

## Дисперсионные свойства нано- и микропор в трековых мембранах

© А.В. Митрофанов, Р.М. Фещенко

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,  
119991 Москва, Россия  
e-mail: rusl@sci.lebedev.ru

Поступило в Редакцию 6 мая 2024 г.

В окончательной редакции 6 мая 2024 г.

Принято к публикации 6 мая 2024 г.

Предложено теоретическое обоснование постоянства фазовой и групповой скоростей волн в сквозных порах полимерных трековых мембран в жестком рентгеновском диапазоне, обнаруженное в ранних работах и не нашедшее удовлетворительного объяснения в рамках теории волноводных мод. Разработанная теория распространения рентгеновского излучения основана на аналитическом решении параболического уравнения в волноводе методом интегральных преобразований. С использованием 3D-параболического уравнения и метода конечных разностей проведено численное моделирование распространения рентгеновского излучения на двух длинах волн в мягком рентгеновском диапазоне, которое показало, что свойство постоянства фазовой и групповой скоростей в сквозных порах трековых мембран сохраняется и в этом случае, но с меньшей точностью. При этом произведение фазовой и групповой скоростей уже не равно квадрату скорости света в вакууме. Показано, что постоянство скоростей волн в поре также нарушается при появлении в ней нескольких распространяющихся волноводных мод, что приводит к осцилляциям скоростей волн из-за интерференции мод.

**Ключевые слова:** рентгеновские фильтры, 3D-параболическое уравнение, метод конечных разностей, волноводные моды, трековые мембраны.

DOI: 10.61011/JTF.2024.07.58353.157-24

### Введение

Тонкие полимерные трековые мембраны со сквозными порами микронных или субмикронных диаметров [1] находят самые разнообразные применения в качестве элементов оптики мягкого рентгеновского и вакуумного ультрафиолетового диапазона ( $1 < \lambda < 100$  nm) длин волн [2–6]. Примером может послужить использование трековых мембран в качестве фильтров детекторов в солнечных телескопах (например, в рентгеновском телескопе проекта Коронас-Ф [4]) для защиты детектора излучения от интенсивной засветки длинноволновым излучением изучаемого объекта, например, Солнца, а также от аппаратных бликов в УФ, видимом и ИК диапазонах спектра.

Известно, что фазовые характеристики трековых мембран зависят от геометрических параметров пор, длины волны падающего на них излучения и оптических свойств материала мембраны. Одним из недоисследованных вопросов является понимание того, как фаза волнового поля изменяется после прохождения через пористую трековую мембрану. Это важно для разработки фазовых фильтров и фазовых экранов для рентгеновского излучения на основе трековых мембран, например, для использования в качестве тест-объектов в фазовой рентгеновской микроскопии. В работах [7,8] было показано, что после прохождения жесткого рентгеновского излучения через пору достаточно большого диаметра фазовый портрет волны воспроизводит геометрию поры, тогда как для пор малого диаметра наблюдалось

значительное поперечное размытие фазы. Было также продемонстрировано, что обнаруженное размытие фазы описывается универсальной функцией числа Френеля для одиночной поры. Результаты численного моделирования позволяют предложить использование трековых мембран в качестве рентгеновских диффузоров, а также для подавления спеклов в когерентных изображениях оптических системах. Отметим, однако, что в работах [7,8] численное моделирование распространения рентгеновского излучения в порах проводилось в предположении строгой цилиндрической симметрии задачи в 2D-параболическом приближении, при этом использовалась одномерная конечно-разностная схема и одномерное точное прозрачное граничное условие, что является приближением даже в случае цилиндрической симметрии задачи. В этих работах также не вычислялась явным образом фазовая и групповая скорости волн в порах, а их свойства обсуждались лишь на качественном уровне.

Поэтому вопрос о поведении фазовой и групповой [9] скоростей рентгеновского излучения, распространяющегося в узких порах полимерных трековых мембран, представляет существенный интерес. Из-за дисперсии материала мембраны как фазовая, так и групповая скорости волн в полном рентгеновском микро- или нановолноводе, каким является сквозная пора, будут зависеть сложным образом от диаметра поры, длины волны излучения и длины поры. Они также могут зависеть от шероховатости поверхности стенок пор. Практический интерес к поведению фазовой и групповой скоростей в порах

трековых мембран связан и с тем, что их дисперсия может влиять на временную форму короткого импульса рентгеновского излучения, проходящего сквозь пористую мембрану. Источниками таких коротких импульсов могут служить, например, рентгеновские лазеры или лазеры на свободных электронах [10].

Цель настоящей работы — численное моделирование распространения мягкого рентгеновского излучения в сквозных порах в тонких полиэтиленерефталатных (ПЭТФ) трековых мембранах, как уже было сделано ранее для жесткого рентгеновского излучения в работе [11]. Будет изучено поведение фазовой и групповой скоростей в порах и их изменение в зависимости от диаметра поры и длины волны рентгеновского излучения. В заключение будет представлена аналитическая теория распространения излучения в планарном (для простоты) волноводе и на ее основе дана качественная интерпретация постоянства фазовой и групповой скоростей и их слабой зависимости от диаметра поры (в жестком рентгеновском диапазоне).

