

# Волновая функция фотоэлектрона вблизи центра квантового вихря

© Н.В. Ларионов<sup>1,2</sup>, Ю.Л. Колесников<sup>1</sup>, В.М. Молчановский<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: laronov.nickolay@gmail.com

Поступила в редакцию 13.03.2024 г.

В окончательной редакции 28.05.2024 г.

Принята к публикации 28.05.2024 г.

В двумерном приближении теоретически исследовано поведение фотоэлектрона в области локализации квантового вихря. Полученная волновая функция фотоэлектрона имеет простую структуру, представляющую собой произведение гауссова волнового пакета на полином, содержащий информацию о вихре. С ее помощью анализируются плотность и ток вероятности как в импульсном, так и координатном пространствах. Также рассмотрено влияние напряженности ионизирующего сверхкороткого лазерного импульса на вероятность появления и масштаб квантового вихря.

**Ключевые слова:** квантовый вихрь, импульсное представление, поток вероятности, сверхкороткий импульс, фотоэлектрон.

DOI: 10.61011/OS.2024.05.58455.6140-24

## 1. Введение

Ранее нами исследовались квантовые вихри, образующиеся при надбарьерной ионизации двумерного атома водорода сверхкоротким лазерным импульсом [1–4]. Расчеты проводились как с помощью численного решения уравнения Шредингера, так и с помощью аналитического подхода, основанного на применении нестационарной теории возмущений. В рамках последней было получено аналитическое выражение для волновой функции фотоэлектрона в импульсном  $k$ -представлении. Эта волновая функция позволила провести идентификацию центров квантовых вихрей, а также анализ „симметричного“ потока вероятности [5] в соответствующем  $k$ -пространстве.

Переход из  $k$ -пространства в обычное координатное пространство для полученной волновой функции выполнен не был. Причина этому — существенные трудности при двумерном преобразовании Фурье.

В данной работе для случая хорошо локализованных вихрей нам удастся упростить упомянутую волновую функцию фотоэлектрона таким образом, что она записывается в виде произведения гауссовой функции от модуля импульса  $k = |\mathbf{k}|$  на полином относительно проекций  $k_x, k_y$ . Такая упрощенная волновая функция не теряет информацию о квантовом вихре и позволяет легко исследовать его и в координатном пространстве.

В работе используется атомная система единиц ( $\hbar = 1, m_e = 1, e = 1$ ), где атомная единица электрического поля  $F_a$  равна напряженности кулоновского поля на борновском радиусе, а атомная единица времени  $T_a$ , умноженная на  $2\pi$ , представляет собой орбитальный период электрона в той же модели Бора.

## 2. Теоретическая модель

Рассматриваемая нами модель представлена двумерным атомом водорода [6], находящимся под воздействием сверхкороткого лазерного импульса. Оператор взаимодействия „атом+поле“ записывается в дипольном приближении:

$$\hat{V} = -\hat{\mathbf{d}}\mathbf{F}(t), \quad (1)$$

где  $\hat{\mathbf{d}} = -\hat{\mathbf{r}} = -(\mathbf{e}_x\hat{x} + \mathbf{e}_y\hat{y})$  — оператор дипольного момента атома и  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  — орты декартовой системы координат. Вектор напряженности электрического поля лазера  $\mathbf{F}(t)$  моделируется следующей функцией:

$$\mathbf{F}(t) = (F_x(t), 0) = \mathbf{e}_x F_0 \cos(\omega t - \alpha) [\theta(T - t) - \theta(-t)], \quad (2)$$

где  $\omega$  — частота,  $\theta(t)$  — функция Хевисайда,  $T$  — длительность импульса,  $\alpha$  — начальная фаза. Значения постоянной амплитуды  $F_0$  берутся такими, чтобы преобладала надбарьерная ионизация.

Волновая функция электрона ищется в виде суммы основного (начального) состояния атома и состояния, соответствующего непрерывному спектру [7]. Последнее записывается нами в виде суперпозиции цилиндрических волн с неизвестными амплитудами, которые, в свою очередь, вычисляются с помощью нестационарной теории возмущений.

Опуская промежуточные вычисления, которые подробно разобраны в наших предыдущих работах, выпишем часть волновой функции в импульсном представлении, ответственную за непрерывный спектр электрона (далее фотоэлектрон):

$$\tilde{\Psi}(k, \varphi_k, t) = \sum_m b_{k,m}(t) (-i)^{|m|} \Phi_m(\varphi_k) e^{-iE_k t}. \quad (3)$$

Здесь  $(k, \varphi_k)$  — полярные компоненты импульса  $\mathbf{k}$  фотоэлектрона,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — проекция его момента на ось  $z$  и  $E_k = k^2/2 = (k_x^2 + k_y^2)/2$  — его энергия.  $\Phi_m(\varphi_k) = e^{im\varphi_k}/\sqrt{2\pi}$  — угловая часть волновой функции.

Амплитуды  $b_{k,m}(t)$  удовлетворяют следующей системе уравнений [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{k,m}(t)}{\partial t} &= \frac{-i}{2} (\delta_{m,+1} + \delta_{m,-1}) \frac{6ke^{i\omega_{k1}t}}{(k^2+1)^{5/2}} F_x(t) \\ &+ \frac{(-i)^{|m-1|-|m|}}{2} F_x(t) \left( \frac{\partial}{\partial k} - ikt - \frac{m-1}{k} \right) b_{k,m-1}(t) \\ &+ \frac{(-i)^{|m+1|-|m|}}{2} F_x(t) \left( \frac{\partial}{\partial k} - ikt + \frac{m+1}{k} \right) b_{k,m+1}(t), \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\omega_{k1} = (k^2+1)/2$  — частота перехода из основного состояния в состояние непрерывного спектра. Начальное условие для неизвестных амплитуд  $b_{k,m}(0) = 0$ .

Для решения системы (4) применяется нестационарная теория возмущений, т.е.  $b_{k,m}(t)$  записывается в виде ряда теории возмущений:

$$b_{k,m}(t) = \sum_{s=1,2,\dots} b_{k,m,10}^{(s)}(t),$$

где нижний индекс „10“ указывает на начальное связанное состояние электрона и  $b_{k,m,10}^{(s)} \sim F_0^s$ .

Отметим, что в (3) полностью игнорируется связь с атомным остатком.

### 3. Волновая функция вблизи центра вихря

Будем рассматривать случай установившегося решения  $t > T$  и выберем следующие параметры лазерного импульса:  $w = \pi$ ,  $\alpha = 0$  и  $T = 3, 4$ . Конкретно при этих параметрах нами ранее были идентифицированы хорошо локализованные квантовые вихри [4]. При этом в случае четной длительности  $T$  в импульсном пространстве появляется одна пара вихрей, а при нечетной — две пары.

*Случай  $T = 4$ .* В данном случае для полной идентификации квантовых вихрей достаточно решить систему (4) во втором порядке теории возмущений. Прodelывая эту несложную процедуру, для выбранных параметров лазера получаем следующую волновую функцию фотоэлектрона:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_4(k, \varphi_k, t) &= A \frac{\sin(k^2+1)}{(k^2+1)^{3/2}} e^{ik^2 - iE_k t} \left[ \frac{k \cos(\varphi_k)}{(k^2+1)^2 - 4\pi^2} \right. \\ &\times \left( 1 + \frac{2iF_0 k \cos(\varphi_k)(7(k^2+1)^2 - 4\pi^2)}{(k^2+1)^2((k^2+1)^2 - 16\pi^2)} \right) \\ &\left. - \frac{2iF_0}{(k^2+1)((k^2+1)^2 - 16\pi^2)} \right], \quad (5) \end{aligned}$$

где  $A$  — константа. Здесь члены с  $F_0$  соответствуют второму порядку теории возмущений, а члены, свободные от этой амплитуды, — первому порядку. Нижний индекс „4“ указывает на длительность возбуждающего импульса лазера.

