

05

Аналитическая модель лазерного гауссова среднестатистического пучка со случайными однородными и изотропными фазовыми искажениями поля

© В.И. Кислов, Е.Н. Офицеров

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
199911 Москва, Россия

e-mail: kislov-viktor@mail.ru, oeugeny@mail.ru

Поступила в редакцию 20.05.2024 г.

В окончательной редакции 20.05.2024 г.

Принята к публикации 17.06.2024 г.

В приближении Френеля разработана аналитическая модель лазерного гауссова пучка со случайными фазовыми искажениями поля. В работе принято, что случайные фазовые искажения поля распределены по нормальному закону, статистически однородны и изотропны. Распространяющийся пучок представлен суммой двух компонент: дифракционно-ограниченной и частично когерентной (рассеянной на фазовых неоднородностях). В свою очередь частично когерентная составляющая представлена суммой статистически независимых субпучков, каждый из которых имеет нулевое среднестатистическое поле. Распределение субпучков по мощности излучения связано с дисперсией фазовых искажений. Исследование пространственной структуры субпучков выполнено методами теории пространственных моментов. Получены и исследованы аналитические соотношения, которые равномерно аппроксимируют функцию распределения среднестатистического потока излучения в зависимости от размеров приемника и расстояния до плоскости наблюдения без ограничений на амплитуду и масштаб случайных фазовых искажений поля. Результаты исследований могут использоваться при разработке и оптимизации лазерных приемно-передающих оптических систем, в методиках измерения параметров и качества лазерных пучков.

Ключевые слова: лазерный гауссов пучок, случайные фазовые искажения поля, поток излучения, частично-когерентная компонента, осевая интенсивность, ширина пучка.

DOI: 10.61011/OS.2024.06.58643.6716-24

1. Введение

Пространственно-энергетические характеристики лазерного пучка существенно зависят от фазовых искажений (ФИ) поля [1]. Источники ФИ — неоднородности активной среды внутри лазерного резонатора [2,3], неточности изготовления и шероховатости [4] зеркал оптической системы формирования, неоднородности среды распространения лазерного пучка [5] и др. В связи с этим теоретический и практический интерес при разработке приемно-передающих лазерных систем связан с исследованиями внутрилазерных деформаций выходного излучения [2,3,6,7], особенностей фазовой структуры поля [6,7], пространственно-энергетической структуры распространяющегося лазерного пучка [6–12]. Обзор основных аналитических методов исследования лазерно-оптических систем с учетом детерминированных аберрационных и дифракционных деформаций (ФИ) лазерного пучка представлен в работах [6,10,11]. Отметим, что по причине недостаточной изученности и сложности описания источников ФИ поля учет их влияния часто выполняют, используя статистические модели. При этом статистический подход к описанию ФИ поля позволяет провести детальный анализ основных характеристик

сформированного излучения с учетом всех особенностей приемно-передающих оптических систем [7–9].

Однако аналитические исследования пучков со случайными ФИ ограничиваются, как правило [8,9], предельным случаем малых по амплитуде измерения ФИ. Цель настоящей работы — разработка аналитической модели и аналитические исследования среднестатистической пространственно-энергетической структуры распространяющегося лазерного пучка без ограничений на амплитуду и масштаб изменения случайных ФИ поля. При построении модели использовалось представление лазерного пучка в виде суммы двух статистически независимых компонент — дифракционно-ограниченной и частично когерентной (рассеянной на фазовых неоднородностях) составляющих с нулевым среднестатистическим значением. В дифракционном приближении с применением методов теории пространственных моментов [11,12] (для распределения интенсивности распространяющегося лазерного излучения) получены и исследованы аналитические соотношения, которые равномерно аппроксимируют функцию распределения среднестатистического потока излучения в зависимости от размеров приемника и расстояния до плоскости наблюдения.

2. Исходные соотношения

Распределения поля $U_0(\rho)$, интенсивности излучения $I_0(\rho)$ и потока мощности $W_0(\rho)$ для гауссова пучка в отсутствие ФИ представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_0(\rho) &= \sqrt{\frac{4}{\pi}} \exp(-2\rho^2), \\ I_0(\rho) &= \left(\frac{4}{\pi}\right) \exp(-4\rho^2), \\ W_0(\rho) &= 1 - \exp(-4\rho^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь вектор $\rho = \mathbf{r}/a$, \mathbf{r} — радиус-вектор точки в плоскости выходной апертуры, a — радиус пучка. Далее характеристики распространяющегося пучка рассматриваются в цилиндрической системе координат. Ось Z этой системы совпадает с оптической осью, а вектор $\rho = (x, y)$ — радиальный вектор, $\rho = |\rho|$.

С учетом ФИ поля, сосредоточенных в плоскости выходной апертуры оптической системы, ядро интеграла распространения в приближении Френеля [1] имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} H(\rho_1, \rho) &= (-iN_z) \\ &\times \exp \left\{ i\pi \left[\left(\frac{2z}{\lambda} \right) + N_z(\rho_1 - \rho)^2 - N_f \rho_1^2 \right] \right\} \exp(i\varphi(\rho_1)). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $N_z = a^2/(\lambda z)$ и $N_f = a^2/(\lambda f)$ — числа Френеля, λ — длина волны излучения, z — расстояние до плоскости наблюдения, f — фокусное расстояние; $\varphi(\rho_1)$ — функция ФИ поля. В выражении (2) вектор ρ_1 находится в плоскости выходной апертуры, вектор ρ — в плоскости наблюдения.