## 1. Фазовая и групповая скорости

Распространение плоских волн в произвольной среде в общем случае характеризуется двумя скоростями: фазовой  $v_{ph}$  и групповой  $v_{gr}$  (см. [12] пп. 38–39). Первая из них отражает скорость изменения фазы поля в заданном направлении (например, в направлении оси  $z$ ) и определяется как

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{\operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial z} (\ln E)}, \quad (1)$$

где  $E$  — электрическое поле волны,  $\omega$  — частота волны и  $k_z$  — компонента волнового вектора в направлении оси  $z$ . Если поле волны представляется как  $E = u \cdot \exp(-i\omega t + ikz)$ , где волновое число  $k = \omega/c$ ,  $c$  — скорость света в вакууме и  $u$  — амплитуда поля, то из (1) следует, что

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{1 + \frac{1}{k} \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial z} (\ln u)}. \quad (2)$$

В отличие от фазовой скорости групповая скорость описывает среднюю скорость движения волнового пакета (если ширина спектра не слишком велика) и может быть вычислена по формуле Рэлея [12], если известна зависимость фазовой скорости от длины волны излучения, как

$$v_g = v_{ph} - \lambda \frac{\partial v_{ph}}{\partial \lambda}, \quad (3)$$

где  $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны рентгеновского излучения. Обе скорости могут быть найдены путем численного решения задачи распространения излучения в пористой среде с последующим применением формул (1) или (2) и далее (3).

Оптические константы ПЭТФ на исследуемых длинах волн

Длина волны $\lambda$ , nm	$\delta$	$\beta$
0.154	$4.533 \cdot 10^{-6}$	$1.028 \cdot 10^{-8}$
1.625	$5.304 \cdot 10^{-4}$	$1.086 \cdot 10^{-4}$
17.06	$4.181 \cdot 10^{-2}$	$1.348 \cdot 10^{-2}$

## 2. Численное моделирование

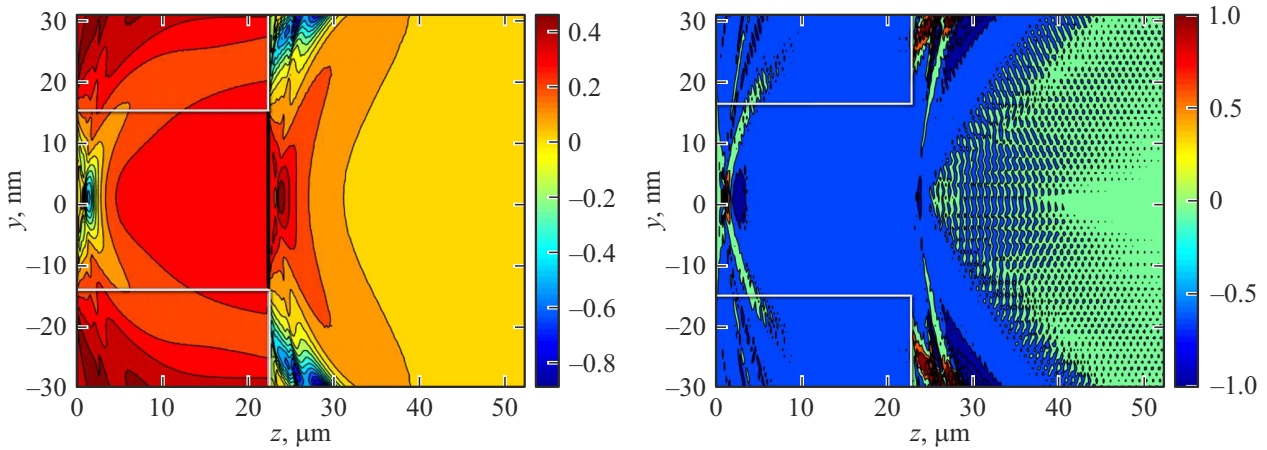
В настоящей работе для моделирования распространения рентгеновского излучения используется 3D-параболическое уравнение

$$2ik \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - k^2(\varepsilon(x, y) - 1)u, \quad (4)$$

