

01  
**Упругое слияние рентгеновских фотонов в поле атомного иона**

© А.Н. Хоперский, А.М. Надолинский<sup>✉</sup>, Р.В. Конеев  
 Ростовский государственный университет путей сообщения,  
 Ростов-на-Дону, Россия  
<sup>✉</sup>e-mail: amnrnd@mail.ru

Поступила в редакцию 16.02.2024 г.  
 В окончательной редакции 11.06.2024 г.  
 Принята к публикации 16.06.2024 г.

Теоретически предсказаны аналитическая структура, абсолютные значения и угловая анизотропия дифференциального сечения упругого слияния рентгеновских фотонов в поле атомного иона.

**Ключевые слова:** слияние рентгеновских фотонов, неопоподобный атомный ион, амплитуда вероятности слияния, дифференциальное сечение.

DOI: 10.61011/OS.2024.06.58634.6041-24

**1. Введение**

Эффект слияния фотонов через рождение виртуальных электрон-позитронных пар вакуума квантовой электродинамики (QED) — предмет интенсивных теоретических исследований [1–15]. Предложенные в этих работах схемы экспериментального наблюдения слияния фотонов еще ждут своей реализации. В рамках QED в приближении слабого поля (энергия падающего фотона  $\hbar\omega \ll m_e c^2$ ,  $m_e$  — масса электрона,  $c$  — скорость света в вакууме) в лидирующем порядке теории возмущений амплитуда вероятности слияния описывается петлевой диаграммой Фейнмана с тремя падающими фотонами в начальном состоянии и одним фотоном в конечном состоянии процесса (рис. 1, *a*). Четность числа фотонов на петле воспроизводит QED-теорему Фарри [16]. В работах авторов [17–19] проведены первые теоретические исследования аналога QED-эффекта слияния фотонов в атомной физике — слияния фотонов мягкого ( $\hbar\omega \sim I_{1s}/2$ ,  $I_{1s}$  — энергия порога ионизации глубокой  $1s^2$ -оболочки) рентгеновского диапазона энергий в поле атома (атомного иона). В кратком сообщении [20] дано обобщение теории и результатов этих работ на жесткий ( $\hbar\omega \sim I_{1s}$ ) рентгеновский диапазон энергий падающего фотона. В настоящей работе мы даем более детальное изложение теории и дополняем физические результаты работы [20]. В этом случае лидирующая амплитуда вероятности слияния соответствует петлевой диаграмме Фейнмана на рис. 1, *b*. Такие исследования востребованы, в частности, для интерпретации спектров жесткой ( $\hbar\omega_R \sim 20\text{--}30\text{ keV}$ ) рентгеновской эмиссии от галактических кластеров [21] и черных дыр активных ядер галактик [22]. В качестве объекта исследования взят неопоподобный ион атома железа ( $\text{Fe}^{16+}$ , заряд ядра иона  $Z = 26$ , конфигурация и терм основного состояния  $[0] = 1s^2 2s^2 2p^6 [^1S_0]$ ). Выбор обусловлен сферической симметрией основного состояния иона  $\text{Fe}^{16+}$  и его доступностью в газовой фазе [23] при проведении экспериментов по слиянию фотонов рентгеновского лазера на

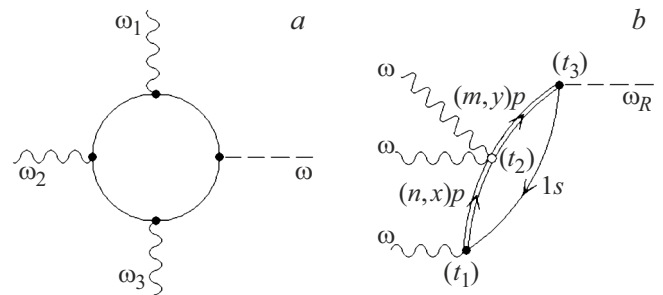
свободных электронах (XFEL; X-ray Free-Electron Laser) в поле иона, захваченного в „ловушке“ [24].

