d \frac{\varepsilon_d + (L_y + \delta(1 - L_y))(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_d)}{\varepsilon_d + L_y(1 - \delta)(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_d)}$$

$$\approx \varepsilon_d + \delta\varepsilon_d(1 - \varepsilon_d/\varepsilon_{\perp}),$$

$$\tilde{\varepsilon}_{zz} = \varepsilon_d + \delta(\varepsilon - \varepsilon_d),$$

$$\tilde{\varepsilon}_{xy}(\omega) = -\tilde{\varepsilon}_{yx}(\omega) = -i\delta\beta. \quad (\text{П.1})$$

Уравнения Максвелла при движении МП вдоль оси  $x$  ( $k_y = 0$ ) принимают вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_{xx} & -i\delta\beta & 0 \\ i\delta\beta & \tilde{\epsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} 0 & k_z & 0 \\ -k_z & 0 & k_x \\ 0 & -k_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix}, \quad (\text{П.2})$$

$$\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{pmatrix} = \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} 0 & -k_z & 0 \\ k_z & 0 & -k_x \\ 0 & -k_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -n_z E_y \\ n_z E_x - n_x E_z \\ n_x E_y \end{pmatrix}. \quad (\text{П.3})$$

Здесь и далее  $n_x = k_x/k_0$ ,  $n_z = k_z/k_0$ . Для удобства введено нормированное магнитное поле  $\mathbf{h} = \eta_0 \mathbf{H}$  с размерностью электрического поля В/м,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  — волновой импеданс вакуума. Далее везде опущен общий множитель  $\exp(i\omega t - ik_z z)$ . Подставляя (П.3) в (П.2), получаем уравнения

$$\begin{pmatrix} k_0^2 \tilde{\epsilon}_{xx} - k_z^2 & -i\delta\beta k_0^2 & -k_x k_z \\ i\delta\beta k_0^2 & k_0^2 \tilde{\epsilon}_{yy} - k_x^2 - k_z^2 & 0 \\ -k_x k_z & 0 & k_0^2 \tilde{\epsilon}_{zz} - k_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{П.4})$$

Равенство нулю определителя в (П.4) приводит к дисперсионному уравнению Френеля (УФ):

$$(k_0^2 \tilde{\epsilon}_{xx} \tilde{\epsilon}_{zz} - k_z^2 \tilde{\epsilon}_{zz} - k_x^2 \tilde{\epsilon}_{xx})(k_0^2 \tilde{\epsilon}_{yy} - k_x^2 - k_z^2) - (\delta\beta)^2 k_0^2 (k_0^2 \tilde{\epsilon}_{zz} - k_x^2) = 0. \quad (\text{П.5})$$

Из него находим  $k_{x\pm}^2 = B \pm D$ ,  $D = \sqrt{B^2 - C}$ . Здесь

$$B = (k_0^2 \tilde{\epsilon}_{zz} + k_0^2 \tilde{\epsilon}_{yy} - k_z^2 - k_z^2 \tilde{\epsilon}_{zz} / \tilde{\epsilon}_{xx} - (\delta\beta)^2 k_0^2 / \tilde{\epsilon}_{xx}) / 2, \quad (\text{П.6})$$

$$C = (k_0^2 \tilde{\epsilon}_{zz} - k_z^2 \tilde{\epsilon}_{zz} / \tilde{\epsilon}_{xx})(k_0^2 \tilde{\epsilon}_{yy} - k_x^2) - (\delta\beta)^2 k_0^4 \tilde{\epsilon}_{zz} / \tilde{\epsilon}_{xx}. \quad (\text{П.7})$$

Обращая в (П.3) матрицу, найдем связи  $E_y = [\tilde{\epsilon}_{xx}(n_x h_z - n_z h_x) - i\delta\beta n_z h_y] / \epsilon_\tau^2$ ,  $E_z = -n_x h_y / \tilde{\epsilon}_{zz}$ ,  $h_y = n_z E_x - n_x E_z = n_z \tilde{\epsilon}_{zz} E_x / (\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2)$ ,  $h_z = n_x E_y$ ,  $h_x = -n_z E_y$ , где обозначено  $\epsilon_\tau^2 = \tilde{\epsilon}_{xx} \tilde{\epsilon}_{yy} - (\delta\beta)^2$ . Подставляя магнитные компоненты в электрические компоненты и наоборот, получим касательные компоненты

