

01.1;01.4;06.1;13.1

Волновые функции и уровни энергии с учетом поверхностного потенциала в геликоидально скрученной наноленте для частиц Шредингера

© С.Н. Скрябин, Ю.А. Петрова, Н.Р. Садыков

Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета „МИФИ“,
Снежинск, Челябинская обл., Россия
E-mail: stepan.skryabin.04@mail.ru

Поступило в Редакцию 6 марта 2023 г.

В окончательной редакции 18 марта 2024 г.

Принято к публикации 22 апреля 2024 г.

Для узких плоских или геликоидально скрученных нанолент с кресельными краями исследовано влияние поверхностного потенциала на параметры стационарных состояний электронов вблизи точек Дирака. Для этого реализованы алгоритмы поиска собственных значений энергии и собственных функций стационарных состояний в поперечном и продольном направлениях. Из результатов расчетов следует, что при определенных параметрах наноленты возможна ситуация, когда ее упругие свойства исчезают.

Ключевые слова: четырехточечная элементарная ячейка, поверхностный потенциал, наноленты кресельного типа, поверхностная энергия, метод обратных итераций, уровни энергии стационарных состояний.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.15.58440.19547

Графен — материал для уникальных наноструктур, которые по аналогии с твердыми телами рассматриваются как сплошные среды. Такие среды обладают характеристиками, которые описываются в рамках теории упругости: модуль Юнга, коэффициент Пуассона, угол скручивания, тензор деформаций, тензор напряжений и т.д. Такие механические характеристики графена можно использовать для проектирования различных датчиков. Например, слабая устойчивость графена к изгибу может быть использована для высокочувствительных датчиков давления.

Один из эффектов, которые проявляются в наночастицах, — поверхностный потенциал. В последнее время привлекает внимание возможность использования поверхностного потенциала в квантовой механике, что позволяет исследовать влияние кривизны в контексте низкоразмерных систем. В работах [1–3] исходя из уравнения Шредингера для бесспинового электронного газа исследуются физические эффекты за счет искривления поверхности в присутствии внешнего магнитного поля. В работах [1,2] бесспиновый электронный газ был ограничен двумерной локализованной поверхностью конуса, а в работе [3] рассмотрены зависящие от положения массовые эффекты в случае электронного транспорта в изогнутых двумерных квантовых системах (развитый формализм применяется к деформированным нанотрубкам).

В настоящей работе определена величина свободной энергии скрученной наноленты за счет упругих деформаций. Исходя из двумерного уравнения Шредингера рассмотрено влияние поверхностного потенциала на величину свободной энергии скрученной наноленты, которая в свою очередь приводит к уменьшению кру-

тильных колебаний наноленты. Приведены результаты математического моделирования и численных расчетов, полученные на основе теоретических данных.

Согласно [4], в трехмерной криволинейной системе координат

$$\mathbf{R}(q^1, q^2, q^3) = \mathbf{r}(q^1, q^2) + q^3 \hat{\mathbf{N}}(q^1, q^2) \quad (1)$$

выражение для поверхностной потенциальной энергии имеет вид

$$\begin{aligned} V_S &= -\frac{\hbar^2}{8m_e} \left[\frac{1}{f^2} \left(\frac{\partial f}{\partial q^3} \right)^2 - \frac{2}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial (q^3)^2} \right] \Big|_{q^3=0} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} (M^2 - K) = -\frac{\hbar^2}{8m_e} (\lambda_1 - \lambda_2)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

где m_e — масса электрона; V_S зависит от чисто геометрических параметров двумерной поверхности $\mathbf{r}(q^1, q^2)$; $\hat{\mathbf{N}}(q^1, q^2)$ является единичной нормалью к поверхности в рассматриваемой точке; $\mathbf{R}(q^1, q^2, q^3)$ — радиус-вектор точек в небольшой окрестности рассматриваемой поверхности. В (2) $f = \sqrt{G/g}$, G и g — определители метрических тензоров $G_{ij} = (\partial \mathbf{R} / \partial q^i) (\partial \mathbf{R} / \partial q^j)$ и $g_{\alpha\beta} = (\partial \mathbf{r} / \partial q^\alpha) (\partial \mathbf{r} / \partial q^\beta)$ соответственно; $dS = \sqrt{g} dq^1 dq^2$ — элементарная площадь двумерной поверхности; $dV = \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3$ — элементарный объем; λ_1, λ_2 — главные кривизны, которые определяют среднюю кривизну M и кривизну Гаусса K [5] поверхности, являются решением уравнения [5,6]:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda g_{11} & b_{12} - \lambda g_{12} \\ b_{21} - \lambda g_{21} & b_{22} - \lambda g_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