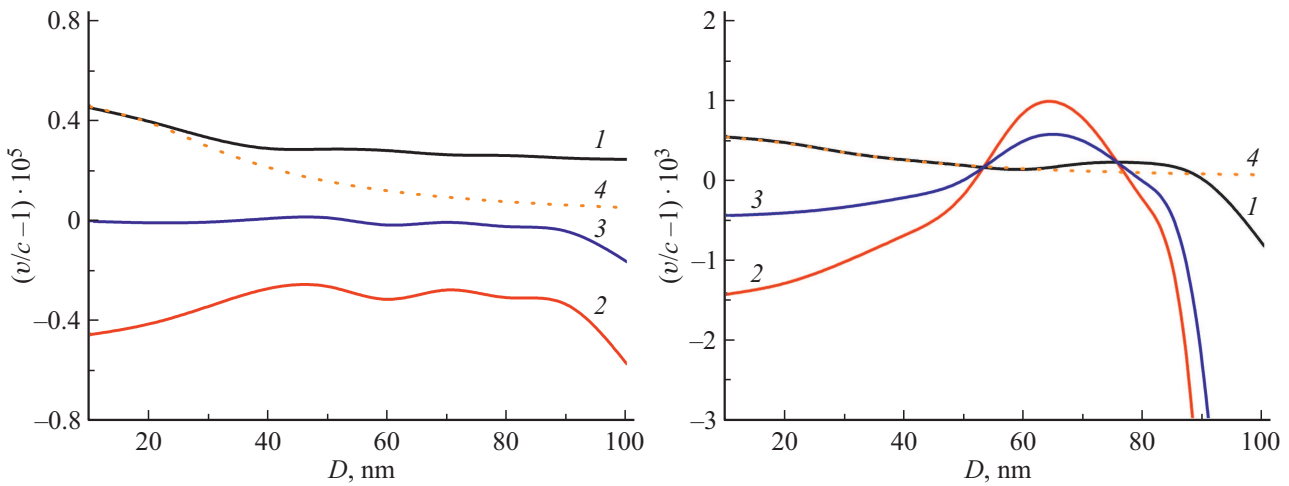
где  $u(x, y, z)$  — медленно меняющаяся амплитуда поля,  $(x, y, z)$  — декартовы координаты,  $\varepsilon(x, y) = n^2 \approx \approx 1 - 2\delta + 2i\beta$  — комплексная диэлектрическая проницаемость материальной среды (полимера ПЭТФ в настоящей работе). Уравнение (4) решается с помощью явно-неявной безусловно устойчивой конечно-разностной схемы Кранка–Николсона с точными прозрачными граничными условиями в прямоугольной вычислительной области. Используется прямоугольная равномерная вычислительная сетка с продольным (по  $z$ ) шагом  $\tau$ , много большим поперечного шага  $h$  (по координатам  $x$  и  $y$ ). С детальным описанием используемых численных методов и прозрачных граничных условий можно ознакомиться в работах [11,13,14].

Все вычисления проводятся с помощью специально созданных для этой цели программных кодов в среде Matlab. Оптические константы ПЭТФ берутся из базы данных [15], и для рассматриваемых здесь длин волн они приведены в таблице.

Моделирование распространения излучения через одиночную пору проводится в прямоугольной вычислительной области с поперечным размером, большим диаметра поры. Длина продольного шага равна  $\tau = 20$  или 100 nm. Образец с порой освещается плоской волной, падающей под углом  $\theta$  (в плоскости  $(y, z)$ ) от нормали на левый торец поры. Результатом моделирования является комплексная амплитуда поля  $u$  как функция координат. Фазовая скорость далее рассчитывается как скорость изменения фазы поля, исходя из полученной амплитуды  $u$  с использованием формулы (2). При этом производная амплитуды по  $z$  вычисляется как разность амплитуды на двух последовательных шагах конечно-разностной схемы поделенная на длину шага  $\tau$ . Для расчета групповой скорости по формуле (3) рассчитывается распространение излучения на двух близких длинах волн с  $\delta\lambda = 0.01 \cdot \lambda$  с константами, также взятыми из [15]. После прохождения области поры моделирование продолжается в свободном пространстве с помощью той же конечно-разностной схемы и с теми



**Рис. 1.** Фазовая  $((v_{ph}/c - 1) \cdot 10^5$  — слева) и групповая  $((v_{gr}/c - 1) \cdot 10^5$  — справа) скорости в плоскости  $(y, z)$  для волны при  $\lambda = 0.154$  nm, распространяющейся в узкой цилиндрической поре. Белые линии соответствуют границам поры.



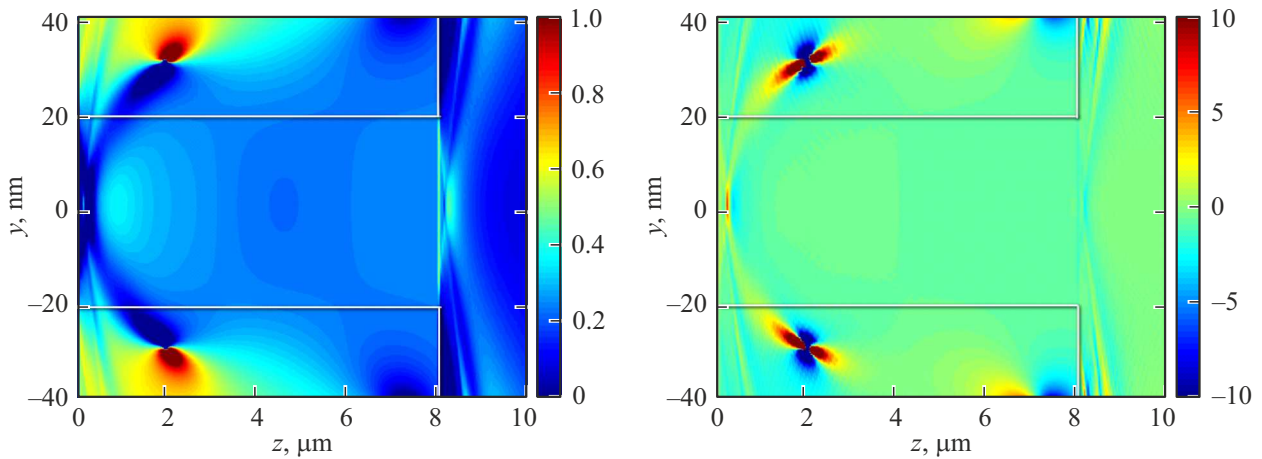
**Рис. 2.** Фазовая (линия 1) и групповая (линия 2) скорости для волны, распространяющейся в цилиндрической поре, как функция диаметра поры. Слева — для  $\lambda = 0.154$  nm, справа — для  $\lambda = 1.625$  nm. Линия 3 — среднее геометрическое фазовой и групповой скоростей. Линия 4 — фазовая скорость для основной волноводной моды, полученная из уравнения (5).