$$E_y = \alpha_{yx} E_x - \rho_{hz} h_x = -n_z \frac{\tilde{\epsilon}_{xx}(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2) h_x + i b n_z \tilde{\epsilon}_{zz} E_x}{(\epsilon_\tau^2 - \tilde{\epsilon}_{xx} n_x^2)(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2)}, \quad (\text{П.8})$$

$$E_z = \alpha_{zx} E_x = \frac{n_x n_z}{n_x^2 - \tilde{\epsilon}_{zz}} E_x, \quad (\text{П.9})$$

$$h_y = y_{ez} E_x = \frac{n_z \tilde{\epsilon}_{zz}}{\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2} E_x, \quad (\text{П.10})$$

$$h_z = \beta_{zx} h_x - y_{hy} E_x = -n_x n_z \frac{\tilde{\epsilon}_{xx}(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2) h_x + i b n_z \tilde{\epsilon}_{zz} E_x}{(\epsilon_\tau^2 - \tilde{\epsilon}_{xx} n_x^2)(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2)}. \quad (\text{П.11})$$

Здесь обозначены следующие коэффициенты:

$$\alpha_{yx} = -n_z \frac{i b n_z \tilde{\epsilon}_{zz}}{(\epsilon_\tau^2 - \tilde{\epsilon}_{xx} n_x^2)(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2)},$$

$$\rho_{hz} = n_z \frac{\tilde{\epsilon}_{xx}(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2)}{(\epsilon_\tau^2 - \tilde{\epsilon}_{xx} n_x^2)(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2)},$$

$$\beta_{zx} = -n_x n_z \frac{\tilde{\epsilon}_{xx}(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2)}{(\epsilon_\tau^2 - \tilde{\epsilon}_{xx} n_x^2)(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2)},$$

$$y_{hy} = n_x n_z \frac{i b n_z \tilde{\epsilon}_{zz}}{(\epsilon_\tau^2 - \tilde{\epsilon}_{xx} n_x^2)(\tilde{\epsilon}_{zz} - n_x^2)}. \quad (\text{П.12})$$

Нормальные компоненты полей в метаматериале (при  $x < 0$ ) можно представить в виде  $E_x(x) = E_1^+ \exp(ik_{x+}x) + E_1^- \exp(ik_{x-}x)$ ,  $h_x(x) = h_1^+ \exp(-ik_{x+}x) - h_1^- \exp(ik_{x-}x)$ , т.е. как совокупность двух решений  $k_{x+}$  и  $k_{x-}$  УФ, затухающих вглубь структуры. Используя (П.8)–(П.11), находим касательные компоненты. В случае конечного слоя следует учесть волны обоих направления вдоль  $x$ . Для такого однородного слоя имеется два ДУ (6), (7).

## Список литературы

- [1] М.В. Давидович. Квант. электрон., **47** (6), 567 (2017). DOI: 10.1070/QEL16272
- [2] М.В. Давидович. Опт. и спектр., **130** (10), 1520 (2022). DOI: 10.21883/EOS.2022.10.54863.3231-22
- [3] F.K. Schulte. Surf. Sci., **55**, 427 (1976). DOI: 10.1016/0039-6028(76)90250-8
- [4] A.E. Meyerovich, A. Stepaniants. Phys. Rev. B, **58** (19), 13242 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevB.58.13242
- [5] J. Brion, R. Wallis, A. Hartstein, E. Burstein. Phys. Rev. Lett., **28**, 145 (1972). DOI: 10.1103/PhysRevLett.28.1455
- [6] P. Kumar, V.K. Tripathi. J. Appl. Phys., **114**, 053101 (2013). DOI: 10.1063/1.4817091
- [7] R.K. Srivastav, A. Panwar. Optical Quant. Electron., **55**, 111 (2023). DOI: 10.1007/s11082-022-04299-y
- [8] P. Kumar, M. Kumar, V. Tripathi. Optics Lett., **41**, 1408 (2016). DOI: 10.1364/OL.41.001408
- [9] R.K. Srivastav, A. Panwar. Optik, **264**, 169363 (2022). DOI: 10.1016/j.ijleo.2022.169363
- [10] М.В. Давидович. Письма ЖЭТФ, **119** (3), 187 (2024). DOI: 10.31857/S1234567824030066
- [11] И.А. Кузнецова, О.В. Савенко, П.А. Кузнецов. ФТП, **54** (9), 846 (2020). DOI: 10.21883/FTP.2020.09.49819.11 [I.A. Kuznetsova, O.V. Savenko, P.A. Kuznetsov. Semiconductors, **54**, 1039 (2020). DOI: 10.1134/S106378262009016X]
- [12] А.А. Булгаков, И.В. Федорин. ЖТФ, **81** (4), 81 (2011). [A.A. Bulgakov, I.V. Fedorin. Techn. Phys., **56** (4), 510 (2011). DOI: 10.1134/S1063784211040098]
- [13] И.А. Колмычек, И.В. Малышева, В.Б. Новиков, А.И. Майдыковский, А.П. Леонтьев, К.С. Напольский, Т.В. Мурзина. Письма ЖЭТФ, **114** (11), 727 (2021). [I.A. Kolmychek, I.V. Malysheva, V.B. Novikov, A.I. Maydykovskiy, A.P. Leontiev, K.S. Napolskii, T.V. Murzina. JETP Letters, **114** (11), 653 (2021). DOI: 10.1134/S0021364021230089]
- [14] М.В. Давидович. Компьютерная оптика, **45** (1), 48 (2021). [M.V. Davidovich. Computer Optics, **45** (1), 48 (2021). DOI: 10.18287/2412-6179-CO-673]
- [15] М.В. Давидович. Письма ЖТФ, **49** (1), 9 (2023). [M.V. Davidovich. Techn. Phys. Lett., **49** (1), 7–11. DOI: 10.21883/TPL.2023.01.55337.19196]