Функция фазовых искажений поля $\varphi(\rho) = 2\pi L(\rho)/\lambda$, $L(\rho)$ — соответствующая геометрическая волновая поверхность [1]. Статистические характеристики функции $\varphi(\rho)$ примем в следующем виде: среднестатистическое значение ФИ равно нулю, $\overline{\varphi(\rho)} = 0$; символ $\overline{(\dots)}$ здесь и далее обозначает операцию статистического усреднения; дисперсия $\sigma^2 = \overline{\varphi^2(\rho)}$ однородна; коэффициент корреляции изотропен и равен $K(\rho) = \exp(-\rho^2/c^2)$, величина $c = C_\varphi/a$ — нормированный радиус корреляции, C_φ — радиус корреляции. При этом функция корреляции поля

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho_1, \rho_2) &= \overline{\exp\{i[\varphi(\rho_1) - \varphi(\rho_2)]\}} \\ &= \exp\{-\sigma^2[1 - K(\rho_1 - \rho_2)]\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\rho_{1,2}$ — точки в плоскости выходной апертуры $z = 0$.

Найдем функцию распределения интенсивности $\overline{I(\rho)}$ в плоскости z . С этой целью в выражение для среднестатистической интенсивности [1] подставим функцию корреляции (3) в форме ряда Тейлора по величине $\sigma^2 K(\rho)$. С учетом (1) и (3) для $\overline{I(\rho)}$ несложно получить

$$\overline{I(\rho)} = \exp(-\sigma^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n} I(\rho/\eta_n)}{n! \eta_n^2},$$

$$\eta_n = \sqrt{1 + \frac{n}{c_z^2}}, \quad (4)$$

где

$$I(\rho) = \left(\frac{4}{\pi\rho_z^2}\right) \exp\left[-4\left(\frac{\rho}{\rho_z}\right)^2\right] \quad (5)$$

— распределение интенсивности в плоскости z в отсутствие ФИ;

$$\rho_z = s_z \left(\frac{2}{\pi N_z}\right), \quad s_z = \sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2}(N_z - N_f)\right]^2}, \quad (6)$$

ρ_z — радиус пучка в отсутствие ФИ; $c_z = cs_z$ — эффективный радиус корреляции в плоскости z ; величина c_z минимальна в фокусе, $c_f = c$. Соотношения (3)–(5) предполагают, что полная мощность гауссова пучка равна единице и не зависит от расстояния z до плоскости наблюдения.

Осевая интенсивность $\overline{I(0)}$ и число Штреля [1] St для сформированного в плоскости z пучка равны

$$\overline{I(0)} = St \left(\frac{4}{\pi\rho_z^2}\right), \quad St = {}_1F_1(1; 1 + c_z^2; -\sigma^2), \quad (7)$$

где ${}_1F_1(\dots)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [13]. При $\sigma^2 \ll 1$ величина $St \approx \exp[-\sigma^2/(1 + c_z^2)]$.

Из формулы (4) получаем выражение для среднестатистического потока излучения через круглую приемную площадку радиуса ρ :

$$\overline{W(\rho)} = \exp(-\sigma^2) \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma^{2n}/n!) W(\rho/\eta_n). \quad (8)$$

Здесь $W(\rho) = 1 - \exp[-(4\rho/\rho_z)^2]$ — поток излучения в отсутствие ФИ поля. При $\sigma^2 \ll 1$ величина

$$\overline{W(\rho)} \approx W(\rho) - \sigma^2 \left[W(\rho) - W\left(\rho/\sqrt{1 + 1/c_z^2}\right) \right].$$

Соотношения (4), (8), представляющие среднестатистические распределения интенсивности и поток излучения в виде функциональных рядов, являются исходными для дальнейшего анализа.

3. Пространственные моменты и ширина пучка

Рассмотрим характеристики гауссовых пучков со случайными ФИ поля, используя методы теории пространственных моментов [11,12] для функции распределения интенсивности в поперечном сечении пучка. Эта теория позволяет определить основные пространственно-энергетические характеристики распространяющегося лазерного пучка: его ширину и положение перетяжки, угол энергетической расходимости.

Введем в исследование относительный пространственный момент порядка n :

$$m_n = \frac{\int \overline{I(\rho)} (x^n + y^n) d^2\rho}{\int I(\rho) (x^n + y^n) d^2\rho}, \quad n = 2, 4, \dots \quad (9)$$

Для моментов m_2 и m_4 с учетом (4), (5) получаем алгебраические выражения

$$m_2 = 1 + \frac{\sigma^2}{c^2},$$

$$m_4 = m_2^2 + \frac{\sigma^2}{c^2}. \quad (10)$$

Рассматривая (10) как систему уравнений, для расчета характеристик случайных ФИ поля находим

$$\sigma^2 = (m_2 - 1)^2 / (m_4 - m_2^2),$$

$$c = (1/s_z) \sqrt{(m_2 - 1) / (m_4 - m_2^2)}.$$

Таким образом, использование пространственного момента четвертого порядка совместно со стандартным моментом второго порядка (показатель качества M^2) позволяет, в частности, по результатам эксперимента найти дисперсию и радиус корреляции случайных ФИ поля.