Центры двух квантовых вихрей, симметричных относительно оси  $k_x$ , могут быть найдены из равенства нулю вещественной и мнимой частей волновой функции (5), т.е.  $\text{Re}(\tilde{\Psi}_4(\mathbf{k}, t)) = 0 = \text{Im}(\tilde{\Psi}_4(\mathbf{k}, t))$  (сравни с [8–10]). Отсюда декартовы и полярные координаты центров вихрей равны (рис. 1, *a*)

$$\begin{aligned} k_{x0} &= 0, \quad k_{y0} = \pm \sqrt{2\pi - 1} \approx 2.3, \\ k_0 &= \sqrt{2\pi - 1}, \quad \varphi_0 = \pi/2, 3\pi/2. \quad (6) \end{aligned}$$

„Симметричный“ поток

$$\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t) = \text{Im}[\tilde{\Psi}^*(\mathbf{k}, t) \nabla_{\mathbf{k}} \tilde{\Psi}(\mathbf{k}, t)], \quad (7)$$

где  $\nabla_{\mathbf{k}} \equiv \partial/\partial \mathbf{k}$ , построенный для состояния (5), демонстрирует закручивание вокруг оси, проходящей через эти центры [3,4] (рис. 1, *c, d*).

Можно легко убедиться, что в рассматриваемом случае средний импульс фотоэлектрона в состоянии (5) равен нулю:

$$\langle k_{x,y} \rangle_4 = \int k_{x,y} |\tilde{\Psi}_4(\mathbf{k}, t)|^2 \frac{d^2k}{2\pi} = 0, \quad (8)$$

где  $k_x = k \cos(\varphi_k)$ ,  $k_y = k \sin(\varphi_k)$ .

Если вспомнить взятые параметры импульса, то этот результат кажется естественным. Однако надо учитывать, что используемая волновая функция (3) получена отбрасыванием связанного состояния электрона и заменой кулоновских волн на цилиндрические.

С математической точки зрения выражение (8) содержит следующие интегралы:

$$\int_0^{2\pi} \cos(\varphi_k) \cos(n\varphi_k) d\varphi_k, \quad \int_0^{2\pi} \sin(\varphi_k) \cos(n\varphi_k) d\varphi_k,$$

которые в нашем случае  $n = 0, 2, 4$  обращают его в ноль.

Дисперсия любой из компонент импульса не равна нулю:

$$\langle k_{x,y}^2 \rangle_4 = \int k_{x,y}^2 |\tilde{\Psi}_4(\mathbf{k}, t)|^2 \frac{d^2k}{2\pi} \neq 0. \quad (9)$$

Интеграл (9) не удастся вычислить аналитически. Ниже сравним численные значения интеграла (9) с значениями, найденными приближенно.

Несмотря на относительно простой вид волновой функции (5), при попытке записать ее в координатном представлении наталкиваешься на существенные трудности при преобразовании Ханкеля [11]. Именно по этой причине исследование вихрей в обычном пространстве проводилось нами ранее только с помощью численного решения уравнения Шредингера.

Далее будем интересоваться поведением фотоэлектрона вблизи центров квантовых вихрей. Для этого разложим волновую функцию (5) в ряд Тейлора вблизи  $k_0$ . Так, для отдельных функций из (5) имеем

$$\sin(k^2 + 1) \approx (k^2 - k_0^2),$$

$$\frac{1}{(k^2 + 1)^{3/2}(k^2 + (2\pi + 1))} = e^{-\ln[(k^2+1)^{3/2}(k^2+(2\pi+1))]} \approx \frac{1}{8\sqrt{2}\pi^{5/2}} e^{-\frac{k^2-k_0^2}{\pi}},$$

$$\frac{1}{(k^2 + 1)^{5/2}((k^2 + 1)^2 - 16\pi^2)} = e^{-\ln[(k^2+1)^{5/2}((k^2+1)^2-16\pi^2)]} \approx -\frac{1}{48\sqrt{2}\pi^{9/2}} e^{-\frac{k^2-k_0^2}{\pi}}. \quad (10)$$

Учтем, что  $((k^2 + 1)^2 - 4\pi^2) = (k^2 - k_0^2)(k^2 + (2\pi + 1))$ , и опустим малое слагаемое, пропорциональное  $\cos^2(\varphi_k)$  ( $\varphi_k \approx \varphi_0$ ).

Тогда волновая функция фотоэлектрона (5) вблизи центра вихря примет следующий вид:

$$\tilde{\Psi}_{4,ap}(k, \varphi_k, \tau) = A e^{-\frac{a(\tau)}{2\sqrt{\pi}}k^2} \left[ k \cos(\varphi_k) + \frac{iF_0(k^2 - k_0^2)}{3\pi^2} \right], \quad (11)$$

где  $a(\tau) = (2 + i\pi\tau)/\sqrt{\pi}$ ,  $\tau = (t - 4/2)$ .

Полученное выражение (11) представляет собой гауссову функцию, умноженную на полином второй степени относительно компонент импульса (добавленный нижний индекс „ $a p$ “ есть сокращение от „approximation“). Из структуры этого полинома легко определить нули волновой функции, соответствующие центрам вихрей  $(k_0, \varphi_0)$  (6).

Вычисляя с помощью (11) средний импульс фотоэлектрона, убеждаемся, что как и в случае с „точной“ волновой функцией (5), он равен нулю  $\langle k_{x,y} \rangle_{4,ap} = 0$ . Для дисперсии получаем следующие выражения:

$$\langle k_x^2 \rangle_{4,ap} = \frac{\pi}{4} \frac{[27\pi^5 + F_0^2(4 - 8\pi + 6\pi^2)]}{9\pi^5 + 2F_0^2(2 - 6\pi + 5\pi^2)} \approx \frac{3\pi}{4},$$

$$\langle k_y^2 \rangle_{4,ap} = \frac{\pi}{4} \frac{[9\pi^5 + F_0^2(4 - 8\pi + 6\pi^2)]}{9\pi^5 + 2F_0^2(2 - 6\pi + 5\pi^2)} \approx \frac{\pi}{4}. \quad (12)$$

Видно, что зависимость от напряженности поля очень слабая. Если сравнить приближенные значения дисперсии (12) с соответствующими численными значениями, полученными с помощью (5), то последние примерно в 1.2 раза больше приближенных.

Основное преимущество выражения (11) по сравнению с его точным аналогом (5) заключается в том, что его легко можно переписать в координатном представлении. Не вдаваясь в подробности простых вычислений,

выпишем ответ:

$$\psi_4(r, \varphi, \tau) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{\Psi}_{4,ap}(k, \varphi_k, \tau) e^{ikr \cos(\varphi_k - \varphi)} \times \frac{kdkd\varphi_k}{(2\pi)^2} = \frac{\tilde{A}}{|a(\tau)|^3} e^{-\frac{r^2}{|a(\tau)|^2} + i\frac{\pi r^2 \tau}{2|a(\tau)|^2}} \times [(F_0(4(\pi - 1) + \pi^2(r^2 - k_0^2\tau^2)) - 6\pi^3 r \cos(\varphi)) + i\pi\tau(2F_0(3\pi - 2) - 3\pi^3 r \cos(\varphi))], \quad (13)$$

где  $\tilde{A}$  — константа,  $\mathbf{r} = (r, \varphi)$  — полярные координаты фотоэлектрона и  $|a(\tau)|^2 = (4 + \pi^2\tau^2)/\pi$ .

Используя (13), легко находим средние значения координат фотоэлектрона и их дисперсию:

$$\langle x \rangle_4 \approx -\frac{12k_0^2}{9\pi^5} F_0, \quad \langle y \rangle_4 = 0.$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_4 = \langle x^2 \rangle_4 - \langle x \rangle_4^2 \approx \frac{3\pi\tau^2}{4},$$

$$\langle (\Delta y)^2 \rangle_4 = \langle y^2 \rangle_4 - \langle y \rangle_4^2 \approx \frac{\pi\tau^2}{4}. \quad (14)$$

При этом, как и должно быть,  $|a(\tau)|^2 \approx \langle (\Delta x)^2 \rangle_4 + \langle (\Delta y)^2 \rangle_4$ .