- [16] P.A. Belov, R. Marqués, S.I. Maslovski, I.S. Nefedov, M. Silveirinha, C.R. Simovski, S.A. Tretyakov. *Phys. Rev. B*, **67**, 113103 (2003). DOI: 10.1103/PhysRevB.67.113103
- [17] P.A. Belov, C.R. Simovski, S.A. Tretyakov. *Phys. Rev. E*, **66**, 036610 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevE.66.036610
- [18] S.A. Tretyakov, S. Maslovski, P.A. Belov. *IEEE Trans. AP*, **51** (10), 2652 (2003). DOI: 10.1109/TAP.2003.817557
- [19] C.R. Simovski, P.A. Belov. *Phys. Rev. E*, **70**, 046616 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevE.70.046616
- [20] P.A. Belov, C.R. Simovski. *Phys. Rev. E*, **72**, 026615 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevE.72.026615
- [21] P.A. Belov, C.R. Simovski, P. Ikonen. *Phys. Rev. B*, **71**, 193105 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevB.71.193105
- [22] P.A. Belov, Y. Hao, S. Sudhakaran. *Phys. Rev. B*, **73**, 033108 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevB.73.033108
- [23] P. Ikonen, P. Belov, C. Simovski, S. Maslovski. *Phys. Rev. B*, **73**, 073102 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevB.73.073102
- [24] P.A. Belov, M.G. Silveirinha. *Phys. Rev. E*, **73**, 056607 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056607
- [25] A. Alú, M.G. Silveirinha, A. Salandrino, N. Engheta. *Phys. Rev. B*, **75**, 155410 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevB.75.155410
- [26] С.М. Рытов. *ЖЭТФ*, **29** (5), 605 (1955). [S.M. Rytov. *Sov. Phys. JETP*, **2** (3) 466 (1956)].
- [27] M.A. Ordal, L.L. Long, R.J. Bell, S.E. Bell, R.R. Bell, R.W. Alexander, Jr., C.A. Ward. *Appl. Optics*, **22** (7), 1099 (1983). DOI: 10.1364/ao.22.001099
- [28] И.И. Берченко, М.В. Пашковский. *УФН*, **119** (2), 223 (1976). [Phys. Usp., **19** (6), 462 (1976). DOI: 10.1070/PU1976v019n06ABEH005265]

*Редактор А.Н. Смирнов*

## **Toward electrodynamics of semiconductor magnetoplasmic waveguides**

National Research Saratov State University  
named after N.G. Chernyshevsky,  
410012 Saratov, Russia

*M.V. Davidovich*

**Abstract** The dispersion of magnetoplasmons propagating along the surface of a metamaterial with periodic conductive metallic or semiconductor inclusions under the application of a strong external magnetic field along the propagation direction is considered. The tensor of the effective dielectric constant of a metamaterial in the presence of a field is found on the basis of the effective medium method. It is shown that in the THz range there are delayed magnetoplasmons with low losses, i.e. such a structure with a flat surface behaves like a decelerating system, and can be used in an TWT with magnetic induction of the order of 1 T, which is necessary for focusing a ribbon electron beam. Volume integral equations are given for rigorous analysis.