Соотношения (9), (11) далее исследованы и учтены при решении задачи аналитической аппроксимации функциональных рядов (4), (8) для функций среднестатистических распределений интенсивности и потока излучения.

3.1. Ширина пучка в статистической модели

В теории пространственных моментов основными характеристиками пучка являются его диаметр $2A_z$ (ширина) в плоскости z и расстояние $z = z_b$ до плоскости перетяжки. В зависимости от ФИ величина A_z пропорциональна коэффициенту распространения M_z^2 (M_z^2 — показатель качества). При этом радиус пучка равен

$$A_z = M_z^2 a_z, \quad a_z = \rho_z a, \quad (11)$$

где a_z — радиус пучка в отсутствие ФИ. В плоскости z в пределах области радиусом A_z распространяется более ~ 90% от полной мощности пучка, $\overline{W(A_z/a)} > 0.9$.

В рамках статистического подхода с учетом (5), (9) и (11) относительный радиус пучка равен

$$\frac{A_z}{a} = \left(\frac{2}{\pi N_{ez}} \right) \sqrt{1 + \left[\frac{\pi}{2} \cdot (N_{ez} - N_{ef}) \right]^2}. \quad (12)$$

Здесь $N_{ez} = N_z / M_f^2$, $N_{ef} = N_f / M_f^2$ — эффективные числа Френеля, $M_f^2 = \sqrt{1 + \sigma^2 / c^2}$. Таким образом, в теории пространственных моментов среднестатистический пучок со случайными ФИ эквивалентен пучку в отсутствие ФИ при уменьшенном в M_f^2 числе Френеля.

Радиус пучка минимален в плоскости перетяжки $z = z_b$. Из (12) находим

$$\min A_z = \frac{a}{\sqrt{1 + (\pi N_{ef} / 2)^2}}, \quad z_b = \frac{f}{1 + [2 / (\pi N_{ef})]^2}. \quad (13)$$

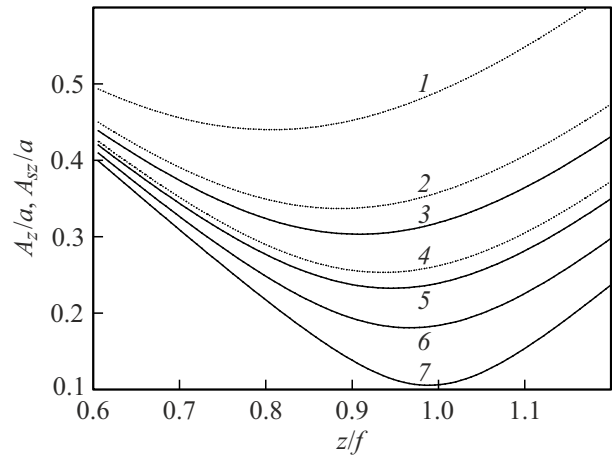


Рис. 1. Ширина пучка A_z/a (графики 3, 5 и 6) и ширина частично когерентной составляющей A_{sz}/a (графики 1, 2 и 4) в зависимости от z/f при $N_f = 6$, $\sigma^2 = 0.5$. Графики 1 и 3 — при $c = 0.25$; графики 2 и 5 — при $c = 0.35$; 4 и 6 при $c = 0.5$. График 7 — для дифракционно-ограниченного пучка.

Из соотношений (13) и общих представлений о свойствах лазерных пучков с ФИ поля понятно, что с ростом ФИ пучка перетяжка перемещается ближе к плоскости выходной апертуры, а диаметр перетяжки и расстояние между фокусом и перетяжкой,

$$f - z_b = f \sqrt{1 + (\pi N_{ef} / 2)^2},$$

возрастают с ростом σ^2 / c^2 . На расстоянии $z = 2z_b$ ширина пучка равна ширине исходного пучка (определенного в плоскости выходной апертуры).

Здесь отметим следующее. В выражение (12) для фактора качества M_f^2 входит величина σ^2 / c^2 . По физическому смыслу она пропорциональна среднестатистическому квадрату угловых наклонов волнового фронта [14]:

$$\sigma^2 / c^2 = \frac{\langle [\text{grad} \varphi(\rho)]^2 \rangle}{4} = \sigma^2 [-dK(\rho) / d\rho^2]_{\rho=0},$$

где угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по площади выходной апертуры. При этом величина $\sigma^2 / c^4 \sim (m_4 - m_2^2)$ обратно пропорциональна среднестатистическому квадрату радиуса кривизны поля в плоскости выходной апертуры. Соответственно использование в представленной модели пространственного момента m_4 более последовательно учитывает не только ширину пучка, но и возможные отклонения радиуса его кривизны от номинального значения.