В (3) метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ двумерной поверхности и тензор второго ранга размерности два $b_{\alpha\beta}$ — это первая и вторая квадратичные формы [5] соответственно. Согласно [4], в (2) поверхностный потенциал V_S возникает как результат разложения слагаемого $[-\hbar^2/(2m_e)]\Delta$ в трехмерном уравнении Шредингера на поверхностную часть для q^1 , q^2 и нормальную часть для q^3 (Δ — трехмерный оператор Лапласа). При переходе к двумерному уравнению Шредингера (двумерной поверхности) поверхностный потенциал V_S является следствием того, что двумерный оператор Лапласа получает поправку $\delta\Delta_{\perp} = -(\lambda_1 - \lambda_2)^2/4$. Из (2) следует, что поверхностный потенциал в любой точке поверхности всегда либо является отрицательной величиной, либо равняется нулю. Это означает, что учет данного слагаемого в двумерном уравнении Шредингера приведет к уменьшению значения уровня энергии стационарных состояний. Поскольку деформация поверхности за счет упругих сил (по аналогии с упругими силами при деформации металлических пластин) увеличивает потенциальную энергию пластин, поверхностный потенциал V_S из (2) будет конкурировать с поперечными упругими деформациями. Особенно сильно этот эффект будет проявляться в случае, когда будут существенно различаться главные кривизны λ_1 , λ_2 поверхности, например, когда $\lambda_2 = 0$ (цилиндр) или когда $\lambda_1 = -\lambda_2$ (геликоид).

Исходя из первой $g_{\alpha\beta}$ и второй $b_{\alpha\beta}$ квадратичных форм в геликоидальной системе координат, приведенных в работе [7], с учетом поверхностного потенциала для частиц, которые описываются уравнением Шредингера [4,8,9], получим уравнение для волновой функции частицы при наличии продольного электрического поля W

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\frac{\partial^2}{\partial(q^1)^2} + \frac{\kappa^2 q^1}{1 + (\kappa q^1)^2} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\kappa^2}{[1 + (\kappa q^1)^2]^2} \right] \Psi - \frac{\hbar^2}{2m_e [1 + (\kappa q^1)^2]} \frac{\partial^2}{\partial(q^2)^2} \Psi = (E - E_F + |e|Wq^2) \Psi. \quad (4)$$

В настоящей работе мы рассматриваем узкие длинные графеновые наноленты с кресельными краями (N -AGNR) с шахматной конфигурацией (рис. 1), где $N = 11$ [10,11]. При выполнении условия $\kappa q_{\max}^1 \ll 1$, ширине наноленты $H = m\sqrt{3}b \approx 1.23$ nm для $m = (N - 1)/2 = 5$ ($b = 0.142$ nm — расстояние между атомами углерода в графене) и длине периода геликоидальной наноленты $L = 10H$ получаем $[1 + (\kappa q_{\max}^1)^2] \approx 1.05$, где $q_{\max}^1 = H/2$, $\kappa L = 2\pi$. Поэтому уравнение (4) приближенно может быть решено численно методом разделения переменных $\Psi = \Phi_1(q^1)\Phi_2(q^2)$ с краевыми условиями $\Phi_2(q^2 = \pm 5L) = 0$, $\Phi_1(q^1 = \pm 5H) = 0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial(q^2)^2} \Phi_2 = -\frac{2m_e}{\hbar^2} (E - E_1 + |e|Wq^2) \Phi_2,$$