**2. Теория**

Амплитуда вероятности и дифференциальное сечение слияния получены в лидирующем третьем (по числу вершин взаимодействия) порядке нерелятивистской теории возмущений. В структуре операторов радиационного ( $\hat{R}$ ) и контактного ( $\hat{Q}$ ) переходов,

$$\hat{R} = -\frac{1}{c} \sum_{n=1}^N (\hat{p}_n \hat{A}_n), \tag{1}$$

$$\hat{Q} = \frac{1}{2c^2} \sum_{n=1}^N (\hat{A}_n \hat{A}_n), \tag{2}$$



**Рис. 1.** Амплитуды вероятности слияния фотонов в представлении диаграмм Фейнмана: (*a*) через рождение виртуальной электрон-позитронной пары QED-вакуума [12] ( $\omega_{i=1,2,3}$  — энергии лазерных фотонов,  $\omega$  — энергия „сигнального“ фотона); (*b*) через виртуальные состояния электронов дискретного ( $n, m$ ) и сплошного ( $x, y$ ) спектров. Направление времени — слева направо ( $t_1 < t_2 < t_3$ ). Стрелка вправо — электрон, стрелка влево — вакансия. Двойная линия — состояние получено в хартри-фокковском поле  $1s$ -вакансии. Черный (светлый) кружок на рис. 1, *b* — вершина радиационного (контактного) перехода.  $\omega(\omega_R)$  — падающий (рассеянный) фотон,  $\omega_R = 3\omega$ .

для оператора электромагнитного поля (в представлении вторичного квантования) принято дипольное приближение [25]:

$$\hat{A}_n = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\rho=1,2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\rho} (\hat{a}_{\mathbf{k}\rho}^+ + \hat{a}_{\mathbf{k}\rho}^-). \quad (3)$$

Критерий применимости дипольного приближения ( $\rho = \lambda/r_{1s} \gg 1$ ,  $\lambda$  — длина волны „сигнального“ фотона,  $r_{1s}$  — средний радиус  $1s$ -оболочки иона) определяет и границы применимости излагаемой теории. Для исследуемого нами случая иона  $\text{Fe}^{16+}$  при максимальной энергии „сигнального“ фотона  $\hbar\omega_R = 24.57 \text{ keV}$  и  $r_{1s} = 0.031 \text{ \AA}$  имеем  $\rho \approx 16$ . Однако при  $\hbar\omega_R = 400 \text{ keV}$  имеем  $\rho \approx 1$ , и дипольное приближение теряет смысл. В соотношениях (1)–(3)  $N$  — число электронов в ионе,  $\mathbf{p}_n$  — оператор импульса  $n$ -электрона иона,  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\rho}(\mathbf{k})$  — вектор поляризации (волновой вектор) фотона,  $\hat{a}_{\mathbf{k}\rho}^+$  ( $\hat{a}_{\mathbf{k}\rho}^-$ ) — оператор рождения (уничтожения) фотона. Сильная пространственная и энергетическая отдаленность субвалентной ( $2s^2$ ) и валентной ( $2p^6$ ) оболочек от глубокой  $1s^2$ -оболочки иона  $\text{Fe}^{16+}$  [25] позволяет пренебречь их вкладом в вероятность процесса слияния в области энергий  $\hbar\omega \sim I_{1s}$ .

Наряду с дипольным приближением для оператора электромагнитного поля принято приближение Тамма–Данкова [26] для амплитуд вероятности слияния с максимальным числом „частиц“ (фотонов, электронов, вакансий) в рассеяниях диаграмм Фейнмана  $N_0 = 5$ . Тогда из полного набора амплитуд вероятности слияния (сумма 128 диаграмм Фейнмана) остаются лишь амплитуды на рис. 1, *b*. В самом деле [25], в дипольном приближении исчезают амплитуды с участием волновой функции  $1s$ -электрона и  $j_l$  — сферической функции Бесселя. При этом в приближении Тамма–Данкова отбрасываются амплитуды вероятности рождения „частиц“ до момента поглощения падающего на ион фотона.

Амплитуда вероятности слияния через виртуальные состояния сплошного спектра, согласно диаграмме Фейнмана на рис. 1, *b* в атомной системе единиц ( $e = \hbar = m_e = 1$ ), принимает вид

$$A = \sum_{M'} \sum_{M''} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx dy}{\Delta(x, y)} M(x, y), \quad (4)$$

$$\Delta(x, y) = (\omega - I_{1s} - x + i\gamma_{1s})(3\omega - I_{1s} - y + i\gamma_{1s}), \quad (5)$$

$$M(x, y) = \langle 0 | \hat{R} | X \rangle \langle X | \hat{Q} | Y \rangle \langle Y | \hat{R} | \bar{0} \rangle, \quad (6)$$

$$|0\rangle = |0\rangle \otimes (\hat{a}_\omega^+)^3 |0_{\text{ph}}\rangle, \quad (7)$$

$$|X\rangle = |1s x p^1 P_1, M'\rangle \otimes (\hat{a}_\omega^+)^2 |0_{\text{ph}}\rangle, \quad (8)$$

$$|Y\rangle = |1s y p^1 P_1, M''\rangle \otimes |0_{\text{ph}}\rangle, \quad (9)$$

$$|\bar{0}\rangle = |0\rangle \otimes \hat{a}_{\omega_R}^+ |0_{\text{ph}}\rangle. \quad (10)$$