3.2. Среднестатистический пучок как сумма когерентного и частично когерентного пучков

С учетом ФИ поле в плоскости выходной апертуры представим в виде суммы

$$U_0(\rho) \exp(i\varphi(\rho)) = U_0(\rho) \exp(-\sigma^2 / 2) + U_s(\rho),$$

$$U_s(\rho) = U_0(\rho)[\exp(i\varphi(\rho)) - \exp(-\sigma^2/2)].$$

Здесь $U_s(\rho)$ — случайное поле с нулевым среднестатистическим значением. Таким образом, среднестатистическое распределение интенсивности в плоскости z с учетом (4) описывается следующим соотношением:

$$\overline{I(\rho)} = \exp(-\sigma^2)I(\rho) + [1 - \exp(-\sigma^2)] \cdot \overline{I_s(\rho)}. \quad (14)$$

В выражении (14) функция $I(\rho)$ — распределение (5) в отсутствие ФИ,

$$\overline{I_s(\rho)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^{2n} I(\rho/\eta_n)}{n\eta_n^2 [\exp(\sigma^2) - 1]} \quad (15)$$

— распределение интенсивности в частично когерентной составляющей пучка. При этом в (14) множители $\exp(-\sigma^2)$ и $[1 - \exp(-\sigma^2)]$ — мощности когерентной и рассеянной составляющих.

Мощность частично когерентной составляющей растет с ростом дисперсии и равна мощности когерентной компоненты при $\sigma^2 \approx 0.7$. Когда $\sigma^2 > 0.7$, пространственно-энергетическая структура пучка начинает определяться рассеянной составляющей пучка.

Исходя из (14), (15) для M_z^2 -фактора находим

$$M_z^2 = \sqrt{\exp(-\sigma^2) + [1 - \exp(-\sigma^2)]M_{sz}^4},$$

при этом величина M_{sz}^2 определяет ширину рассеянной компоненты пучка,

$$M_{sz}^2 = \sqrt{1 + \frac{M_z^4 - 1}{1 - \exp(-\sigma^2)}}. \quad (16)$$

Таким образом, в теории пространственных моментов ширина рассеянной компоненты пучка рассчитывается по формуле (13) с учетом подстановки $N_{ez} = N_z/M_{sz}^2$, $N_{ef} = N_f/M_{sf}^2$ при

$$M_{sf}^2 = \sqrt{1 + (\sigma^2/c^2)/[1 - \exp(-\sigma^2)]}.$$

Минимумы ширины пучка для дифракционно-ограниченной и квазикогерентной составляющих достигаются на различающихся расстояниях z_{db} и z_{sb} :

$$z_{db} = \frac{f}{1 + [2/(\pi N_f)]^2},$$

$$z_{sb} = \frac{f}{1 + [2M_{sf}^2/(\pi N_f)]^2}. \quad (17)$$

Соответственно пучок со случайными ФИ может рассматриваться как сумма когерентной и частично когерентной составляющих с различающимися радиусами кривизны волнового фронта.

На рис. 1 представлены типичные результаты расчета ширины пучка A_z/a и ширины рассеянной компоненты пучка A_{sz}/a в зависимости от z/f .

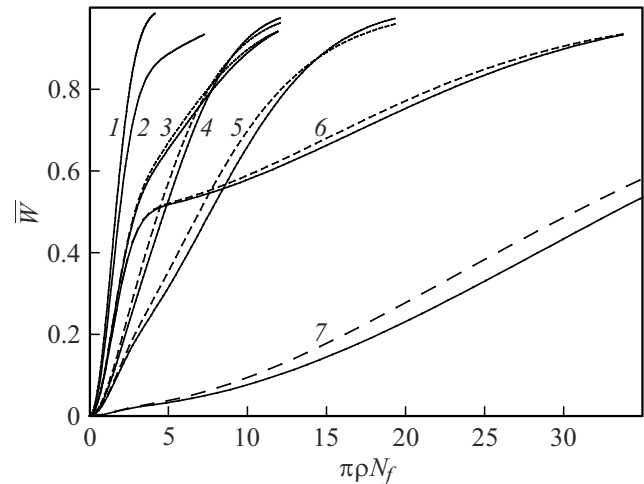


Рис. 2. Поток излучения $\overline{W(\rho)}$ в фокусе оптической системы в двухкомпонентном приближении. График 1 — для дифракционно-ограниченного пучка; 2 — при $\sigma^2 = 0.2$, $c = 0.3$; 3 — $\sigma^2 = 0.7$, $c = 0.3$; 4 — $\sigma^2 = 0.7$, $c = 0.1$; 5 — $\sigma^2 = 2$, $c = 0.5$; 6 — $\sigma^2 = 2$, $c = 0.3$; 7 — $\sigma^2 = 4$, $c = 0.1$. Сплошная линия — приближенный расчет, штриховая, находящаяся рядом со сплошной, — точный расчет.

Положения перетяжек для дифракционно-ограниченной компоненты z_{db} , рассеянной компоненты z_{sb} и пучка в целом z_b удовлетворяют неравенству $z_{sb} < z_b < z_{db} < f$. С ростом ФИ плоскости z_b и z_{sb} приближаются к плоскости выходной апертуры.