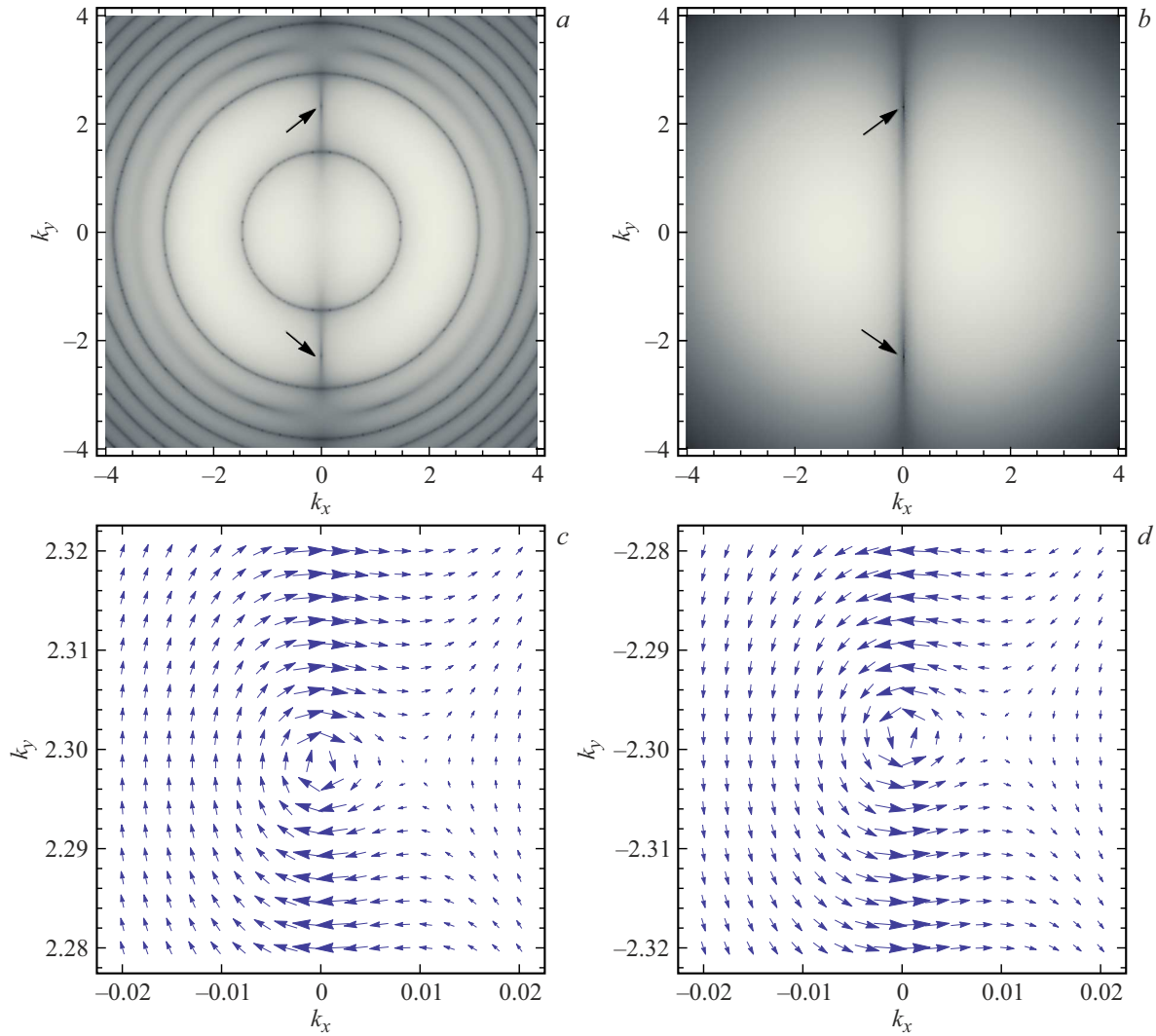
Полученная волновая функция в координатном представлении (13) имеет сходную структуру с волновой функцией в импульсном представлении (11). Гауссов множитель описывает расплывание образованного волнового пакета. Полином второй степени относительно координат фотоэлектрона несет информацию о квантовом вихре в обычном пространстве. Приравнявая нулю реальную и мнимую части выражения в квадратных скобках в (13) и решая получившуюся систему уравнений, находим координаты центров вихрей:

$$x_0 = \frac{F_0(6\pi - 4)}{3\pi^3},$$

$$y_0 = \pm \sqrt{\frac{k_0^2 |a(\tau)|^2}{\pi} - x_0^2} \approx \pm k_0 \tau. \quad (15)$$

Из (15) делаем очевидные выводы: вихрь перемещается со скоростью, равной  $k_0$ , определяющим ноль волновой функции в импульсном пространстве; для рассмотренного четного  $T$  перемещение вихря будет происходить вдоль оси, перпендикулярной направлению линейной поляризации ионизирующего поля. Это косвенно указывает на то, что природа вихрей обусловлена интерференцией состояний, относящихся к встречным волнам.

*Случай  $T = 3$ .* В случае нечетной длительности  $T = 3$  волновая функция фотоэлектрона, полученная с учетом



**Рис. 1.** Распределение по импульсам фотоэлектрона  $\ln[\rho(k_x, k_y)]$ :  $a - \rho(\mathbf{k}) = |\tilde{\Psi}_4(\mathbf{k}, t)|^2$ ,  $b - \rho(\mathbf{k}) = |\tilde{\Psi}_{4,ap}(\mathbf{k}, t)|^2$ .  $c$  и  $d -$  векторное поле  $\tilde{\mathbf{v}}(k_x, k_y, t)$  вблизи центров квантовых вихрей. Длительность импульса  $T = 4$ . Напряженность лазерного поля  $F_0 = 0.4$  и  $t = 5$ .

второго порядка теории возмущений, имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}'_3(k, \varphi_k, t) = & A \frac{e^{-iE_k t}}{(k^2 + 1)^{7/2}} \\ & \times \left[ \frac{8i\pi^4 e^{\frac{3}{4}i(k^2+1)} (k^2 + 1)^2 \cos(\frac{3}{4}(k^2 + 1))k \cos(\varphi_k)}{(k^2 + 1)^2 - 4\pi^2} \right. \\ & - \frac{4\pi^2 F_0}{(k^2 + 1)^4 - 20\pi^2(k^2 + 1)^2 + 64\pi^4} \left[ k^2 \cos(2\varphi_k) \right. \\ & \times (((k^2 + 1)^2 - 9\pi^2)(k^2 + 1)^2 + \pi^2 e^{\frac{3}{2}i(k^2+1)}) \\ & \times (4\pi^2 - 7(k^2 + 1)^2) - 4\pi^4 + (4\pi^4 k^2 - \pi^2 e^{\frac{3}{2}i(k^2+1)}) \\ & \times ((5k^2 - 2)(k^2 + 1)^2 + 4\pi^2(k^2 + 2)) + (k^2 + 1)^2 \\ & \left. \left. \left. \times (k^6 + 2k^4 - 11\pi^2 k^2 + k^2 - 2\pi^2) + 8\pi^4 \right) \right] \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, волновая функция (16) позволяет идентифицировать нули, соответствующие центрам вихрей [4]. Таких нулей четыре, декартовы координаты которых

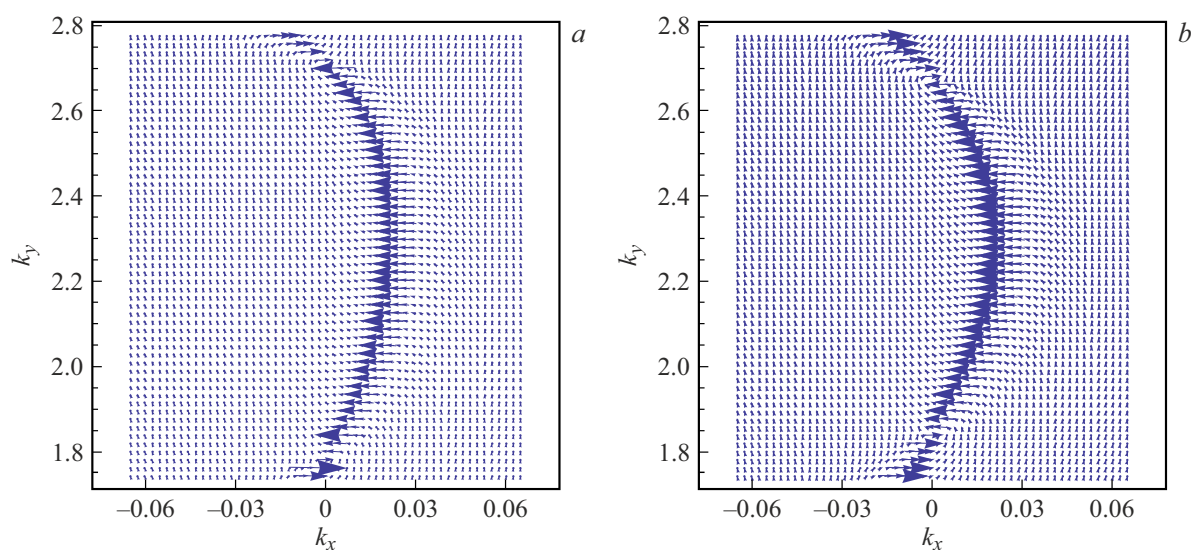
$$\begin{aligned} k_{x01} = 0, \quad k_{y01} = & \pm\sqrt{4\pi/3 - 1} \approx \pm 1.79, \\ k_{x02} = 0, \quad k_{y02} = & \pm\sqrt{8\pi/3 - 1} \approx \pm 2.72. \end{aligned} \quad (17)$$