же шагами сетки, что и в мембране, но с помощью 3D-параболического уравнения (4) с  $\epsilon = 1$ .

Рассчитанные фазовая и групповая скорости волнового поля с длиной волны  $\lambda = 0.154$  nm, распространяющегося в цилиндрической поре диаметром  $D = 30$  nm в ПЭТФ мембране толщиной  $L = 22.4$  micrometers, показаны на рис. 1 для угла падения  $\theta = 0$ . Моделирование в вакууме продолжалось на расстоянии  $30$  micrometers от правого торца поры. Шаг сетки  $h$  по поперечным координатам  $(x, y)$ , отсчитываемым от оси поры, равен  $1$  nm. Из рис. 1 видно, что внутри поры и в ее окрестности фазовая скорость превышает скорость света в вакууме, а групповая скорость меньше скорости света в вакууме. Также видно, что обе скорости имеют постоянное значение на протяжении большей части поры и в ее окрестности (за исключением начальной области, где наблюдаются переходные процессы), что говорит о линейном характере роста фазы вдоль поры.

Интерес также представляют зависимость фазовой и групповой скоростей волны от диаметра поры. Такие зависимости изображены на рис. 2, причем значения скоростей брались на оси поры на расстоянии  $20$  micrometers от ее левого торца. Из рис. 2 (слева) видно, что обе скорости слабо зависят от диаметра поры, медленно убывая (возрастая) с его увеличением. Природа такой зависимости скоростей от диаметра поры обсуждается ниже. Можно также отметить, что из рис. 2 следует, что произведение фазовой и групповой скоростей равно квадрату скорости света в вакууме.

Переходя теперь к более мягкому рентгеновскому излучению, где существенную роль играет поглощение в среде, рассмотрим результаты для длины волны  $\lambda = 1.625$  nm. Рассчитанные фазовая и групповая скорости волнового поля с этой длиной волны, распространяющегося в цилиндрической поре диаметром  $D = 40$  nm в ПЭТФ мембране толщиной  $L = 8$  micrometers, показаны на



**Рис. 3.** Фазовая  $((v_{ph}/c - 1) \cdot 10^3$  — слева) и групповая  $((v_{gr}/c - 1) \cdot 10^3$  — справа) скорости в плоскости  $(y, z)$  для волны при  $\lambda = 1.625$  nm, распространяющейся в узкой цилиндрической поре. Белые линии соответствуют границам поры.

рис. 3 для угла падения  $\theta = 0$ . Моделирование в вакууме продолжалось на расстоянии  $2 \mu\text{m}$  от правого торца поры. Шаг сетки по поперечным координатам  $(x, y)$  был выбран таким же, как и ранее —  $1$  nm. При выбранной толщине мембрана непрозрачна для рентгеновского излучения с длиной волны  $\lambda = 1.625$  nm.

Из рис. 3 видно, что фазовая скорость, как и в жестком рентгеновском диапазоне, превышает скорость света в вакууме  $c$ , а групповая скорость меньше скорости света в вакууме. Можно также отметить, что, хотя фазовая и групповая скорости имеют приблизительно постоянное значение на протяжении большей части поры и в ее окрестности, они демонстрируют осцилляции вокруг определенного среднего значения. Это говорит о почти линейном характере роста фазы вдоль поры. Таким образом, в мягком рентгеновском диапазоне поведение фазовой и групповой скоростей в достаточно узких порах сходно с поведением этих величин на длине волны  $\lambda = 0.154$  nm.

Тем не менее изменения в поведении скоростей по сравнению с жестким рентгеновским диапазоном хорошо видны из рис. 2 (справа), где изображены зависимости фазовой и групповой скоростей от диаметра поры для длины волны  $\lambda = 1.625$  nm, причем значения скоростей брались на оси поры на расстоянии  $7 \mu\text{m}$  от ее левого торца. Из рисунка видно, что фазовая скорость по-прежнему сравнительно слабо зависит от диаметра поры, немного убывая с его увеличением. Зависимость же групповой скорости от длины волны немонотонна и имеет локальный максимум при  $D \approx 65$  nm. Произведение фазовой и групповой скоростей уже не равно квадрату скорости света в вакууме. Причины такого изменения поведения скоростей в области мягкого рентгеновского излучения обсуждаются ниже.