Представленный результат дает возможность более детального учета хода лучей в лазерных передаточных оптических системах и выполнить более точную оптимизацию ее конструктивных параметров.

4. Аналитические соотношения для функций $\overline{I(\rho)}$, $\overline{W(\rho)}$ и результаты вычислительного эксперимента

Получим приближенные аналитические соотношения, которые аппроксимируют функциональные ряды (4), (8) для среднестатистических интенсивности и потока излучения при заданных дисперсии σ^2 и радиусе корреляции c ФИ поля (или при известных пространственных моментах m_2 и m_4).

4.1. Двухкомпонентная модель пучка

В двухкомпонентной модели частично когерентная составляющая пучка аппроксимируется гауссовым пучком, ширина которого больше ширины дифракционно ограниченной компоненты. С учетом результатов работы [15] и выражения (16) для относительной ширины рассеянной компоненты пучка имеем

$$\overline{I(\rho)} \approx DI(\rho) + \frac{1-D}{\mu^2} I\left(\frac{\rho}{\mu}\right),$$

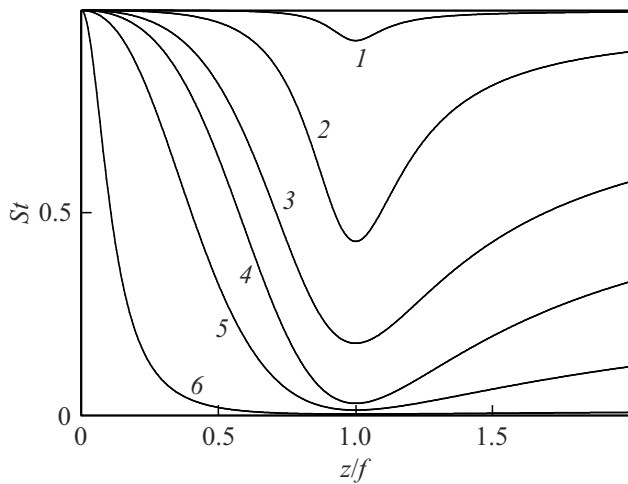


Рис. 3. Зависимость числа Штреля St от относительного расстояния z/f при нескольких значениях дисперсии σ^2 и радиуса корреляции c , $N_f = 6$. Графики 1–6 соответствуют $(\sigma^2, c) = (0.4, 2), (1.4, 0.7), (2, 0.3), (5, 0.3), (5, 0.15), (6, 0.03)$.

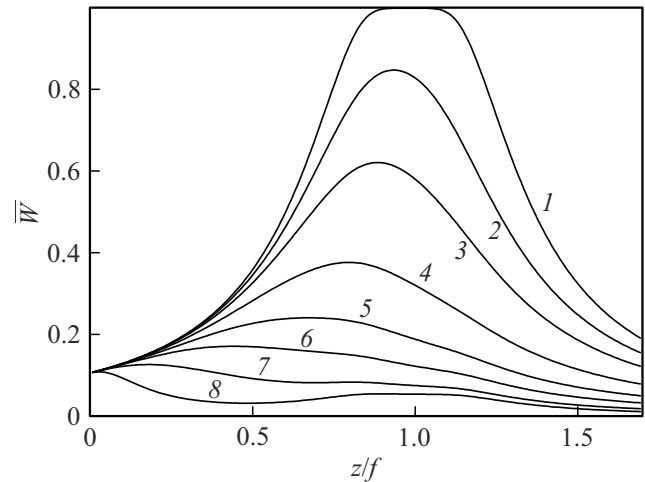


Рис. 5. Зависимость от величины z/f потока излучения на приемнике радиуса $\rho = 1/N_f$ для пучка с числом Френеля $N_f = 6$. Графики 2–8 соответствуют радиусам корреляции $c = 0.8, 0.5, 0.3, 0.2, 0.14, 0.08, 0.03$ при $\sigma^2 = 3$. График 1 — для дифракционно-ограниченного пучка.

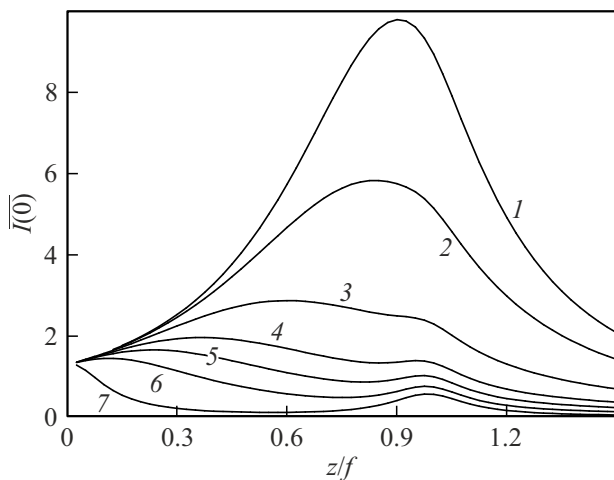


Рис. 4. Зависимость осевой интенсивности $\overline{I(0)}$ от величины z/f для пучка с числом Френеля $N_f = 6$ при $\sigma^2 = 5$. Графики 1–7 соответствуют радиусам корреляции $c = 0.7, 0.5, 0.3, 0.2, 0.15, 0.1, 0.03$.

$$\overline{W(\rho)} \approx DW(\rho) + (1 - D)W\left(\frac{\rho}{\mu}\right), \quad \mu = M_{sz}^2, \quad (18)$$

где $D = \exp(-\sigma^2)$. О точности аппроксимации (18) потока излучения (8) дает представление рис. 2.