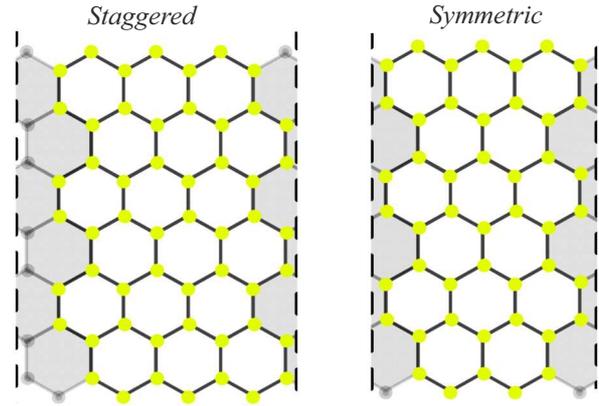


Рис. 1. Изображения наноленты с кресельными краями с шахматной (*Staggered*) и симметричной (*Symmetric*) конфигурациями.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(q^1)^2} + \frac{\kappa^2 q^1}{1 + (\kappa q^1)^2} \frac{\partial}{\partial q^1} + \frac{\kappa^2}{[1 + (\kappa q^1)^2]^2} \right] \Phi_1 = -\frac{2m_e}{\hbar^2} (E_1 - E_F) \Phi_1, \quad (5)$$

где L и H — длина и ширина наноленты, E — уровни энергии стационарных состояний, которые включают в себя уровни энергии в продольном ($E - E_1$) и поперечном ($E_1 - E_F$) направлениях. Решение для функции Φ_2 из первого уравнения в (5) может быть выражено также через функции Эйри $\text{Ai}(\xi)$ и $\text{Bi}(\xi)$ [12,13].

Теперь определим влияние поверхностного потенциала на величину свободной энергии $\tilde{\mathcal{F}}$ скрученной наноленты. Величина $\tilde{\mathcal{F}}$ складывается из разности уровней энергии стационарных состояний скрученной $E_n(\kappa)$ и плоской $E_n(\kappa = 0)$ нанолент:

$$\tilde{\mathcal{F}} \sim \Delta E = [E_n(\kappa) - E_F] - [E_n(\kappa = 0) - E_F] = E_n(\kappa) - E_n(\kappa = 0).$$

Поскольку первое уравнение для функции Φ_2 из системы (5) не зависит от параметра кручения κ , разность уровней энергии ΔE будет в основном определяться величиной разности уровней энергии в поперечном направлении $\Delta E_1 = E_{1,n}(\kappa) - E_{1,n}(\kappa = 0)$ для функции Φ_1 из уравнения (5):

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{F}L = [4HL/(3\sqrt{3}b^2)]\Delta E \approx [4HL/(3\sqrt{3}b^2)]\Delta E_1, \quad (6)$$

где $\Delta E \approx \Delta E_1 < 0$, выражение в квадратных скобках определяет число атомов углерода в наноленте. Так как второе и третье слагаемые в квадратных скобках в (5), которые выполняют роль оператора возмущения, пропорциональны κ^2 , поправка к энергии ΔE_1 также будет пропорциональна κ^2 .

Теперь определим величину свободной энергии скрученной наноленты за счет упругих деформаций, когда нанолента аппроксимируется длинной узкой тонкой

упругой пластиной, причем упругие параметры наноленты хорошо известны [14–16]. Для этого применим к нанолентам теорию деформации тонких стержней прямоугольного сечения [17]. Деформация кручения заключается в том, что в стержне, остающемся при этом прямым, каждое поперечное сечение поворачивается относительно нижележащих на угол $d\varphi = \tau dz$, где τ — угол кручения. Сама деформация кручения, т. е. относительные смещения соседних сечений стержня, предполагается малой. Условием этого является малость относительного поворота сечений, удаленных вдоль длины стержня на расстояния порядка его поперечных размеров R , т. е. $\tau R \ll 1$. Введем компоненты u_x, u_y вектора смещения, тензора деформации u_{ik} и напряжений σ_{ij} :

$$u_x = -\tau z y, \quad u_y = \tau z x, \quad u_z = \tau \psi(x, y),$$

$$u_{ik} = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_k + \partial u_k / \partial x_i), \quad (7)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \sigma} \left(u_{ij} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) + u_{ll} \delta_{ik} K$$

$$= \frac{E}{1 + \sigma} \left(u_{ij} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} u_{ll} \delta_{ik} \right), \quad (8)$$