Полярные координаты

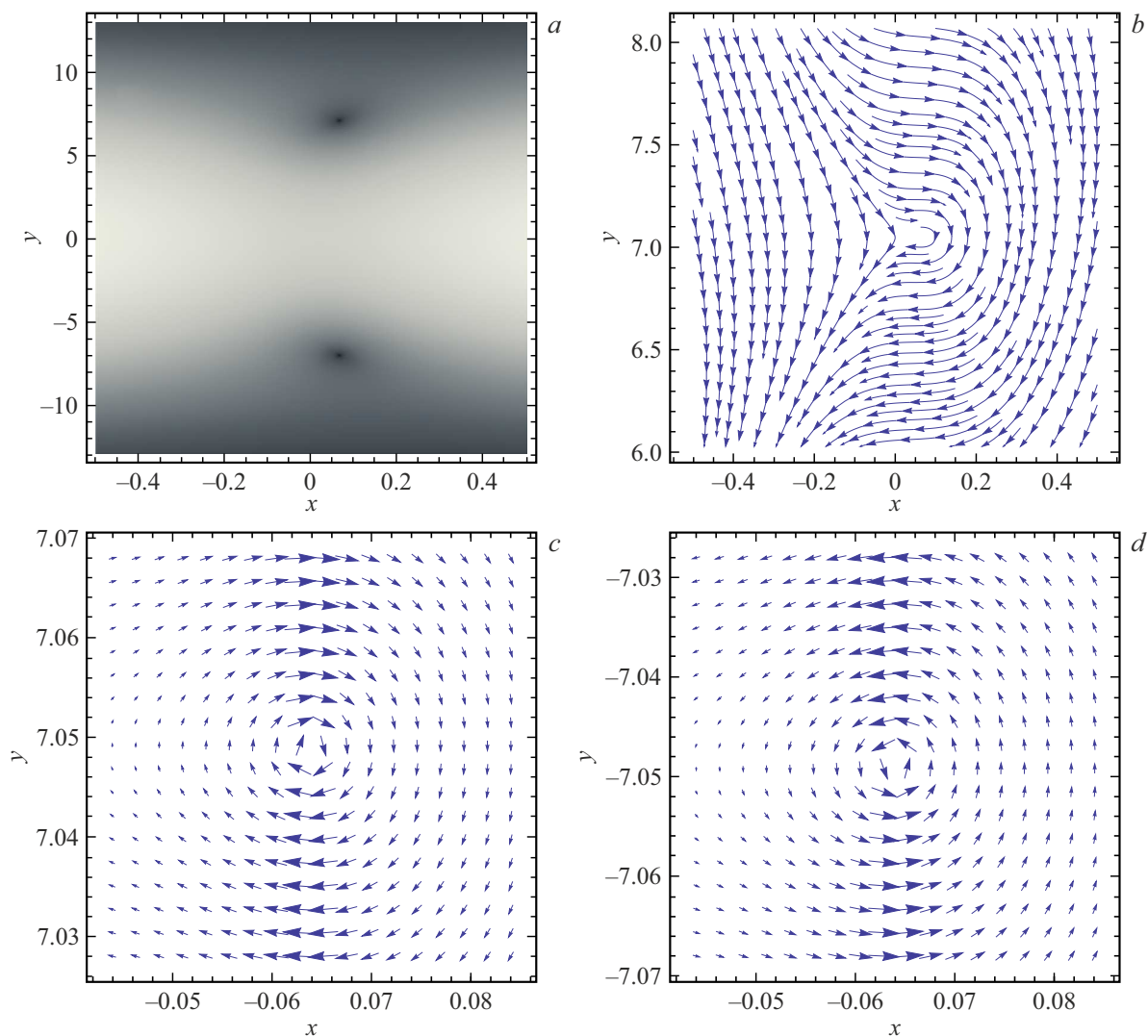
$$\begin{aligned} k_{01} = \sqrt{4\pi/3 - 1}, \quad \varphi_{01} = & \pi/2, 3\pi/2, \\ k_{02} = \sqrt{8\pi/3 - 1}, \quad \varphi_{02} = & \pi/2, 3\pi/2. \end{aligned} \quad (18)$$

То есть имеются две пары квантовых вихрей, симметричных относительно оси  $k_x$ .

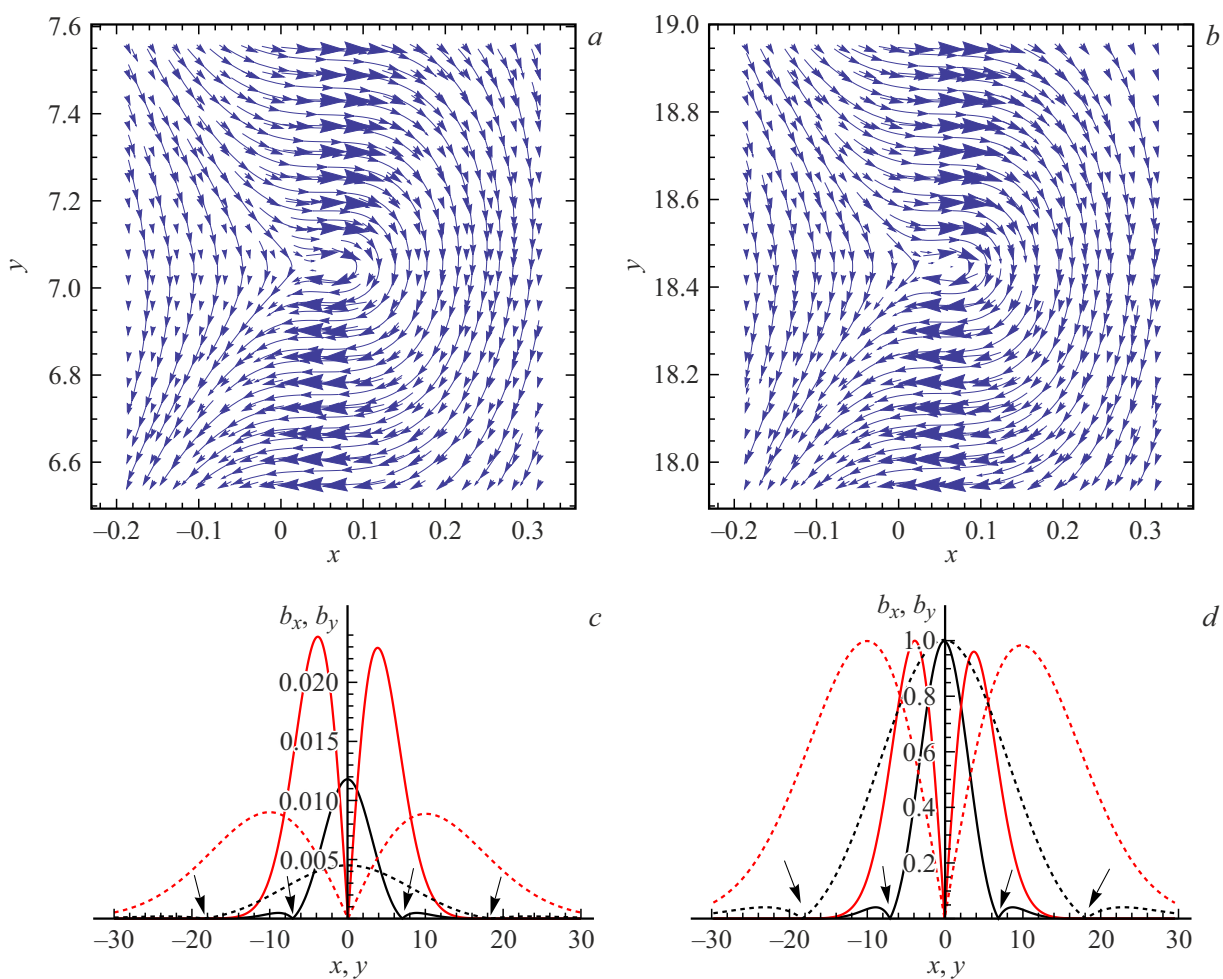
Однако „симметричный“ поток (7), построенный с помощью (16), не будет демонстрировать вихревое поведение вокруг центров этих вихрей. Здесь для рассматриваемого случая нечетного  $T$  необходимо учесть третий