Относительная погрешность аналитического расчета потока излучения $\overline{W(\rho)}$ достигает 20%, абсолютная погрешность меньше 0.07–0.1.

В обсуждаемой статистической модели лазерного пучка амплитуда поля, формируемого в заданной точке пространства, равна сумме регулярной составляющей и случайной, среднестатистическое значение которой равно нулю. Если амплитуда флуктуаций случайного поля достаточно велика, то в пучке могут формироваться каустические образования с экстремально большой и

нулевой интенсивностью излучения. Определим параметры случайных ФИ, при которых околоосевое распределение интенсивности не содержит точек с нулевыми значениями. Отметим, что рассматриваемое условие является достаточным для отсутствия в пучке фазовых винтовых дислокаций [6,7]. В рамках рассматриваемой модели лазерного пучка дислокации отсутствуют, если интенсивность регулярной составляющей поля больше среднестатистической интенсивности случайной составляющей. С учетом соотношения (14) рассматриваемое условие эквивалентно неравенству

$$\exp(-\sigma^2)I(\rho) > [1 - \exp(-\sigma^2)]\overline{I_s(\rho)}. \quad (19)$$

Из этого неравенства следует, что в околоосевой области, ограниченной дифракционным радиусом $\rho = 0.7\rho_z$ (при этом $W(\rho) \approx 0.86$), дислокации отсутствуют, когда

$$\sigma^2 < \ln[1 + \mu^2 \exp(-2(1 - 1/\mu^2))].$$

Если дисперсия $\sigma^2 < 0.55$, неравенство (19) выполняется при любых значениях $\mu > 1$. В общем случае μ зависит от z . Поэтому при фиксированных параметрах ФИ выполнимость неравенства (19) и наличие в пучке локальных областей с нулевой интенсивностью зависят от положения плоскости наблюдения. Представленные выводы согласуются с результатами работы [7], в которой экспериментально и методами вычислительной математики исследовались условия возникновения винтовых дислокаций волнового фронта.

4.2. Трехкомпонентная модель пучка

Далее уточним модель пучка, рассматривая частично когерентную составляющую поля как сумму двух гаусс-

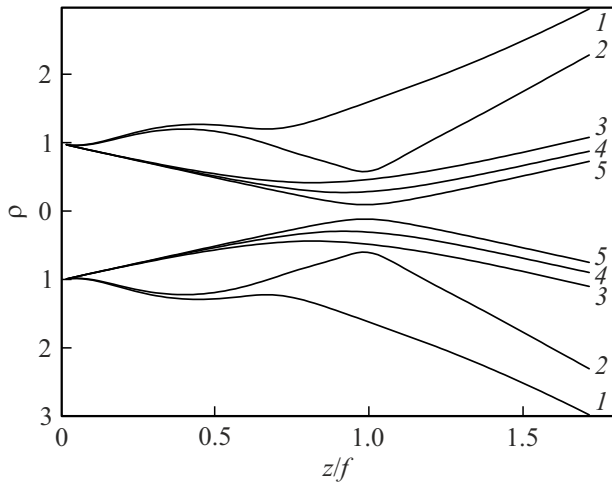


Рис. 6. Радиус пучка в зависимости от величины z/f . Графики 1 и 2 соответствуют пучку со следующими параметрами: $\gamma_{\bar{w}} = 0.25$, $N_f = 14$, $c = 0.012$ при $\sigma^2 = 1.5$ и $\sigma^2 = 0.5$. Графики 3, 4 — $\gamma_{\bar{w}} = 0.63$, $N_f = 6$, $\sigma^2 = 1.5$ при $c = 0.3$ и $c = 0.5$. График 5 — для дифракционно-ограниченного пучка с $N_f = 6$ при $\gamma_{\bar{w}} = 0.63$. Радиус пучка ρ нормирован на величину $a_d = a \sqrt{\ln[1/(1 - \gamma_{\bar{w}})]}/2$, которая равна радиусу пучка в плоскости выходной апертуры.

совых пучков:

$$\overline{I_s(\rho)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu_1^2} I\left(\frac{\rho}{\mu_1}\right) + \frac{1}{\mu_2^2} I\left(\frac{\rho}{\mu_2}\right) \right],$$

$$\overline{W_s(\rho)} = \frac{1}{2} \left[W\left(\frac{\rho}{\mu_1}\right) + W\left(\frac{\rho}{\mu_2}\right) \right]. \quad (20)$$