В соотношениях (4)–(10) определены полные волновые функции начального ( $|0\rangle$ ), промежуточных ( $|X\rangle, |Y\rangle$ ) и конечного ( $|\bar{0}\rangle$ ) состояний слияния, проекции полных

моментов системы „ион  $\otimes$  электрон“  $M', M'' = -1, 0, 1$ ,  $|0_{\text{ph}}\rangle$  — волновая функция фотонного QED-вакуума,  $\gamma_{1s} = \Gamma_{1s}/2$ , где  $\Gamma_{1s}$  — естественная ширина распада  $1s$ -вакансии иона, заполненные оболочки иона не указаны. Используя методы алгебры операторов рождения (уничтожения) фотонов, теории неприводимых тензорных операторов и теории неортогональных орбиталей [27], для (4) получаем

$$A = \xi \int_0^\infty \frac{dx}{\Delta(x, y)} [(x + I_{1s})J_x]^2, \quad (11)$$

$$\xi = -\frac{1}{3} \left( \frac{2\pi}{V\omega} \right)^2 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_R), \quad (12)$$

$$J_x = N_{1s} (\langle 1s_0 | \hat{r} | x p_+ \rangle - \Psi_x), \quad (13)$$

$$N_{1s} = \langle 1s_0 | 1s_+ \rangle \langle 2s_0 | 2s_+ \rangle^2 \langle 2p_0 | 2p_+ \rangle^6, \quad (14)$$

$$\Psi_x = \frac{\langle 1s_0 | \hat{r} | 2p_+ \rangle \langle 2p_0 | x p_+ \rangle}{\langle 2p_0 | 2p_+ \rangle}. \quad (15)$$

В равенстве (12) определены:  $V(\text{cm}^3) = c$  — объем квантования электромагнитного поля [28] и  $\mathbf{e}(\mathbf{e}_R)$  — вектор поляризации падающего (рассеянного) фотона. В равенствах (13)–(15) индексы „0“ и „+“ соответствуют радиальным частям волновых функций электронов, полученных решением уравнений самосогласованного поля Хартри–Фока для  $[0]$ - и  $1s_+(n, x) p_+$ -конфигураций состояний иона. Результат для амплитуды вероятности слияния через виртуальные состояния дискретного спектра аналогичен таковому для величины  $A$  (11) с заменами  $x p \rightarrow n p$ ,  $I_{1s} \rightarrow I_{1snp}$  ( $I_{1snp}$  — энергия фотовозбуждения  $1s \rightarrow n p$ ),  $J_x \rightarrow J_n$  и интегрирования по  $x \in [0; \infty)$  суммированием по  $n \in [3; \infty)$ .

Учитывая квантовую интерференцию амплитуд вероятности слияния через виртуальные состояния сплошного и дискретного спектров и следуя „золотому правилу“ Ферми [29], для дифференциального сечения слияния получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_R} = r_0^2 \eta \mu (C^2 + D^2), \quad (16)$$