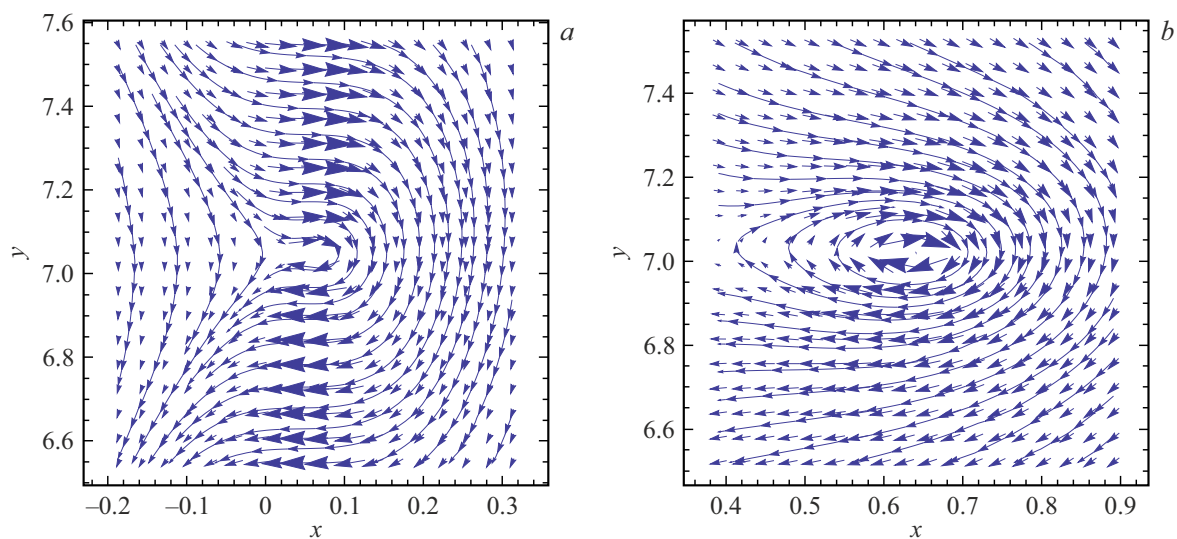
**Рис. 2.** *a* и *b* — векторное поле  $\vec{v}(k_x, k_y, t)$  вблизи центров квантовых вихрей. Длительность импульса  $T = 3$ . Напряженность лазерного поля  $F_0 = 0.5$  и  $t = 4$ .



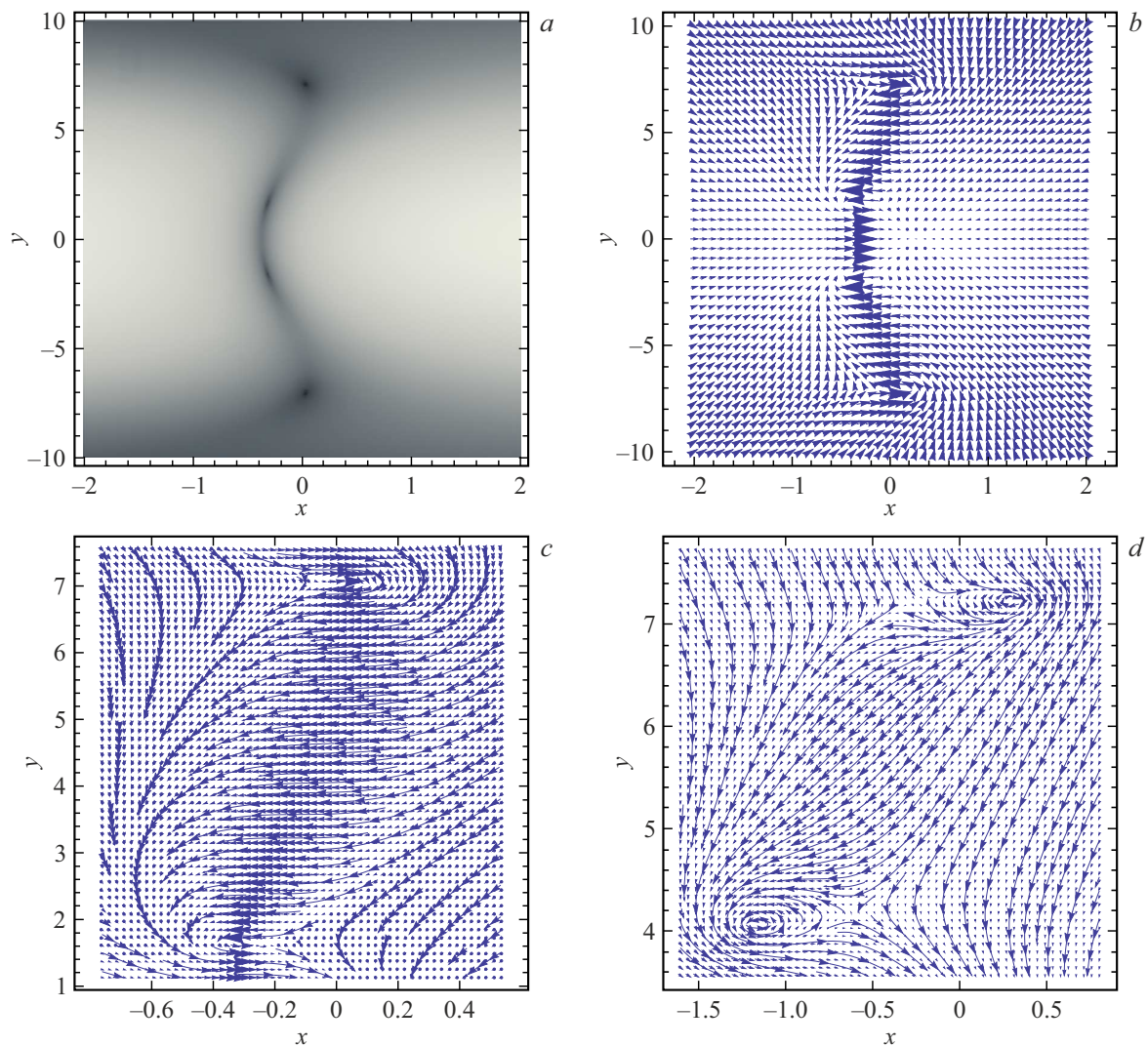
**Рис. 3.** *a* — распределение по координатам фотоэлектрона  $\ln[\rho(x, y, t)]$ . *b, c, d* — векторное поле  $\vec{v}(x, y, t)$  вблизи центров квантовых вихрей. Длительность импульса  $T = 4$ . Напряженность лазерного поля  $F_0 = 0.4$ . Момент времени  $t = 5$ .



**Рис. 4.** Векторное поле  $\mathbf{v}(x, y, t_i)$  вблизи центров квантовых вихрей в разные моменты времени:  $a$  —  $t_1 = 5$ ,  $b$  —  $t_2 = 10$ .  $c, d$  — зависимость абсолютных значений волновой функции  $b_x$  (красная кривая),  $b_y$  (черная кривая) от компонент  $x, y$  соответственно:  $t_1 = 5$  — сплошная линия,  $t_2 = 10$  — штриховая линия. Стрелками указаны центры вихрей. Длительность импульса  $T = 4$ . Напряженность лазерного поля  $F_0 = 0.4$ .