Величины $\mu_{1,2} > 1$ определяют расходимость частично когерентной составляющей поля. Найдем связь величин $\mu_{1,2}$ с параметрами пучка. Исходя из определения (9) пространственных моментов с учетом представления (20) получаем совокупность равенств

$$St = D + (1 - D) \left(\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2\mu_1^2\mu_2^2} \right), \quad (21)$$

$$m_2 = D + (1 - D) \left(\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2} \right),$$

$$m_4 = D + (1 - D) \left(\frac{\mu_1^4 + \mu_2^4}{2} \right), \quad (22)$$

Рассматривая (22) как систему уравнений относительно $\mu_{1,2}$, находим

$$\mu_{1,2} = \sqrt{m_{s2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{m_{s4}}{m_{s2}} - 1} \right)},$$

$$m_{sn} = \frac{m_n - D}{1 - D}, \quad n = 2, 4, \quad (23)$$

где m_{sn} — относительные пространственные моменты для квазиогерентной составляющей поля. Путем алгебраических преобразований выражения (23) несложно получить

$$\mu_{1,2} = M_{sz}^2 \sqrt{1 \pm \left(1 - \frac{1}{M_{sz}^4} \right) k_s},$$

$$M_{sz}^2 = \sqrt{1 + \frac{\sigma^2/c_z^2}{1 - \exp(-\sigma^2)}},$$

$$k_s = \sqrt{\frac{1 - (1 + \sigma^2) \exp(-\sigma^2)}{\sigma^2}}. \quad (24)$$

При этом число Штреля с учетом соотношений (21), (24) равно

$$St \approx D + \frac{1 - D}{\mu^2}, \quad \mu = M_{sz}^2 \sqrt{1 - (1 - 1/M_{sz}^4)^2 k_s^2}. \quad (25)$$

Величина $k_s = k_s(\sigma^2)$ максимальна при $\sigma^2 = 1.79$, $\max[k_s(\sigma^2)] = 0.546$.

Выше представленные соотношения решают задачу аналитической аппроксимации функциональных рядов (4), (8). При использовании формул (24), (25) для числа Штреля абсолютная погрешность расчета не превышает 0.01, относительная погрешность меньше 3.4%. То есть абсолютная погрешность меньше $\min(0.01; 0.034St)$. Абсолютная погрешность расчета потока излучения меньше 0.017, относительная погрешность меньше 3.7%.

4.3. Результаты вычислительного эксперимента

Отдельные результаты расчетов среднестатистических интенсивности и потока мощности для сфокусированного лазерного пучка в зависимости от относительного расстояния z/f и (σ^2, c) представлены на рис. 3–6. В вычислительном эксперименте дисперсия σ^2 варьировала в диапазоне $[0; 10]$. С учетом правила 3σ [16] амплитуда случайных деформаций волнового фронта не превышала 1.6λ .

Рисунок 3 иллюстрирует зависимость числа Штреля от расстояния до плоскости наблюдения.

Число Штреля монотонно возрастает при уменьшении σ^2 и/или с ростом c_z . При фиксированных σ^2 и c величина St в зависимости от z минимальна в фокусе, когда $c_z = c_f = c$. При уменьшении z в области до фокуса $c_z \rightarrow \infty$, и St приближается к 1. С ростом z в области $z > f$ эффективный радиус корреляции c_z возрастает, и число Штреля приближается к значению, которое определено при

$$c_z = c_\infty = c \sqrt{1 + (\pi N_f/2)^2}.$$

На рис. 4 представлены результаты расчетов осевой интенсивности $I(0)$.

Интенсивность $\overline{I(0)} = (4/\pi\rho_z^2)St$ более сложно зависит от z , чем интегральная ширина пучка $2A_z$ (рис. 1) и число Штреля (рис. 3). Присутствие ФИ может приводить к появлению второго локального максимума в распределении интенсивности вдоль оптической оси. При этом с ростом ФИ глобальный максимум интенсивности пучка смещается в сторону выходной апертуры. Экспериментально выше отмеченный эффект наблюдался в работе [17].

Оценим условия, при которых зависимость $\overline{I(0)}$ от z имеет два максимума. Исходя из соотношений (16), (18) понятно, что второй максимум интенсивности (и перетяжка) для частично когерентной компоненты сфокусированного пучка должны находиться в области, где величина z заметно меньше фокусного расстояния f . Это условие выполняется, когда относительная ширина μ рассматриваемой компоненты пучка сравнима с числом Френеля N_f ; точнее $\mu^2 - 1 \sim N_f^2$, $N_f > 1$. Кроме того, интенсивность излучения частично когерентной составляющей должна быть сравнима с интенсивностью дифракционно-ограниченной составляющей, поэтому $\sigma^2 > \ln(1 + \mu^2)$.

На рис. 5 представлены отдельные результаты расчетов потока излучения через площадку фиксированного радиуса ρ в зависимости от расстояния до плоскости наблюдения.

Графики рис. 5 аналогичны графикам рис. 4 для осевой интенсивности, но имеют, как и следовало ожидать, более гладкий характер.

Рисунок 6 иллюстрирует результаты расчетов радиуса пучка ρ при заданном (фиксированном) относительном уровне потока излучения $\gamma_w = \overline{W(\rho)} < 1$.

Локальный минимум радиуса пучка смещается в сторону излучающей апертуры при увеличении дисперсии σ^2 и/или при уменьшении радиуса корреляции c .