где $\psi(x, y)$ — функция кручения, $u_{ll} = 0$ — деформация чистого сдвига. В случае тонкой пластины отличными от нуля будут компоненты σ_{xz}, σ_{yz} [17], которые могут быть выражены через вспомогательную функцию $\chi(x, y)$:

$$\sigma_{xz} = 2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu\tau \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (9)$$

где $\mu = E/[2(1 + \sigma)]$ — модуль сдвига. С учетом (9) получим уравнение для функции χ

$$\Delta \chi = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 = -1. \quad (10)$$

Свободная энергия механических деформаций F единицы объема скрученного стержня

$$F = \frac{\sigma_{ij} u_{ik}}{2} = \frac{1}{2\mu} \left[(\sigma_{xz})^2 + (\sigma_{yz})^2 \right] = 2\mu\tau^2 (\text{grad } \chi)^2. \quad (11)$$

Исходя из крутильной жесткости C стержня получим энергию кручения (свободную энергию) \mathcal{F} без учета поверхностного потенциала

$$\mathcal{F} = L \int F df = LC\tau^2 / 2,$$

$$C = 4\mu \int (\text{grad } \chi)^2 df = \frac{\mu H a^3}{3}, \quad (12)$$

где интегрирование производится по площади поперечного сечения стержня.

С учетом поверхностного потенциала уравнение для крутильных колебаний наноленты будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{C + C_{sp}}{\rho I} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad C_{sp} = - \left[\frac{8H}{3\sqrt{3}b^2 k^2} \right] \Delta E,$$

$$v_{sp} = \sqrt{\frac{C + C_{sp}}{\rho I}}, \quad \omega_{sp} = \frac{\pi v_{sp}}{L}, \quad (13)$$

$$C = \frac{2\mathcal{F}}{L\tau^2} \approx 6.84 \cdot 10^{-28} \text{ J} \cdot \text{m}, \quad (C + C_{sp})/C = 0.7, \quad (14)$$

где крутильная жесткость C вычислена при толщине наноленты $a = 0.154 \text{ nm}$, C_{sp} — величина, которая учитывает влияние поверхностного потенциала на частоту колебаний стержня.

В работе [18] результаты эволюции полной энергии систем демонстрируют полную структурную и энергетическую стабильность и, следовательно, подтверждают, что эти системы обладают высокой гибкостью и могут оставаться полностью неповрежденными при относительно высокой температуре, демонстрируя свою замечательную термическую стабильность. При анализе электронных свойств азотсодержащих углеродных нанолент, состоящих из 4–5–6–8-членных колец (carbon nanoribbons composed of 4–5–6–8-membered rings), получено, что изученные системы демонстрируют прямозонную полупроводниковую природу. Оцененная ширина запрещенной зоны составила 1.12 eV, что для системы C_{52} меньше значения 1.4 eV, измеренного экспериментально в [19]. В работе приняты фиксированные толщина и ширина этих нанолент (3.35 и 11.75 Å соответственно). Прогнозируемые модули упругости систем C_{52} , $C_{48}N_4-1$, $C_{48}N_4-2$, $C_{44}N_8$ и $C_{40}N_{12}$ составили 534, 500, 510, 473 и 493 GPa соответственно. Используемое в настоящей работе приближение, согласно которому углеродная нанолента аппроксимируется стержнями прямоугольного сечения (не учитываются пространственно направленные химические связи), является упрощенным по сравнению с работой [18]. Но поскольку геометрические размеры нанолент и прогнозируемые модули упругости систем в работе [18] соответствуют используемым нами величинам, это позволяет надеяться на качественное совпадение полученных в работе теоретических результатов с реальными параметрами нанолент. Незначительное отличие используемой в настоящей работе величины модуля упругости от данных [18] можно объяснить тем, что углеродная нанолента является более однородной, чем рассмотренные в [18] наноленты (более точная аппроксимация нанолент стержнями прямоугольного сечения).