**Рис. 5.** Векторное поле  $\mathbf{v}(x, y, t_i)$  вблизи центра квантового вихря:  $a$  —  $F_0 = 0.4$ ,  $x_0 = 0.064$ ,  $y_0 = 7.049$ ;  $b$  —  $F_0 = 4$ ,  $x_0 = 0.639$ ,  $y_0 = 7.02$ . Длительность импульса  $T = 4$ . Момент времени  $t = 5$ .



**Рис. 6.** *a* — распределение по координатам фотоэлектрона  $\ln[\rho(x, y, t)]$ , *b* — соответствующее векторное поле  $\mathbf{v}(x, y, t)$ . *c, d* — векторное поле  $\mathbf{v}(x, y, t)$  вблизи центров соседних вихрей. *a, b, c* —  $F_0 = 0.5$ . *d* —  $F_0 = 5$ . Длительность импульса  $T = 3$ . Момент времени  $t = 4$ .

порядок теории возмущений. Чтобы не загромождать текст, поправка третьего порядка  $\delta\Psi_3(k, \varphi_k, t)$  к (16) вынесена в Приложение.

Теперь будем интересоваться поведением волновой функции

$$\tilde{\Psi}_3(k, \varphi_k, t) = \tilde{\Psi}'_3(k, \varphi_k, t) + \delta\tilde{\Psi}_3(k, \varphi_k, t) \quad (19)$$

вблизи двух соседних вихрей (рис. 2).

Если мы поступим так же, как и в случае с  $T = 4$ , т.е. будем раскладывать волновую функцию в ряд Тейлора вблизи одного из центров, то потеряем информацию о близлежащем втором вихре. Поэтому проведем разложение вблизи резонансного значения  $k_r = \sqrt{2\pi - 1}$ , которое как раз лежит практически посередине между центрами двух соседних вихрей  $\sqrt{4\pi/3 - 1} < k_r < \sqrt{8\pi/3 - 1}$  (для случая  $T = 4$  значение  $k_r$  совпадало с координатой центра вихря  $k_0$ ).

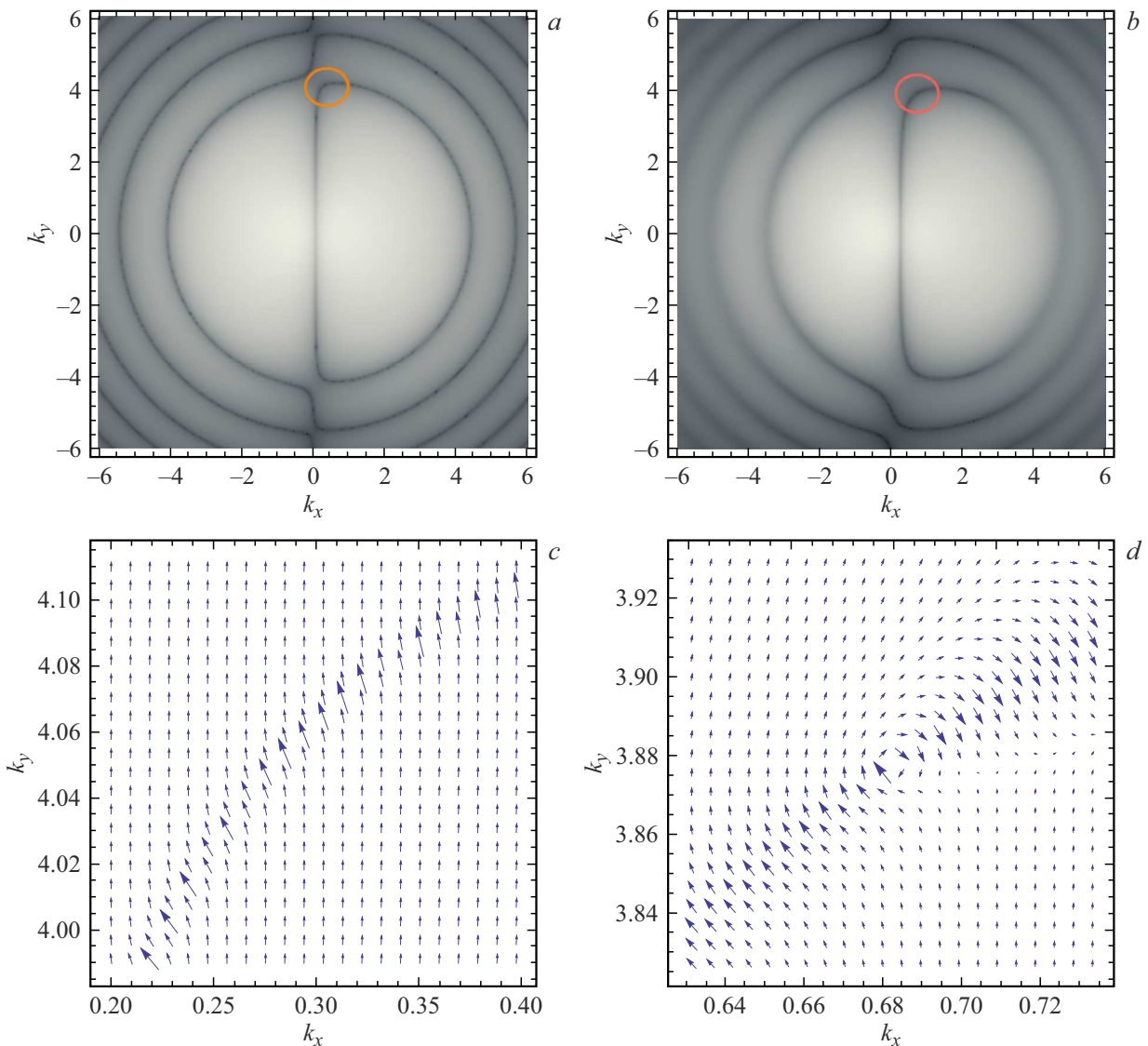
Последовательно, так же, как и в предыдущем случае, проделывая разложение  $\tilde{\Psi}_3(k, \varphi_k, t)$  (19), вблизи  $k_r$  приходим к следующему упрощенному выражению:

$$\tilde{\Psi}_{3,ap}(k, \varphi_k, \tau') = A e^{-\frac{a(\tau')}{2\sqrt{\pi}}k^2} \left[ \left( 1 - \frac{F_0^2}{2\pi^3} - i \left( \frac{4}{9\pi^4} + \frac{3}{8\pi^2} \right) F_0^2 \right) k \cos(\varphi_k) - \frac{4F_0(1 - \frac{9}{32}(k^2 - k_r^2)^2)}{9\pi^2} \right], \quad (20)$$

где слагаемые с  $F_0^2$  соответствуют третьему порядку теории возмущений и  $a(\tau') = (2 + i\pi\tau')/\sqrt{\pi}$ ,  $\tau' = t - 3/2$ .

Так же, как и в случае с  $T = 4$ , полином при гауссовой функции легко позволяет найти координаты центров вихрей. Однако здесь вследствие выбора точки разложения они немного смещены вдоль оси  $k_y$ :

$$k'_{01} = \sqrt{k_r^2 - 4\sqrt{2}/3} \approx 1.84 \approx k_{01},$$



**Рис. 7.** *a, b* — распределение по импульсам фотоэлектрона  $\ln[\rho(k_x, k_y)]$ . *c, d* — векторное поле  $\mathbf{v}(k_x, k_y, t)$  в области, выделенной кружком в *a, b*. *a, c* —  $F_0 = 0.5$ . *b, d* —  $F_0 = 2$ . Длительность импульса  $T = 1$ . Момент времени  $t = 2$ .

$$k'_{02} = \sqrt{k_r^2 + 4\sqrt{2}/3} \approx 2.68 \approx k_{02}. \quad (21)$$

нии:

Вычисляя наблюдаемые в состоянии (20) (или (19)), можно убедиться, что средний импульс фотоэлектрона вдоль направления  $x$  не равен нулю, т.е.  $\langle k_x \rangle_{3,ap} \neq 0$ ,  $\langle k_y \rangle_{3,ap} = 0$ . Что так же, как и в случае, разобранным выше, можно объяснить заданными параметрами импульса.