В заключении разд. 4 отметим, что полученные и исследованные аналитические соотношения аппроксимируют функцию распределения среднестатистического потока излучения в зависимости от размеров приемника и расстояния до плоскости наблюдения без ограничений на амплитуду и масштаб случайных ФИ поля. Абсолютная погрешность полученного аналитического соотношения не превышает 0.017, относительная погрешность меньше 3.7%. Дополнительные исследования показывают, что представленная аналитическая модель гауссова пучка со случайными ФИ допускает расширение на вариант, когда функция случайных ФИ поля есть сумма нескольких статистически независимых составляющих.

5. Заключение

В приближении Френеля разработана аналитическая модель и выполнены аналитические исследования пространственно-энергетических характеристик среднестатистического лазерного гауссова пучка со случайными нормально распределенными ФИ поля с гауссовой

функцией корреляции без ограничений на амплитуду и масштаб ФИ поля.

Поле распространяющегося лазерного гауссова пучка со случайными ФИ представлено суммой двух компонент: когерентной (дифракционно-ограниченной) и частично когерентной (рассеянной на фазовых неоднородностях), последняя имеет нулевое среднестатистическое значение. Получены и исследованы аналитические соотношения, которые равномерно аппроксимируют функцию распределения среднестатистического потока излучения в зависимости от размеров приемника и расстояния до плоскости наблюдения без ограничений на амплитуду и масштаб случайных ФИ поля.

Показано, что ФИ поля могут приводить к появлению второго максимума в распределении среднестатистической интенсивности и потока излучения вдоль оптической оси и смещению глобального максимума ближе к выходной апертуре системы. Эти эффекты обусловлены наличием в пучке частично когерентной компоненты. Осевая интенсивность этой составляющей пучка имеет максимум, и он находится ближе к выходной апертуре, чем максимум интенсивности для дифракционно-ограниченной составляющей. Получены аналитические соотношения для расчета ширины распространяющегося пучка и положения его перетяжки в зависимости от дисперсии и радиуса корреляции ФИ поля.

Представляет интерес возможное развитие описанной модели гауссова пучка на более общий случай, когда деформация волнового фронта имеет несколько источников и функция фазовых деформаций поля равна сумме нескольких случайно распределенных составляющих.

Результаты исследований могут использоваться при разработке и оптимизации лазерных приемопередающих оптических систем, в методиках измерения параметров и качества лазерных пучков.

Список литературы

- [1] М. Born, E. Wolf. *Principles of Optics* (Pergamon, Oxford, 1969).
- [2] V.V. Valuev, V.G. Naumov, N.E. Sarkarov, P.A. Svtin. *Quantum Electron.*, **28** (1), 14 (1998). DOI: 10.1070/QE1998v028n01ABEH001129
- [3] V.A. Gurashvili, A.M. Zotov, P.V. Korolenko, A.P. Napartovich, S.P. Pavlov, A.V. Rodin, N.E. Sarkarov. *Quantum Electron.*, **31** (9), 821 (2001). DOI: 10.1070/QE2001v031n09ABEH002053
- [4] А.С. Топорец. *Оптика шероховатой поверхности* (Машиностроение, Л., 1988).
- [5] В.Е. Зуев. *Распространение лазерного излучения в атмосфере* (Радио и связь, М., 1981).
- [6] П.А. Носов, И.И. Пахомов, А.Ф. Ширанков. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. „Приборостроение“*, **9** (9), 167 (2012). DOI: 10.18698/2308-6033-2012-9-363
- [7] А.М. Зотов, А.В. Аверченко, П.В. Короленко, Н.Н. Павлов. *Известия РАН. Серия физическая*, **82** (1), 15 (2018). DOI: 10.7868/S0367676518010039

- [8] С.А. Ахманов, Ю.Е. Дьяков, А.С. Чиркин. *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (Наука, М., 1981).
- [9] С.М. Рытов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. *Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. Случайные поля* (Наука, М., 1978).
- [10] P.A. Nosov, V.Y. Pavlov, I.I. Pakhomov, A.F. Shirankov. *J. Opt. Technol.*, **78** (9), 586 (2011) DOI: 10.1364/JOT.78.000586
- [11] A.E. Siegman. *IEEE J. Quant. Electron.*, **27** (5), 1146 (1991). DOI:10.1109/3.83370
- [12] ГОСТ Р ИСО 11146-1-2008 [Электронный ресурс]. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200076797>
- [13] H. Bateman, A. Erdelyi. *Higher Transcendental Functions* (McGraw Hill, NY., 1953).
- [14] V.I. Kislov, V.G. Taranenko. *Radiotekhnika i elektronika*, **31** (11), 2187 (1986).
- [15] V.I. Kislov, E.N. Ofitserov. *Phys. Wave Phenom.*, **27** (1), 24 (2019). DOI: 10.3103/S1541308X19010059
- [16] G.A. Korn, T.M. Korn. *Mathematical handbook for scientists and engineers; definitions, theorems, and formulas for reference and review* (McGraw Hill, NY., 1968).
- [17] N.P. Badalyan, V.V. Kiiko, V.I. Kislov, A.B. Kozlov. *Quantum Electron.*, **38** (5), 477 (2008). DOI: 10.1070/QE2008v038n05ABEH013622