В работе была проведена серия численных расчетов для определения величины уровня энергии стационарных состояний и волновых функций в поперечном $\Phi_1(q^1)$ и продольном $\Phi_2(q^2)$ направлениях наноленты из уравнений (5). При проведении расчетов рассматривался профиль неглубокой потенциальной ямы в поперечном U_{tr} и продольном U_{lon} направлениях, которые имеют вид

$$U_{tr} = \begin{cases} E_F, & |q^1| \leq H/2, \\ 0, & H/2 < |q^1| \leq 5H, \end{cases} \quad (15)$$

Таблица 1. Уровни энергии стационарных состояний $E_1 = E_{1,n}(\kappa)$ в поперечном направлении и $E = E_n(\kappa)$ в продольном направлении для потенциальных ям с профилями (15) и (16)

Номер состояния n	Уровни энергии в продольном направлении (рис. 2, <i>b</i>)		Уровни энергии в поперечном направлении (рис. 2, <i>a</i>)	
	Плоская AGNR, $E_n(\kappa = 0)$, eV	Геликоидальная AGNR, $E_n(\kappa)$, eV	Плоская AGNR, $E_{1,n}(\kappa = 0)$, eV	Геликоидальная AGNR, $E_{1,n}(\kappa)$, eV
1	-6.2297	-6.2440	-6.2039	-6.2182
2	-6.2024	-6.2166	-5.6186	-5.6418
3	-6.1800	-6.1942	-4.6538	-4.6671
4	-6.1597	-6.1740	-3.3317	-3.3545
5	-6.1386	-6.1528	-1.7062	-1.7183
6	-6.1132	-6.1275	-0.0479	-0.0645

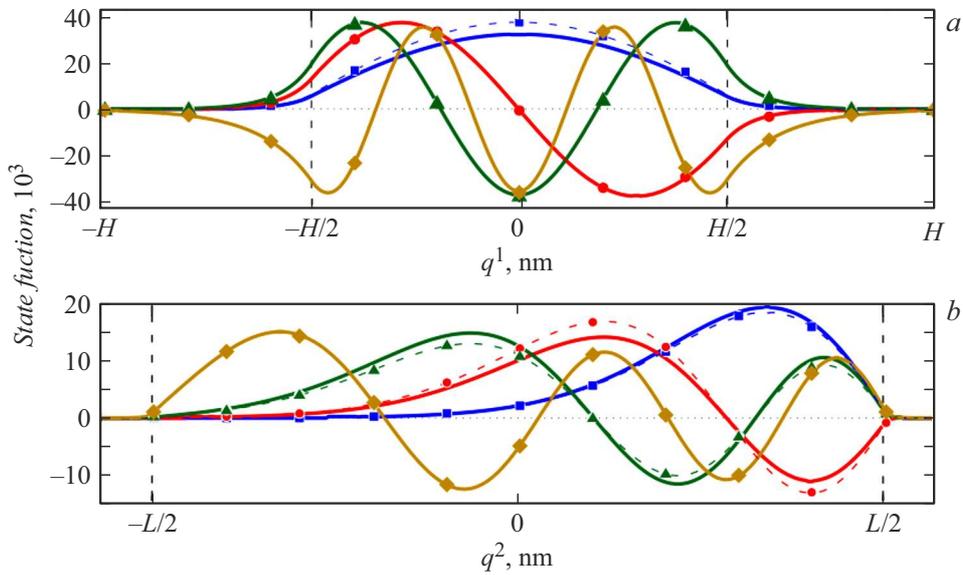


Рис. 2. Зависимости нормированных функций состояний в наноленте. *a* — волновые функции в поперечном направлении в зависимости от q^1 ($H = 1.23$ nm), где $|q^1| \leq 5H$. *b* — волновые функции в продольном направлении в зависимости от q^2 ($L = 12.3$ nm), где $|q^2| \leq 5L$. Штриховые вертикальные прямые отвечают краям и концам наноленты $q^1 = \pm H/2$ и $q^2 = \pm L/2$ соответственно. Сплошные кривые соответствуют случаю скрученной наноленты, а штриховые кривые с различными символами — плоской ($\kappa = 0$) наноленте.

$$U_{lon} = \begin{cases} E_1 - |e|Wq^2, & |q^2| \leq L/2, \\ -|e|Wq^2, & L/2 < |q^2| \leq 5L, \end{cases} \quad (16)$$

где $E_F = -6.4$ eV, величина E_1 определена в (5). Расчеты проведены на основе реализованного алгоритма определения собственных значений и собственных функций стационарных состояний, который представляет собой метод обратных итераций [20] (или модифицированный метод Виландта [21]). Аналогичные численные алгоритмы были реализованы в работах [22–24].