В качестве последнего примера на рис. 4 приводятся рассчитанные фазовая и групповая скорости волнового поля с длиной волны  $\lambda = 17.06$  nm, распространяющегося в цилиндрической поре диаметром  $D = 100$  nm в

ПЭТФ мембране толщиной  $L = 8 \mu\text{m}$  для угла падения  $\theta = 0$ . Шаг сетки по поперечным координатам  $(x, y)$  был увеличен вдвое до  $h = 2$  nm для уменьшения времени счета. Моделирование в вакууме продолжалось на расстоянии  $2 \mu\text{m}$  от правого торца поры. При выбранной толщине мембрана, как и в предыдущем примере, непрозрачна для рентгеновского излучения.

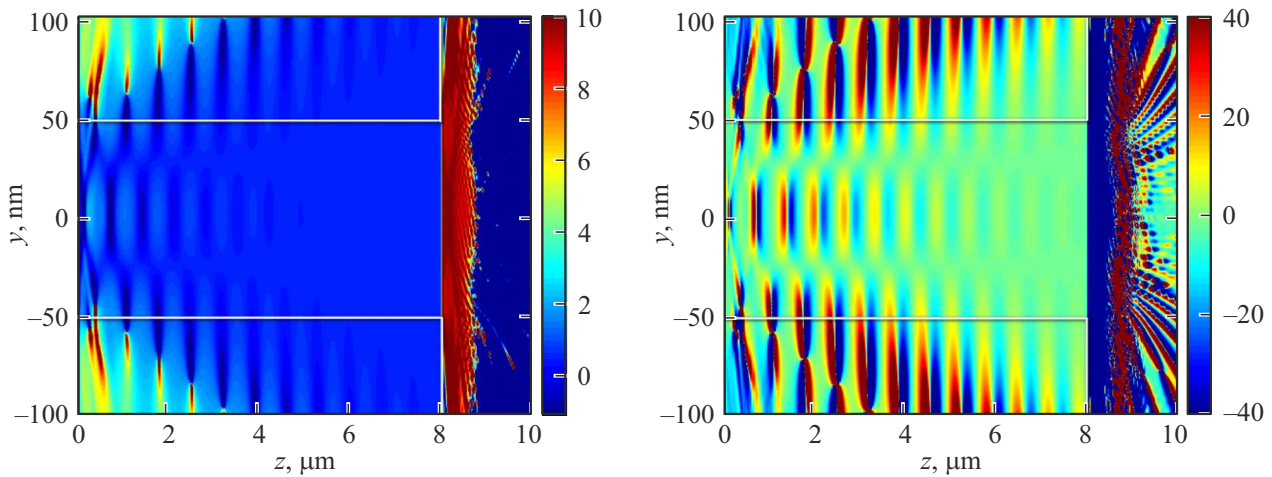
Из рис. 4 видно, что фазовая скорость заметно осциллирует, но все еще превышает скорость света в вакууме  $c$ , в то время как групповая скорость испытывает сильные колебания вблизи значения равного скорости света в вакууме и уже не имеет определенного знака. Наблюдаемые осцилляции постепенно затухают по мере распространения в поре. Такое поведение групповой скорости отличается от случая для длины волны  $\lambda = 1.625$  nm, изображенного на рис. 3.

Примеры, обсуждаемые выше (рис. 1, 3 и 4), рассчитаны для угла падения  $\theta = 0$ . Моделирование для углов падения, отличных от нуля (в частности, для угла падения  $\theta = 0.001$  на длине волны  $\lambda = 0.154$  nm), показало, что поведение фазовой и групповой скоростей волн в узких порах качественно не отличается от случая нулевого угла падения.

### 3. Обсуждение результатов

Как известно, для волноводных мод, распространяющихся в цилиндрическом волноводе под малыми углами скольжения по отношению к стенке волновода (как в рентгеновском диапазоне спектра), приблизительно справедливо скалярное уравнение Гельмгольца. Поляризационными эффектами в этом случае можно пренебречь из-за равенства коэффициентов отражения волн разных поляризаций при скольжении падения.

Используя аналитические решения уравнения Гельмгольца внутри поры и в полимере, можно получить (с учетом граничных условий на стенке при  $r = D/2$ )



**Рис. 4.** Фазовая  $((v_{ph}/c - 1) \cdot 10^2$  — слева) и групповая  $((v_{gr}/c - 1) \cdot 10^2$  — справа) скорости в плоскости  $(y, z)$  для волны при  $\lambda = 17.06$  nm, распространяющейся в узкой цилиндрической поре. Белые линии соответствуют границам поры.

дисперсионное уравнение для мод в полном цилиндрическом волноводе (в пренебрежении поглощением, которое в жестком рентгеновском диапазоне мало):

$$\kappa \frac{K'_m(\kappa D/2)}{K_m(\kappa D/2)} = \gamma \left( \frac{J'_m(\gamma D/2)}{J_m(\gamma D/2)} \right), \quad (5)$$

где  $m$  — азимутальный индекс,  $\gamma$  — поперечное волновое число для моды в поре,  $\kappa = \sqrt{k^2 \delta - \gamma^2}$ ,  $K_m$  и  $J_m$  — функция Макдональда и функция Бесселя  $m$ -го порядка, соответственно. Уравнение (5) решается относительно  $\gamma$ , при этом фазовая скорость выражается как  $v_{ph} = ck / \sqrt{k^2 - \gamma^2}$ . Групповая скорость может быть по-прежнему вычислена по формуле (3). Уравнение (5) решается численно методом итераций. При этом берется решение, соответствующее основной (осесимметричной) волноводной моде с  $m = 0$  и  $n = 1$  (радиальное число).