Выписывать явные выражения для средних  $\langle k_x \rangle_{3,ap}$  и  $\langle k_{x,y}^2 \rangle_{3,ap}$ , вычисленных с помощью (20), не будем из-за их громоздкости. Отметим только то, что эти выражения дают результаты, качественно совпадающие с результатами, вычисленными с помощью „точной“ волновой функции  $\tilde{\Psi}_3(k, \varphi_k, t)$  (19).

Применяя преобразование Фурье к (20), получаем соответствующую функцию в координатном представле-

$$\begin{aligned} \psi_3(r, \varphi, \tau') &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{\Psi}_{3,ap}(k, \varphi_k, \tau') e^{ikr \cos(\varphi_k - \varphi)} \\ &\times \frac{kdkd\varphi_k}{(2\pi)^2} = \frac{\tilde{A}}{|a(\tau')|^5} e^{-\frac{r^2}{|a(\tau')|^2} + i\frac{\pi r^2 \tau'}{2|a(\tau')|^2}} \\ &\times \left[ ia^3(\tau') \left( 1 - \frac{F_0^2}{2\pi^3} - i \left( \frac{4}{9\pi^4} + \frac{3}{8\pi^2} \right) F_0^2 \right) r \cos(\varphi) \right. \\ &\left. + \frac{F_0}{8\pi^{1/2}} \left( r^4 + c_1(\tau')r^2 + c_2(\tau') \right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

где коэффициенты  $c_i(\tau')$  из-за своей громоздкости вынесены в Приложение.



Функция (22) имеет ожидаемую структуру, подобную той, которая имела место при  $T = 4$ . Однако полином при гауссовой экспоненте, определяющий центры вихрей в обычном пространстве, имеет более сложную конструкцию, чем в (13). По этой причине выписывать нули этого полинома не будем.

В следующем разделе с помощью полученных волновых функций (13) и (22) исследуем квантовые вихри в координатном пространстве.

#### 4. Результаты расчетов

*Импульсное пространство.* Вначале проверим как изменилась плотность вероятности при разложении волновой функции вблизи центра вихря. Напомним, что везде момент времени  $t$  берется таким, что  $t > T$ .

На рис. 1 для случая  $T = 4$  представлены графики распределения по импульсам фотоэлектрона  $\rho(\mathbf{k})$  (для более четкого отображения графики строятся для  $\ln(\rho)$ ), построенного с помощью „точной“ волновой функции  $\tilde{\Psi}_4(\mathbf{k}, t)$  (5) (рис. 1, *a*) и с помощью ее приближенного выражения  $\tilde{\Psi}_{4,ap}(\mathbf{k}, t)$  (11) (рис. 1, *b*).

Разложение (10), примененное к функции  $\tilde{\Psi}_4(\mathbf{k}, t)$  (5), привело к потере информации о состояниях фотоэлектрона вдали от центров квантовых вихрей. Однако в непосредственной близости от них эта информация сохранилась, что видно не только по нулям плотности вероятности (стрелки), но и по характеру векторного поля для нормированного „симметричного“ потока (7) (рис. 1, *c, d*)

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) = \bar{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t)/\rho(\mathbf{k}). \quad (23)$$

Здесь представлено поле  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t)$ , полученное только с помощью приближенной функции (11). Для выбранной области значений  $k_x, k_x$  оно ничем не будет отличаться от поля, построенного с использованием „точной“ функции (5) [4].

Заметим, что верхний и нижний вихри абсолютно одинаковы, за исключением того, что направления вращений у них противоположны. Также отметим, что в силу свободного движения фотоэлектрона плотность вероятности  $\rho(\mathbf{k})$  записывается без аргумента  $t$ . Что касается „симметричного“ потока (7), то в силу его чувствительности к фазе волновой функции [5] временная зависимость сохраняется.

Векторное поле  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t)$  для случая  $T = 3$  представлено на рис. 2. Рассматривается верхняя полуплоскость, где локализована одна пара вихрей.

При использовании „точной“ волновой функции  $\tilde{\Psi}_3(\mathbf{k}, t)$  (19) координаты центров вихрей даются формулой (17) или (18) (рис. 2, *a*). Для приближенной функции  $\tilde{\Psi}_{3,ap}(\mathbf{k}, t)$  (20) эти координаты немного смещены (21) (рис. 2, *b*).

Плотности  $\rho(\mathbf{k})$ , построенные с помощью функций (19) и (20), будут отличаться друг от друга так же, как это было в случае с  $T = 4$  (рис. 1, *a, b*).

*Координатное пространство.* На рис. 3 для случая  $T = 4$  представлены распределение по координатам

фотоэлектрона  $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi_4(\mathbf{r}, t)|^2$  (рис. 3, *a*) и поле скоростей фотоэлектрона (рис. 3, *b, c, d*)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \text{Im}[\psi_4^*(\mathbf{r}, t)\nabla\psi_4(\mathbf{r}, t)]/\rho(\mathbf{r}, t) \quad (24)$$

(термин „поле скоростей“ заимствован из квантовой гидродинамики [12–14]), построенные с помощью найденной волновой функции (13).

Так же, как и в импульсном пространстве, имеются два симметричных вихря с противоположным направлением вращения (рис. 3, *c, d*). Координаты центров вихрей даются формулами (15) и равны  $x_0 = 0.064$ ,  $y_0 = \pm 7.049$ .

Отметим соответствие найденных вихрей в импульсном и координатном пространствах. Однако реальная структура вихрей в координатном пространстве, соответствующая „точной“ функции (5), будет отличаться от их структуры в импульсном пространстве. Отысывание в (5) слагаемого с  $\cos^2(\varphi_k)$  и аппроксимация гауссовой функцией рациональных функций от  $k$  стирает информацию о поведении фотоэлектрона вне области локализации вихря. В то же время преобразование Фурье затрагивает все возможные значения  $\mathbf{k}$ .

Теперь проследим временную эволюцию вихрей. На рис. 4 для двух различных моментов времени  $t_1 = 5$ ,  $t_2 = 10$  представлено поле  $\mathbf{v}(x, y, t_i)$ , а также следующие зависимости модуля волновой функции  $b_x(t_i) \equiv |\psi(x, y_0, t_i)|$ ,  $b_y(t_i) \equiv |\psi(x_0, y, t_i)|$  от одной из координат (рис. 4, *d* — нормированные на свои максимумы функции  $b_{x,y}$ ).

Видно, что расплывание волнового пакета, отображенное на графиках рис. 4, *c, d*, не изменяет геометрию и масштаба вихря на рис. 4, *a, b*. Вихрь перемещается в пространстве без изменений и координата его центра описывается формулой (15):  $t_1 — x_0 = 0.064$ ,  $y_0 = \pm 7.049$ ;  $t_2 — x_0 = 0.064$ ,  $y_0 = \pm 18.446$ .

На следующем рис. 5 построено поле скоростей фотоэлектрона  $\mathbf{v}(x, y, t)$  при разных значениях напряженности  $F_0$  ионизирующего лазерного импульса. Здесь, учитывая внезапность включения поля (2), мы выходим за пределы малых возмущений [15].

Из графиков видно, что увеличение напряженности поля  $F_0$  приводит к увеличению масштаба вихря. Построенные линии тока отчетливо демонстрируют, что в случае большей напряженности  $F_0$  поле скоростей  $\mathbf{v}(x, y, t)$  будет иметь соленоидальную структуру на гораздо больших масштабах, чем в случае малых напряженностей.

На рис. 6 представлены результаты, полученные с помощью волновой функции  $\psi_3(x, y, \tau')$  (22). Отчетливо видны нули в распределении по координатам фотоэлектрона (рис. 6, *a*), соответствующие центрам двух пар вихрей. На рис. 6, *b* построено соответствующее поле скоростей  $\mathbf{v}(x, y, t)$ , закручивающееся вокруг каждого из этих центров. При этом направление вращения вихрей такое же, как и в импульсном пространстве: пара вихрей в верхней полуплоскости с противоположным направлением вращения и симметричная ей относительно оси  $x$  пара в нижней полуплоскости.

Координаты центров вихрей находятся приравниванием нулю действительной и мнимой частей полинома в выражении для волновой функции (22). Для случая, рассматриваемого на рис. 6, при заданном  $t = 4$  имеем:  $F_0 = 0.5$ :  $x_{01} = -0.31$ ,  $y_{01} = \pm 1.63$ ,  $x_{02} = 0.034$ ,  $y_{02} = \pm 7.05$ ;  $F_0 = 5$ :  $x_{01} = -1.16$ ,  $y_{01} = \pm 4.07$ ,  $x_{02} = 0.3$ ,  $y_{02} = \pm 7.22$ .