В табл. 1 приведены расчетные уровни энергии стационарных состояний $E_1 = E_{1,n}(\kappa)$ в поперечном направлении для потенциальной ямы с профилем (15) и уровни энергии стационарных состояний $E = E_n(\kappa)$ в продольном направлении для потенциальной ямы с профилем (16). На рис. 2 приведена зависимость нормиро-

ванных функций состояний в наноленте с кресельными краями. Рис. 2, *a* соответствует волновым функциям в поперечном направлении в зависимости от q^1 , когда первое граничное условие выполняется при $q^1 = \pm 5H$ и профиль потенциальной ямы соответствует (15). Из рис. 2, *a* видно, что плотность вероятности вне наноленты при $|q^1| > H/2$ больше нуля. Рис. 2, *b* соответствует волновым функциям в продольном направлении в зависимости от q^2 , когда первое граничное условие выполняется при $q^2 = \pm 5L$ и профиль потенциальной ямы соответствует (16). Из рис. 2, *b* видно, что плотность вероятности вне наноленты при $q^2 > L/2$ практически равняется нулю.

В табл. 2 в первой строке приведена зависимость полной свободной энергии от толщины наноленты. Во второй и третьей строках представлены зависимости

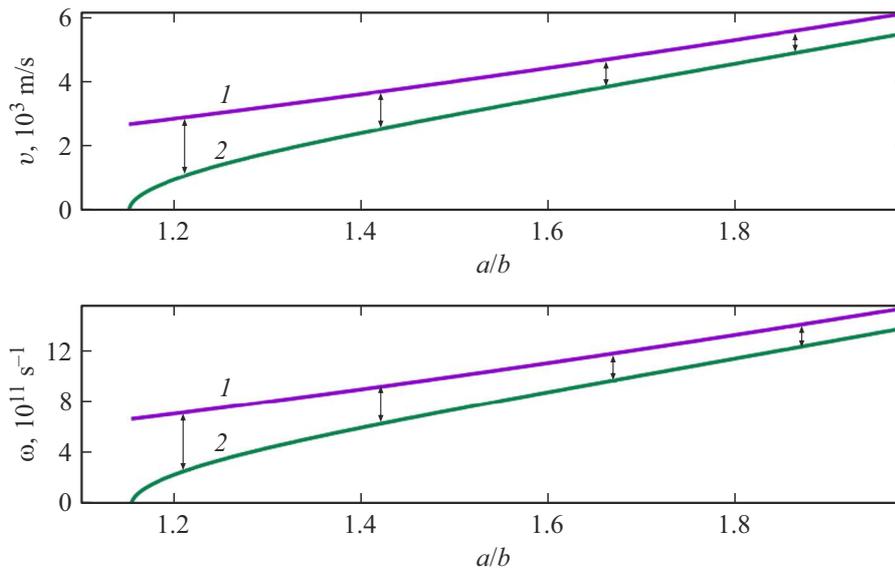


Рис. 3. Зависимости скорости распространения (верхний фрагмент) и циклической частоты (нижний фрагмент) крутильных колебаний основной моды волны от величины a/b . Скорость v пропорциональна частоте ω , поэтому функциональные зависимости этих величин качественно совпадают.

Таблица 2. Расчет полной свободной энергии $\mathcal{F} + \mathcal{F}_{sp}$, скорости распространения v_{sp} и циклической частоты ω_{sp} крутильных колебаний основной моды геликоидальной волны в зависимости от толщины наноленты a

Параметр	a/b					
	1.153	1.155	1.16	1.2	1.5	2
$\mathcal{F} + \mathcal{F}_{sp}, \text{eV}$	~ 0	0.04	0.15	1.06	10	35.1
$v_{sp}, \text{m/s}$	4.4	195.9	361.5	947.7	2909.1	5450.3
$\omega_{sp}, 10^{11} \text{ s}^{-1}$	0.011	0.5	0.92	2.42	7.43	13.92

скорости и частоты крутильных колебаний основной моды геликоидальной волны с учетом поверхностного потенциала от толщины наноленты.

На рис. 3 показаны зависимости скорости распространения и циклической частоты крутильных колебаний основной моды волны от величины a/b . Кривые 1 на рис. 3 соответствуют случаю, когда учитывается энергия только упругих деформаций. Кривые 2 соответствуют случаю, когда учитывается энергия как упругих деформаций, так и поверхностного потенциала.