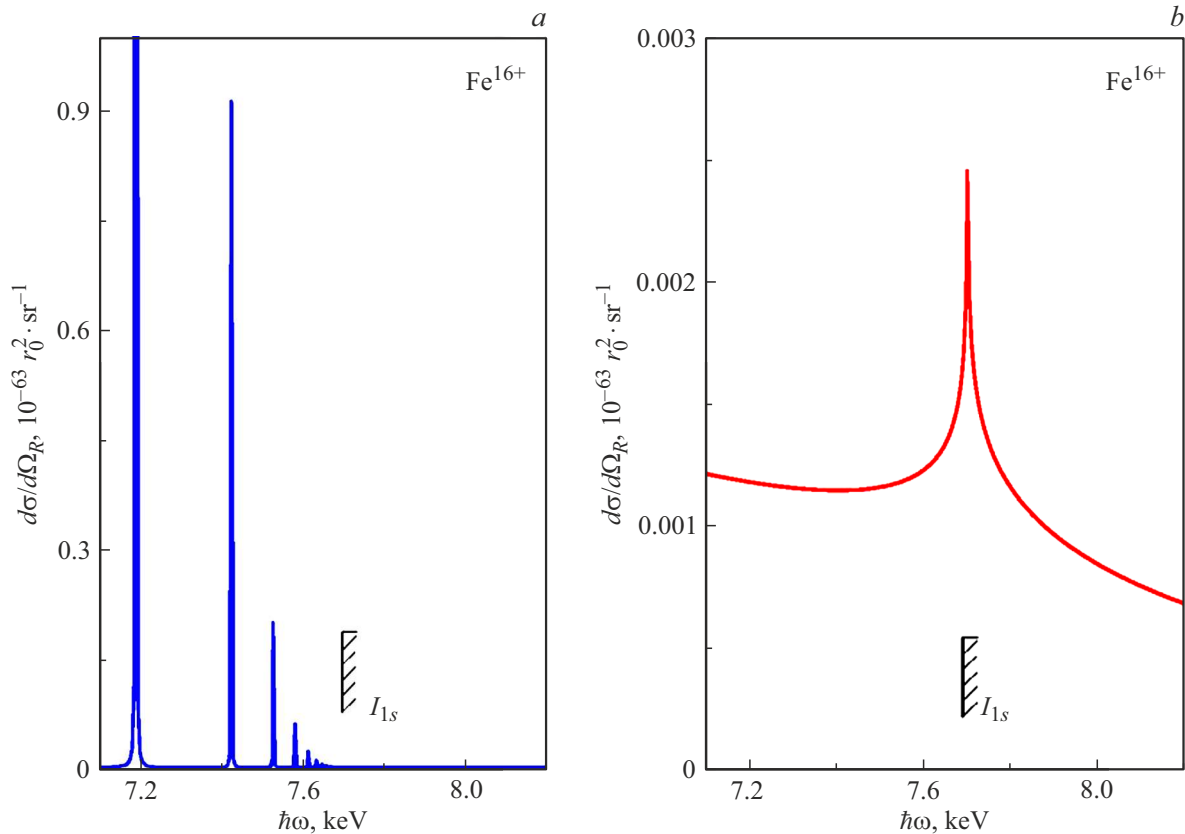
$$C = \int_0^\infty dx (x - x_0) f(x) - \sum_{n=3}^\infty \Delta_n \varphi_n, \quad (17)$$

$$D = \gamma_{1s} \left( \int_0^\infty dx f(x) + \sum_{n=3}^\infty \Delta_n \varphi_n \right), \quad (18)$$

$$f(x) = \frac{[(x + I_{1s})J_x/\omega]^2}{(x - x_0)^2 + \gamma_{1s}^2}, \quad (19)$$

$$\varphi_n = \frac{(I_{1snp} J_n / \omega)^2}{\Delta_n^2 + \gamma_{1s}^2}. \quad (20)$$

Заметим, что структуры (17) и (18) учитывают полную сумму виртуальных состояний дискретного и



**Рис. 2.** Парциальные дифференциальные сечения слияния фотонов в поле иона  $\text{Fe}^{16+}$  для  $\perp$ -схемы эксперимента ( $\mu^\perp = 1$ ): (a) учтены лишь виртуальные состояния дискретного спектра (таблица); (b) учтены лишь виртуальные состояния сплошного спектра.  $\hbar\omega$  — энергия падающего фотона.

сплошного спектров. Однако формально математически бесконечные суммы в (17) и (18) по виртуальным (промежуточным) состояниям дискретного спектра неизбежно требуют методов приближенных вычислений. В данной работе для вычисления величин  $I_{1snp}$  и  $J_n$  с главным квантовым числом  $n \gg 3$  использован метод аппроксимаций, предложенный в работе [25]. В формулах (16)–(20) определены:  $\Omega_R$  — пространственный угол вылета рассеянного фотона,  $r_0$  — классический радиус электрона,

$$\eta = \frac{1}{3} \left( \frac{\pi r_0}{\epsilon V} \right)^2 \frac{\alpha}{a_0} (c\hbar)^5,$$