Фазовая скорость для основной моды, вычисленная согласно уравнению (1) для  $m = 0$  и  $n = 1$ , показана на рис. 2 (линия 4) для двух длин волн, соответствующих жесткому (слева) и мягкому (справа) рентгеновскому излучению. Видно, что при малых диаметрах  $D < 30$  nm в коротковолновом диапазоне спектра решение уравнения (5) хорошо описывает фазовую скорость волн в поре. Однако при больших диаметрах поры фазовая скорость основной волноводной моды заметно меньше фазовой скорости, вычисленной на основе численного решения параболического уравнения (4). Совпадение результатов двух методов расчета при малых диаметрах поры можно объяснить тем, что в этом случае основная волноводная мода распространяется в основном за пределами поры. То есть эффективный диаметр моды велик по сравнению с диаметром поры, и поэтому фазовая и групповая скорости определяются только показателем преломления материала мембраны, что приводит к совпадению результатов двух методов расчета. Однако при больших диаметрах поры фазовая скорость волн в поре

заметно больше, чем скорость основной волноводной моды, что означает, что в поре распространяется излучение, принадлежащее не только основной волноводной моде.

С другой стороны, в длинноволновом диапазоне спектра, как видно из рис. 2 (справа), простая модовая модель уравнения (5) удовлетворительно описывает ситуацию при значениях диаметра поры вплоть до  $D = 100$  nm. Это можно объяснить большим поглощением среды в этом диапазоне спектра, поскольку, как было сказано выше, мембрана с толщиной  $8 \mu\text{m}$  непрозрачна для мягкого рентгеновского излучения. Это приводит к значительным потерям распространяющихся через пору мод, и в итоге до правого конца поры доходит только излучение основной моды, имеющей минимальное затухание. Все высшие моды, псевдомоды и излучение, не принадлежащее конкретной моде, затухают, не доходя до правого торца поры. Сложное поведение групповой скорости с локальным максимумом (рис. 2 справа) объясняется сложным поведением оптических констант ПЭТФ в мягкой области рентгеновского спектра. В еще более мягком диапазоне, изображенном на рис. 4, для выбранного диаметра  $D = 100$  nm в поре распространяются две моды, интерференция которых приводит к осцилляциям фазовой и групповой скоростей, которые затухают по мере распространения вследствие быстрого затухания второй моды по сравнению с основной модой.

Для объяснения поведения скоростей волн в порах большего диаметра в жестком диапазоне с  $\lambda = 0.154$  nm полезно воспользоваться простой моделью плоского рентгеновского волновода, который описывается 3D-параболическим уравнением (4), в котором амплитуда  $u$  и диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  ПЭТФ считаются не зависящими от координаты  $y$ . Для решения уравнения в этом случае можно использовать интегральное преобра-

зование Лапласа по продольной координате  $z$ :

$$F(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, z) e^{-pz} dz,$$

после применения которого к уравнению (4) получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для образа  $F$ :

$$\frac{d^2 F}{dx^2} + (2ikp + k^2(\varepsilon(x) - 1))F = 2iku(x, 0). \quad (6)$$

В правой части (6) стоит начальное значение амплитуды  $u(x, 0)$  при  $z = 0$ , принимаемое здесь равным единице. Уравнение (6) решается с учетом необходимости выполнения условия излучения при  $x \rightarrow \pm\infty$  и граничных условий при  $x = D/2$ . Рассматриваются только симметричные решения, а к полученному результату затем применяется обратное преобразование Лапласа. В итоге амплитуда поля внутри плоского волновода при  $-D/2 < x < D/2$  может быть представлена, как

$$u = 1 - \frac{\gamma_0^2}{\pi} \int_{-\sqrt{i\infty}}^{\sqrt{i\infty}} e^{-t^2} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 - i\gamma_0^2}} \times \frac{\cos(\kappa_0 x)}{\sqrt{t^2 - i\gamma_0^2} \cdot \cos(\kappa_0 D/2) - it \sin(\kappa_0 D/2)}, \quad (7)$$

где интеграл в формуле (7) берется вдоль контура на комплексной плоскости, проходящего выше вещественной оси в обход полюсов и точек ветвления подынтегральной функции. Деформируя этот контур так, чтобы интегрирование шло вдоль вещественной оси, переходя к новой переменной интегрирования и суммируя по вычетам в полюсах, расположенных в верхней полуплоскости, получаем

$$u = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{w_s} e^{-i\gamma_0^2 w_s^2} \frac{\cos(2x\zeta w_s/D)}{1 + \zeta \sqrt{1 - w_s^2}} - \frac{\gamma_0^2}{\pi} e^{-i\gamma_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\rho^2}}{\rho^2 + i\gamma_0^2} \times \frac{\cos(\kappa_0 x)}{\rho \cos(\kappa_0 D/2) - i\sqrt{\rho^2 + i\gamma_0^2} \sin(\kappa_0 D/2)} d\rho, \quad (8)$$