Таким образом, из полученных результатов следует, что величина $C + C_{sp}$ может равняться нулю. В этом случае скорость v_{sp} и частота ω_{sp} также равны нулю. Это означает, что упругая тонкая узкая нанолента превращается с точки зрения упругих свойств в полосу ткани, т.е. упругие свойства у наноленты полностью исчезают. Условие $C + C_{sp} = 0$ выполняется при $a/b \approx 1.1513$, где частота крутильных колебаний соответствует СВЧ-излучению с длиной волны $\lambda = 1.67 \text{ m}$. Частоту колебаний можно уменьшить, если увеличить

ширину и длину наноленты, но в этом случае влияние поверхностного потенциала на рассматриваемый эффект уменьшается. Следует подчеркнуть, что в настоящей работе крутильная жесткость C вычислена при толщине наноленты $a = 0.154 \text{ nm}$ ($a/b = 1.085$), что соответствует данным для графеновых нанолент, в то время как в работе [18] толщина нанолент равнялась $a = 0.335 \text{ nm}$, т.е. $a/b = 2.36$. При значении $a/b = 2.36$ частота крутильных колебаний ω_{sp} начинает выходить на стационарное значение, т.е. нанолента не схлопнется. Но несмотря на то что нанолента не схлопнется, крутильная жесткость будет уменьшаться. Последнее может оказаться существенным при проведении экспериментальных исследований эффектов, связанных с величиной модуля Юнга в наноструктурах.

Из результатов работы следует, что в случае удлиненных наночастиц (нанотрубки, наноленты) геометрический потенциал может влиять на характер движения носителей заряда. Такая задача является актуальной в хиральной спинтронике [25–29]. Влияние геометрического потенциала будет проявляться при неосесимметричном движении частиц в нанотрубках, что приводит к влиянию геометрического потенциала на величину спин-орбитального взаимодействия [23]. Спин-орбитальное взаимодействие приводит в свою очередь к снятию вырождения по спину в нанотрубках (эффект Рашбы). Сдвиг уровней энергии в скрученных нанолентах должен влиять на величину коэффициента прохождения.

Финансирование работы

Авторы благодарят Национальный исследовательский ядерный университет „МИФИ“ за поддержку,