$\alpha$  — постоянная тонкой структуры,  $\epsilon = 27.21$ ,  $a_0$  — радиус Бора,  $x_0 = \omega - I_{1s}$  и  $\Delta_n = \omega - I_{1snp}$ . Аксиально симметричный (относительно волнового вектора падающего фотона) параметр  $\mu = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_R)^3$  в (16) определяет эффект угловой анизотропии сечения слияния. Он конкретизирован для трех схем XFEL-эксперимента. Первая схема — векторы поляризации фотонов перпендикулярны плоскости рассеяния ( $\mathbf{e}, \mathbf{e}_R \perp P$ ). Вторая схема — векторы поляризации фотонов параллельны плоскости рассеяния ( $\mathbf{e}, \mathbf{e}_R \parallel P$ ). Третья схема — схема с неполяризованными ( $UP$ ) фотонами.  $P$  — плоскость

рассеяния проходит через волновые векторы падающего ( $\mathbf{k}$ ) и рассеянного ( $\mathbf{k}_R$ ) фотонов. Как результат имеем

$$\mu^\perp = 1, \quad (21)$$

$$\mu^\parallel = \cos^2 \theta, \quad (22)$$

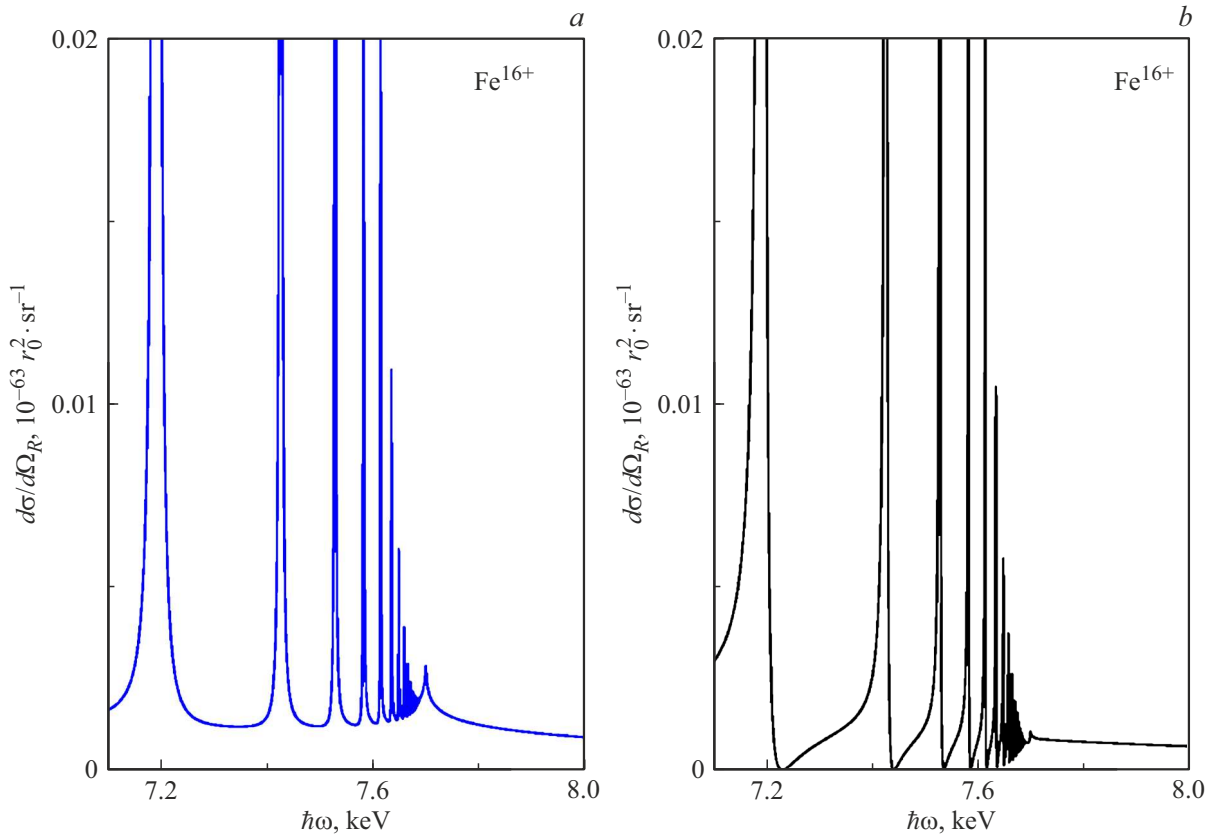
$$\mu_{UP} = \frac{1}{2} (\mu^\perp + \mu^\parallel), \quad (23)$$

где  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_R$ .