где  $\gamma_0^2 = kz(\delta - i\beta)$ ,  $\kappa_0^2 = 2k(\rho^2 + i\gamma_0^2)/(iz)$ ,  $\zeta = kD\sqrt{\delta - i\beta}/\sqrt{2}$ . Величина  $w_n$  — это решение дисперсионного уравнения для мод в плоском волноводе

$$\tan(\zeta w_n) = \frac{\sqrt{1 - w_n^2}}{w_n}, \quad (9)$$

соответствующее моде с номером  $n \geq 1$ . Первый член в выражении (8) есть сумма поля различных волноводных

мод (и псевдомод). Второй член в (8) соответствует непрерывному спектру и описывает переходные процессы на начальном этапе распространения излучения в мембране, которые наблюдаются на рис. 1, 3, 4 в виде сложных изменений амплитуды поля при малых значениях  $z$ . Можно показать, что интенсивность этого непрерывного спектра в общем случае убывает как  $\sim 1/z$  с ростом координаты, и при больших  $z$  вклад этого члена становится малым по сравнению с полем распространяющихся мод даже в области жесткого рентгеновского излучения, где поглощение мало.

Что касается волноводных мод, то они несут конечную мощность излучения и соответствующие вещественным (в пренебрежении поглощением) решениям (9), удовлетворяющим условиям  $0 \leq w_n \leq 1$  и  $\text{tg}(\zeta w_n) \geq 0$ . Эти решения соответствуют нулям знаменателя второй дроби в (7), лежащими на прямой, выходящей из нуля с фазой  $3\pi/2$ . Общее число мод равно  $N = 1 + \lfloor \zeta/\pi \rfloor$  и растет с увеличением диаметра волновода. Для диаметра поры  $D < 100$  nm и оптических параметров из таблицы, в поре будет распространяться одна либо две волноводные моды. Как уже отмечалось выше, распространение двух волноводных мод происходит в поре диаметром  $D = 100$  nm на длине волны  $\lambda = 17.06$  nm (рис. 4), где их интерференция приводит как заметным осцилляциям фазовой и групповой скоростей. Поля мод распространяются с фазовой скоростью, меньшей скорости волн в сплошной среде, как это следует из структуры показателя экспоненты в компонентах суммы в выражении (8), а также из условия  $w_n \leq 1$ .

Помимо волноводных мод, можно выделить так называемые псевдомоды, которые несут бесконечную мощность, распространяются в основном за пределами поры и быстро затухают с ростом  $z$  в мягком диапазоне спектра, где существенно поглощение. Они соответствуют нулям знаменателя второй дроби в (7), лежащими в нижней полуплоскости комплексной переменной  $\rho$  в (8). Поэтому на длинах волн  $\lambda = 1.625$  и  $17.06$  nm псевдомоды влияют на поведение амплитуды поля, фазовой и групповой скоростей только в области малых значениях  $z$ , т.е. там же, где значителен последний член в выражении (8), определяющий переходные процессы. При дальнейшем распространении поведение скоростей волн определяется только обычными волноводными модами.

Однако в области жесткого рентгеновского излучения  $\lambda = 0.154$  nm, где поглощение пренебрежимо мало, роль псевдомод более значительна. Как можно показать из уравнения дисперсии (9), вблизи порога отсечки при  $\zeta \approx \pi n$  они распространяются со скоростями, близкими к таковым в сплошной среде. Для них параметр  $w_n \approx 1 - (\zeta - \pi n)^2/2 \approx 1$ , а их интенсивность внутри поры в  $\pi^2$  раз больше интенсивности в основной моде. Доминирование псевдомод, когда поглощение мало, объясняет медленное (по сравнению с законом дисперсии основной моды) падение фазовой скорости с ростом диа-

метра поры на длине волны  $\lambda = 0.154 \text{ nm}$ , наблюдаемое на рис. 2 слева.

## Заключение

В работе проведено численное моделирование распространения рентгеновского излучения через узкие поры в ПЭТФ трековых мембранах в 3D-параболическом приближении. Для численного решения параболического уравнения использовался метод конечно-разностных схем типа Кранка–Николсона с точным прозрачным граничным условием в прямоугольной вычислительной области. Полученные амплитуды поля для трех длин волн как жесткого, так и мягкого рентгеновского излучения, и разных диаметров пор использовались для расчета фазовой и групповой скоростей волн, распространяющихся внутри поры. Продемонстрировано, что распространение волн происходит, как правило, с постоянной групповой и фазовой скоростью, особенно в области жесткого рентгеновского излучения, где поглощение мало. Постоянство скоростей нарушается в случае распространения в поре нескольких волноводных мод, что приводит к их интерференции и осцилляциям скоростей. В жестком рентгеновском диапазоне произведение фазовой и групповой скоростей равно квадрату скорости света в вакууме.