оказанную в рамках Программы повышения конкурентоспособности „Проект 5-100“ (договор № 02.a03.21.0005.27.08.2013).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] L.F.C. Pereira, F.M. Andrade, C. Filgueiras, E.O. Silva, *Physica E*, **132**, 114760 (2021). DOI: 10.1016/j.physe.2021.114760.
- [2] L.F.C. Pereira, F.M. Andrade, C. Filgueiras, E.O. Silva, *Annal. der Phys.*, **531**, 1900254 (2019). DOI: 10.1002/andp.201900254
- [3] F. Serafim, F.A.N. Santos, J.R.F. Lima, C. Filgueiras, F. Moraes, *Physica E*, **108**, 139 (2019). DOI: 10.1016/j.physe.2018.12.022
- [4] R.C.T. da Costa, *Phys. Rev. A*, **23**, 1982 (1981). DOI: 10.1103/PhysRevA.23.1982
- [5] Б.А. Дубровин, С.И. Новиков, А.Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, 2-е изд., перераб. (Наука, М., 1986).
- [6] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry* (Boston, 1999).
- [7] Н.Р. Садыков, Ю.А. Петрова, И.А. Пилипенко, Р.С. Храбров, С.Н. Скрябин, *ЖФХ*, **97** (2), 252 (2023). DOI: 10.31857/S004445372302022X [N.R. Sadykov, Yu.A. Petrova, I.A. Pilipenko, R.S. Khrabrov, S.N. Skryabin, *Russ. J. Phys. Chem.*, **97**, 367 (2023). DOI: 10.1134/S003602442302022X].
- [8] R. Dandoloff, T.T. Truong, *Phys. Lett. A*, **325**, 233 (2004). DOI: 10.1016/j.physleta.2004.03.050
- [9] V. Atanasov, R. Dandoloff, A. Saxena, *Phys. Rev. B*, **79**, 033404 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevB.79.033404
- [10] A. Onipko, L. Malysheva, *Phys. Status Solidi B*, **255**, 1700248 (2017). DOI: 10.1002/pssb.201700248
- [11] R.W. Boyd, *Nonlinear optics* (Academic Press, San Diego, 2003).
- [12] N.R. Sadykov, R.S. Khrabrov, I.A. Pilipenko, *Eur. Phys. J. D*, **77**, 9 (2023). DOI: 10.1140/epjd/s10053-022-00582-5
- [13] Н.Р. Садыков, Р.С. Храбров, И.А. Пилипенко, *Письма в ЖТФ*, **48** (16), 34 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.16.53205.19216 [N.R. Sadykov, R.S. Khrabrov, I.A. Pilipenko, *Tech. Phys. Lett.*, **48** (8), 69 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.08.55067.19216].
- [14] A.V. Orlov, I.A. Ovid'ko, *Rev. Adv. Mater. Sci.*, **40**, 249 (2015). https://www.ipme.ru/e-journals/RAMS/no_34015/05_34015_orlov.html
- [15] C. Lee, J.W. Kysar, X. Wei, J. Hone, *Science*, **321**, 385 (2008). DOI: 10.1126/science.1157996
- [16] S.K. Krishnan, E. Singh, P. Singh, M. Meeyappan, H.S. Nalwa, *RSC Adv.*, **9**, 8778 (2019). DOI: 10.1039/c8ra09577a
- [17] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Теория упругости*, 4-е изд., испр. (Наука, М., 1987), т. VII.
- [18] B. Mortazavi, *J. Compos. Sci.*, **7**, 269 (2023). DOI: 10.3390/jcs7070269
- [19] F. Kang, L. Sun, W. Gao, Q. Sun, W. Xu, *ACS Nano*, **17**, 8717 (2023). DOI: 10.1021/acsnano.3c01915
- [20] B.N. Parlett, *The symmetric eigenvalue problem* (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1980).
- [21] H. Wielandt, *Math. Z.*, **50**, 93 (1944). DOI: 10.1007/BF01312438
- [22] А.Н. Афанасьев, Л.Н. Мялицин, Н.Р. Садыков, М.О. Садыкова, *Изв. вузов. Физика*, **48** (1), 11 (2005). [A.N. Afanas'ev, L.A. Myalitsin, N.R. Sadykov, M.O. Sadykova, *Russ. Phys. J.*, **48**, 10 (2005). DOI: 10.1007/s11182-005-0078-1].
- [23] Л.И. Ардашева, Н.Д. Кундикова, М.О. Садыкова, Н.Р. Садыков, В.Е. Черняков, *Оптика и спектроскопия*, **95** (4), 690 (2003). [L.I. Ardasheva, N.D. Kundikova, M.O. Sadykova, N.R. Sadykov, V.E. Chernyakov, *Opt. Spectrosc.*, **95**, 645 (2003). DOI: 10.1134/1.1621451].
- [24] Л.И. Ардашева, Н.Р. Садыков, В.Е. Черняков, *Квантовая электроника*, **19** (9), 903 (1992). [L.I. Ardasheva, N.R. Sadykov, V.E. Chernyakov, *Sov. J. Quantum Electron.*, **22**, 840 (1992). DOI: 10.1070/QE1992v022n09ABEH003610].
- [25] S.H. Yang, *Appl. Phys. Lett.*, **116**, 120502 (2020). DOI: 10.1063/1.5144921
- [26] S.H. Yang, R. Naaman, Y. Paltiel, S.S.P. Parkin, *Nat. Rev. Phys.*, **3**, 328 (2021). DOI: 10.1038/s42254-021-00302-9
- [27] K. Michaeli, N. Kantor-Uriel, R. Naaman, D.H. Waldeck, *Chem. Soc. Rev.*, **45**, 6478 (2016). DOI: 10.1039/C6CS00369A
- [28] R. Naaman, D.H. Waldeck, *Annu. Rev. Phys. Chem.*, **66**, 263 (2015). DOI: 10.1146/annurev-physchem-040214-121554
- [29] P.N. D'yachkov, E.P. D'yachkov, *Appl. Phys. Lett.*, **120**, 173101 (2022). DOI: 10.1063/5.008690