Так же, как и в случае с четным  $T$ , увеличение напряженности приводит к увеличению масштаба вихря (рис. 6, *c, d*).

Явная временная зависимость координат центров вихрей в случае с функцией  $\psi_3(x, y, \tau')$  (22) имеет сложный вид и не сводится к простому движению наподобие (15).

При расплывании волнового пакета, соответствующего  $\psi_3(x, y, \tau')$  (22), вихри сохраняются.

*Длительность*  $T = 1$ . Как отмечалось ранее [2,3], при длительности импульса, равной половине периода, т.е.  $T = 1$ , для случая  $F_0 < 1$  вихри не наблюдаются. С другой стороны, как показано выше, увеличение амплитуды поля  $F_0$  приводит к увеличению масштаба вихря. Поэтому представляет интерес рассмотреть случай с  $T = 1$  для разных значений  $F_0$ .

На рис. 7 при  $T = 1$  и двух разных напряженностях  $F_0 = 0.5, 2$  представлены графики плотности вероятности  $\rho(\mathbf{k})$  и векторного поля  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t)$ . Видно, что увеличение напряженности поля приводит к образованию вихрей (рис. 7, *d*). Это есть проявление известного факта зависимости вероятности перехода от интенсивности поля и длительности его воздействия на квантовую систему [15].

При  $F_0 = 0.5$  длительности импульса  $T = 1$  не хватает для перехода электрона из связанного состояния в состояние непрерывного спектра, ответственные за образования вихрей [4]. Увеличение напряженности компенсирует такую малую длительность и вероятность перехода в необходимые состояния возрастает.

Как отмечалось выше, для идентификации вихрей в случае с  $T = 3$  (рис. 2) необходимо учитывать третий порядок теории возмущений. Однако, как показывают предварительные вычисления, если взять  $F_0 > 1$ , то вихри можно увидеть уже и во втором порядке.

## 5. Заключение

В данной работе для фотоэлектрона, вырванного из двумерного атома водорода предельно коротким лазерным импульсом, была получена волновая функция, описывающая квантовые вихри. Аналитическое выражение этой волновой функции как в импульсном, так и в координатном представлениях имеет простой вид — гауссова функция, умноженная на полином относительно координат фотоэлектрона. Полином несет информацию о центрах квантовых вихрей и отвечает за вихревое поведение поля скоростей фотоэлектрона, а гауссова функция описывает расплывание образованного волнового пакета.

Полученная волновая функция позволила исследовать эволюцию квантового вихря в координатном пространстве: вихрь перемещается в пространстве без искажений со скоростью, определяемой нулем волновой функции в импульсном пространстве, соответствующем центру квантового вихря.

Показано, что масштаб вихря, формально определяемый как область, в которой векторное поле скоростей близко к соленоидальному, может быть изменен варьированием напряженности электрического поля ионизирующего импульса. В частности, малая длительность импульса, при которой вихри не успевают образоваться, может быть скомпенсирована увеличением напряженности поля.

Необходимо отметить, что рассмотренный здесь предел сильного поля  $F_0 > 1$ , конечно же, требует более строгого подхода. Более того, используемые изначально приближения по сути свели рассматриваемую задачу о фотоэлектроне к анализу специфического состояния свободной частицы, зависящего от напряженности  $F_0$  как от внешнего параметра.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Приложение

Поправка третьего порядка к волновой функции фотоэлектрона (16):

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\Psi}_3(k, \varphi_k, t) = & A \frac{e^{-iE_k t}}{(k^2 + 1)^{7/2}} \\ & \times \frac{-iF_0^2 e^{\frac{3}{4}i(k^2+1)} k \cos(\varphi_k)}{((k^2 + 1)^2 - 4\pi^2)^2 ((k^2 + 1)^4 - 52\pi^2(k^2 + 1)^2 + 576\pi^4)} \\ & \times \left[ \cos\left(\frac{3}{4}(k^2 + 1)\right) (16\pi^2 - (k^2 + 1)^2) \right. \\ & \times \left[ -4k^2(k^2 + 1)^6 - i\pi^2(3(k^2 + (2 + 40i))k^2 + (3 + 16i)) \right. \\ & \times (k^2 + 1)^4 + 24\pi^4(k^2 + 1)^2(5ik^4 - (6 - 10i)k^2 \\ & + (12 + 5i)) - 16i\pi^6(27k^4 + (54 - 4i)k^2 + (27 - 24i)) \\ & - 4k^2((k^2 + 1)^6 - 26\pi^2(k^2 + 1)^4 + 108\pi^4(k^2 + 1)^2 \\ & \left. \left. - 80\pi^6) \cos(2\varphi_k) \right] - \sin\left(\frac{3}{4}(k^2 + 1)\right) ((k^2 + 1)^4 \right. \\ & - 40\pi^2(k^2 + 1)^2 + 144\pi^4) \left[ 4ik^2(k^2 + 1)^4 - \pi^2(k^2 + 1)^2 \right. \\ & \times (3(k^2 + (2 + 8i))k^2 + (3 + 16i)) + 16\pi^4(3k^4 \\ & + (6 + 2i)k^2 + (3 + 4i)) + 4ik^2((k^2 + 1)^4 \\ & \left. \left. - 2\pi^2(k^2 + 1)^2 - 8\pi^4) \cos(2\varphi_k) \right] \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Коэффициенты, входящие в волновую функцию фотоэлектрона в координатном представлении (22):

$$c_1(\tau') = \frac{2k_r^2 a^2(\tau')}{\pi} - \frac{8a(\tau')}{\pi^{1/2}},$$

$$c_2(\tau') = \frac{(36\pi^2 - 36\pi - 23)a^4(\tau')}{9\pi^2} - \frac{4k_r^2 a^3(\tau')}{\pi^{3/2}} + \frac{8a^2(\tau')}{\pi}. \quad (26)$$

## Список литературы

- [1] Н.В. Ларионов, Д.Н. Макаров, А.А. Смирновский, С.Ю. Овчинников. *ЖЭТФ*, **156**, 1035 (2019). DOI: 10.1134/S0044451019120010.
- [2] С.Ю. Овчинников, Н.В. Ларионов, А.А. Смирновский, А.А. Шмидт. *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки*, **10**, 111 (2017). DOI: 10.18721/JPM.10409
- [3] Н.В. Ларионов, В.М. Молчановский. *Опт. и спектр.*, **131**, 1449 (2023). DOI: 10.61011/OS.2023.11.56998.5238-23
- [4] Н.В. Ларионов. *ЖЭТФ*, **165**, 317 (2024). DOI: 10.31857/S0044451024030027
- [5] R.F. Nalewajski. *J. Math. Chem.*, **53**, 1966 (2015). DOI: 10.1007/s10910-015-0526-2
- [6] В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган. *Задачи по квантовой механике: учебное пособие для вузов* (Наука, М., 1992).
- [7] М.В. Федоров. *ЖЭТФ*, **149**, 522 (2016).
- [8] S.Y. Ovchinnikov, J. Sternberg, J. Macek, T.-G. Lee, D.R. Schultz. *Phys. Rev. Lett.*, **105**, 203005 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.203005
- [9] F. Navarrete, R. Della Picca, J. Fiol, R.O. Barrachina. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.*, **46**, 115203 (2013). DOI: 10.1088/0953-4075/46/11/115203
- [10] S.Y. Ovchinnikov, J.H. Macek, D.R. Schultz. *Phys. Rev. A*, **90**, 062713 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevA.90.062713
- [11] В.А. Диткин, А.П. Прудников. *Интегральные преобразования и операционное исчисление* (Физматгиз, М., 1961).
- [12] E. Madelung. *Z. Phys.*, **40**, 332–326 (1926).
- [13] T. Takabayashi. *Prog. Theor. Phys.*, **8**, 143 (1952).
- [14] A. Visinescu, D. Grecu, R. Fedele, S. De Nicola. *Theor. Math. Phys.*, **160**, 1066–1074 (2009). DOI: 10.1007/s11232-009-0098-z
- [15] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)* (Физматлит, М., 2004).