Как и следовало ожидать, сечение (16) удовлетворяет асимптотическому условию:  $d\sigma/d\Omega_g \rightarrow 0$  при  $\omega \rightarrow \infty$ . В формально математическом пределе (в эксперименте  $\omega > 0$ )  $\omega \rightarrow 0$  возникает „инфракрасная расходимость“ сечения слияния:  $d\sigma/d\Omega_R \rightarrow \infty$ . Этот результат воспроизводит таковой работы авторов [17].

### 3. Результаты и обсуждение

Результаты расчета представлены на рис. 2, 3, 4 и в таблице. Для параметров сечения (16) приняты значения  $I_{1s} = 7699.23$  eV (релятивистский расчет данной работы),  $\Gamma_{1s} = 1.046$  eV [30] и  $\omega \in (7.15; 8.19)$  keV ([31], Linac Coherent Light Source XFEL, USA). Таким образом, исследуется вероятность рождения „сигнального“ фотона с энергией  $\omega_R \in (21.45; 24.57)$  keV.



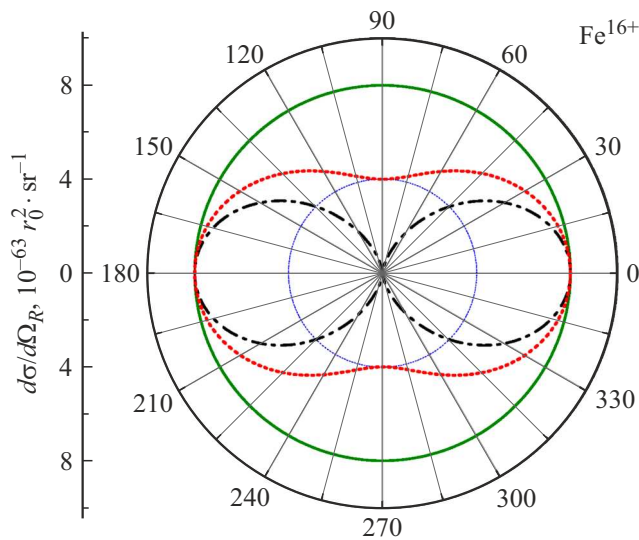
**Рис. 3.** Полные дифференциальные сечения слияния фотонов в поле иона  $\text{Fe}^{16+}$  для  $\perp$ -схемы эксперимента ( $\mu^\perp = 1$ ): (a) без учета (сумма сечений на рис. 2, a, b); (b) с учетом квантовой интерференции слагаемых в амплитуде  $C$  из (17).  $\hbar\omega$  — энергия падающего фотона.

Спектральные характеристики лидирующих резонансов дифференциального сечения слияния фотонов в поле иона  $\text{Fe}^{16+}$  в  $\perp$ -схеме эксперимента

$np_+$	$I_{1np}$ , keV	$d\sigma/d\Omega_R$ ( $10^{-63} r_0^2 \cdot \text{sr}^{-1}$ )
$3p_+$	7.1937	7.9768
$4p_+$	7.4272	0.9104
$5p_+$	7.5293	0.1985
$6p_+$	7.5832	0.0607
$7p_+$	7.6150	0.0232
$8p_+$	7.6354	0.0105
$9p_+$	7.6489	0.0058
$10p_+$	7.6587	0.0037

Результаты на рис. 2, a и в таблице демонстрируют лидирующую роль  $1s \rightarrow np$ -резонансов фотовозбуждения в сечении слияния (учтены значения главного квантового числа  $n \in [3; 500]$ ). Результат на рис. 2, b в области энергий  $\omega \in (7.1; 7.5)$  keV демонстрирует тенденцию к „инфракрасной расходимости“ сечения слияния. При