На основе аналитического решения двумерного параболического уравнения, полученного методом интегральных преобразований, была построена качественная модель распространения волн в узких порах. Эта модель объясняет основные свойства скоростей волн в порах, в частности, слабую зависимость фазовой и групповой скоростей от диаметра поры в области жесткого рентгеновского излучения.

Обнаруженное в настоящей работе постоянство фазовой скорости в порах может быть полезно для создания фазовых фильтров для рентгеновского излучения, которые изменяют фазу поля на заданную величину. Поскольку фазовая скорость слабо зависит от диаметра поры в жестком диапазоне спектра, рентгеновское излучение, проходя через пористую мембрану заданной толщины с порами разных диаметров, будет приобретать фиксированную фазу, пропорциональную толщине мембраны. Это фаза будет независима от угла падения излучения на мембрану, но будет зависеть от его длины волны. Достоинством таких фильтров по сравнению со сплошными полимерными пленками будет существенно большее пропускание рентгеновского излучения. Фазовые фильтры на основе трековых мембран могут, например, использоваться для chirпирования (т.е. модуляции фазы рентгеновского излучения, так чтобы она зависела от длины волны) ультракоротких импульсов рентгеновского излучения, в том числе от лазера на свободных электронах. Поры в трековых мембранах могут также служить высококонтрастными прецизионными тест-объектами для изучения характери-

стик фазово-контрастного рентгеновского микроскопа и схем восстановления изображения [9].

В будущих работах предполагается исследование поведения фазовой и групповой скоростей волн рентгеновского излучения в нецилиндрических порах, а также в порах с шероховатыми внутренними стенками. Также предполагается численное моделирование распространения излучения через трековые мембраны, содержащие нерегулярные массивы пор разного диаметра, и изучение модуляции фазы поля после прохождения сквозь такой сложный объект.

## Благодарности

Авторы благодарны В.А. Бушуеву за содержательные дискуссии он свойствах волн, распространяющихся в порах.

## Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российской Федерации в лице Министерства науки и высшего образования, соглашение № 075-15-2021-1350 от 5 октября 2021 г. (внутренний номер 15.СИН.21.0004).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] П.Ю. Апель, С.Н. Дмитриев. *Трековые мембраны*. В кн. А.Б. Ярославцев (ред.). Мембраны и мембранные технологии (Научный мир, М., 2013), с. 117–160.
- [2] M. Dominique, A.V. Mitrofanov, J.F. Hochedez, P.Y. Apel, U. Schühle, F.A. Pudonin, A. BenMoussa. *Appl. Opt.*, **48** (5), 834 (2009). DOI: 10.1364/AO.48.000834
- [3] А.В. Митрофанов. *Квантовая электроника*, **48** (2), 105 (2018). [A.V. Mitrofanov. *Quant. Electron.*, **48** (2), 105 (2018). DOI: 10.1070/QEL16540]
- [4] A.V. Mitrofanov, P.Yu. Apel. *Nucl. Instr. Meth. B*, **245**, 332 (2006). DOI: 10.1070/QEL16540
- [5] А.В. Митрофанов, П.Ю. Апель. *Известия РАН. Сер. физ.*, **73** (1), 61 (2009).
- [6] В.Д. Кузнецов (ред.). *Солнечно-земная физика: Результаты экспериментов на спутнике КОРОНАС-Ф* (Физматлит, М., 2009), с. 73.
- [7] А.В. Митрофанов, А.В. Попов, Д.В. Прокопович. *ЖТФ*, **90** (11), 1898 (2020). [A.V. Mitrofanov, A.V. Popov, D.V. Prokhorovich. *Tech. Phys.*, **65** (11), 1814 (2020). DOI: 10.1134/S1063784220110195]
- [8] А.В. Митрофанов, А.В. Попов, Д.В. Прокопович. *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*, **12** (2), 173 (2020). DOI: 10.17725/rensit.2020.12.173
- [9] L. Brillouin. *Wave Propagation and Group Velocity* (Academic Press, 2013), v. 8.
- [10] П.Д. Гаспарян, Ф.А. Стариков, А.Н. Старостин. *УФН*, **168** (8), 843 (1998). [P.D. Gasparyan, F.A. Starikov, A.N. Starostin. *Phys. Usp.*, **41** (8), 761 (1998). DOI: 10.1070/PU1998v041n08ABEH000428]

- [11] А.В. Митрофанов, Р.М. Фещенко. *Квантовая электроника*, 2024 (в печати)
- [12] М. Борн, Э. Вольф. *Основы оптики* (Наука, М.,1973)
- [13] А.В. Митрофанов, Р.М. Фещенко. Краткие сообщения по физике Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, **49** (6), 29 (2022). [A.V. Mitrofanov, R.M. Feshchenko. Bull. Lebedev Phys. Institute, **49** (6), 169 (2022). DOI: 10.3103/S1068335622060057]
- [14] R.M. Feshchenko, A.V. Popov. JOSA A., **28** (3), 373 (2011). DOI: 10.1364/JOSAA.28.000373
- [15] X-Ray Interactions with Matter, 2010.  
URL: [www.cxro.lbl.gov/optical\\_constants/](http://www.cxro.lbl.gov/optical_constants/)