этом в области порога ионизации ( $\omega \cong I_{1s}$ ) возникает резонанс слияния через виртуальные состояния сплошного спектра. Структуры на рис. 2 аналогичны таковым в работах [17–19], но соответствующие сечения слияния на  $\sim 12$  порядков величины превосходят их. В самом деле, в области высоких энергий падающих на ион фотонов амплитуды вероятности слияния с участием волновой функции  $1s$ -электрона и  $j_l$  — сферической функции Бесселя [17–19] практически подавляются, а в дипольном приближении для оператора контактного перехода обращаются в нуль. Таким образом, переход к жесткому рентгеновскому диапазону энергий падающих фотонов значительно увеличивает вероятность экспериментального обнаружения слияния в XFEL-эксперименте. Сравнение результатов на рис. 3, a и рис. 3, b демонстрирует эффект деструктивной (гасящей) квантовой интерференции амплитуд вероятности по виртуальным состояниям дискретного и сплошного спектров, входящих с разными знаками в амплитуду  $C$  из (17). При этом резонанс слияния на рис. 2, b резко „проседает“, и в области энергий  $\omega \in (7.2; 7.6)$  keV возникают окна „прозрачности“ (резкое падение вероятности слияния). Результат на рис. 4 для  $\perp$ - и  $UP$ -схем эксперимента демонстрирует ярко выраженную угловую анизотропию слияния — преимущественное и симметричное слияние в направ-



**Рис. 4.** Индикатрисы слияния фотонов в поле иона  $\text{Fe}^{16+}$  с полярным радиусом  $d\sigma/d\Omega_R$  и полярным углом  $\theta$  при энергии падающего фотона  $\hbar\omega = 7.1937 \text{ keV}$  (энергия резонанса  $1s \rightarrow 3p$ -фотовозбуждения). Схемы эксперимента:  $\perp$  (сплошная кривая),  $\parallel$  (штрихпунктирная кривая), неполяризованные фотоны (пунктирная кривая).

лении углов  $\theta = 0^\circ, 180^\circ$ . Здесь обнаруживается качественное отличие от результатов работ [17,18], где преобладающим направлением слияния оказывается угол  $\theta = 180^\circ$  („сигнальный“ фотон „отражается“ от иона). Таким образом, переход к жесткому рентгеновскому диапазону энергий падающих фотонов значительно расширяет пространственную область экспериментального обнаружения слияния в XFEL-эксперименте. Заметим, что результат на рис. 4 качественно воспроизводит таковой для упругого фотон-фотонного рассеяния в поле атомного иона [25] и через QED-вакуум [32,33].

#### 4. Заключение

Построен нерелятивистский вариант квантовой теории процесса упругого слияния фотонов жесткого рентгеновского диапазона энергий в поле многозарядного неоподобного атомного иона. Установлено возникновение гигантских резонансов дифференциального сечения слияния и его угловая анизотропия в соответствующих схемах предполагаемого XFEL-эксперимента. Выход за рамки дипольного приближения для  $\hat{R}$ - и  $\hat{Q}$ -операторов перехода и учет следующих порядков теории возмущений является предметом будущего развития теории. Обобщение теории на атомы и атомные ионы другого типа, установление роли заряда их ядра и не учтенных в данной работе релятивистских эффектов является предметом будущих исследований. Наконец, оценим абсолютное значение максимума „наблюдаемого“ сечения слияния ( $1s \rightarrow 3p$ -резонанс в таблице) в предполагаемом XFEL-эксперименте. При средней

яркости излучения лазера (число фотонов в лазерном пульсе)  $N = 10^{21}$  ([34], European XFEL, Germany) в силу теоремы о сумме вероятностей несовместных событий (выбор трех из  $N$  падающих на атомный ион фотонов) имеем

$$\frac{N!}{3!(N-3)!} \left( \frac{d\sigma}{d\Omega_R} \right) \cong 0.106 \left[ \frac{\text{barn}}{\text{sr}} \right].$$

Полученное значение вполне доступно измерению.

#### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### Список литературы

- [1] J. McKenna, P.M. Platzman. Phys. Rev., **129**, 2354 (1963). DOI: 10.1103/PhysRev.129.2354
- [2] V.P. Yakovlev. Sov. Phys. JETP, **24**, 411 (1967).
- [3] R.L. Dewar. Phys. Rev. A, **10**, 2107 (1974). DOI: 10.1103/PhysRevA.10.2107
- [4] F. Moulin, D. Bernard. Opt. Commun., **164**, 37 (1999). DOI: 10.48550/arXiv.physics/0203069
- [5] A.E. Kaplan, Y.J. Ding. Phys. Rev. A, **62**, 043805 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevA.62.043805
- [6] E. Lundström, G. Brodin, J. Lundin et. al. Phys. Rev. Lett., **96**, 083602 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.083602
- [7] A.M. Fedotov, N.B. Narozhny. Phys. Lett. A, **362**, 1 (2007). DOI: 10.48550/arXiv.hep-ph/0604258
- [8] A. Di Piazza, K.Z. Hatsagortsyan, C.H. Keitel. Phys. Rev. A, **78**, 062109 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevA.78.062109
- [9] H. Gies, F. Karbstein, R. Shaisultanov. Phys. Rev. D, **90**, 033007 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevD.90.033007
- [10] P. Böhl, B. King, H. Ruhl. Phys. Rev. A, **92**, 032115 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.92.032115
- [11] H. Gies, F. Karbstein, N. Seegert. Phys. Rev. D, **93**, 085034 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevD.93.085034
- [12] B. King, H. Hu, B. Shen. Phys. Rev. A, **98**, 023817 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.023817
- [13] H. Gies, F. Karbstein, L. Klar. Phys. Rev. D, **103**, 076009 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevD.103.076009
- [14] Ch. Sundqvist, F. Karbstein. Phys. Rev. D, **108**, 056028 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevD.108.056028
- [15] A. Fedotov, A. Ilderton, F. Karbstein, B. King, D. Seipt, H. Taya, G. Torgrimsson. Phys. Rep., **1010**, 1 (2023). DOI: 10.1016/j.physrep.2023.01.003
- [16] W.H. Furry. Phys. Rev., **51**, 125 (1937). DOI: 10.1103/PhysRev.51.125
- [17] A.N. Hopersky, A.M. Nadolinsky, S.A. Novikov. J. Phys. B, **50**, 5801 (2017). DOI: 10.1088/1361-6455/aa606e
- [18] A.N. Hopersky, A.M. Nadolinsky, R.V. Koneev. JETP Lett., **105**, 568 (2017). DOI: 10.1134/S0021364017090107
- [19] A.N. Hopersky, A.M. Nadolinsky, V.A. Yavna. JETP Lett., **106**, 116 (2017). DOI: 10.1134/S0021364017140065
- [20] А.Н. Хоперский, А.М. Надолинский, Р.В. Конеев. В сб.: VI Международная конф. по фотонике и информат. оптике: Сборник научных трудов (НИЯУ МИФИ, М., 2017), с. 474–475.
- [21] R.A. Rojas Bolivar, D.R. Wink, A. Tümer et. al. Astrophys. J., **954**, 76 (2023). DOI: 10.3847/1538-4357/ace969

- [22] D.V. Serbinov, M.N. Pavlinsky, A.N. Semena et. al. *Exp. Astron.*, **51**, 493 (2021). DOI: 10.1007/s10686-021-09699-8.
- [23] S. Kühn, Ch. Cheung, N.S. Oreshkina et. al. *Phys. Rev. Lett.*, **129**, 245 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.245001
- [24] P. Micke, S. Kühn, L. Buchauer et. al. *Rev. Sci. Instrum.*, **89**, 063109 (2018). DOI: 10.48550/arXiv.2010.15984
- [25] А.Н. Хоперский, А.М. Надолинский, Р.В. Конеев. *Опт. и спектр.*, **131**, 1306 (2023). DOI: 10.61011/OS.2023.10.56881.5326-23
- [26] A.L. Fetter, J.D. Waleska. *Quantum Theory of Many-Particle System* (McGraw-Hill, NY., 1971). DOI: 10.1063/1.3071096
- [27] A.N. Hopersky, A.M. Nadolinsky, S.A. Novikov. *Phys. Rev. A*, **98**, 063424 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.063424
- [28] N. Bloembergen. *Nonlinear Optics* (World Scientific, Singapore, 1996).
- [29] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light* (Oxford Science Publications, 2001).
- [30] M.H. Chen, B. Crasemann, Kh.R. Karim, H. Vark. *Phys. Rev. A*, **24**, 1845 (1981). DOI: 10.1103/PhysRevA.24.1845
- [31] C. Bostedt, J.D. Bozek, P.H. Bucksbaum et al. *J. Phys. B*, **46**, 164003 (2013). DOI: 10.1088/0953-4075/46/16/164003
- [32] A. Rebhan, G. Turk. *Int. J. Mod. Phys. A*, **32**, 1750053 (2017). DOI: 10.48550/arXiv.1701.07375
- [33] J. Ellis, N.E. Mavromatos, T. You. *Phys. Rev. Lett.*, **118**, 261802 (2017). DOI:10.1103/PhysRevLett.118.261802
- [34] J. Feldhaus, M. Krikunova, M. Meyer et. al. *J. Phys. B*, **46**, 164002 (2013). DOI: 10.1088/0953-4075/46/16/164002