00

Альтернативные фазовые функции в моделировании когерентного обратного рассеяния

© В.Л. Кузьмин [1], Ю.А. Жаворонков [1,2], С.В. Ульянов [2]

[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251 Санкт-Петербург, Россия
[2]Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: kuzmin_vl@mail.ru

Выполнено моделирование эффекта когерентного обратного рассеяния на основе уравнения Бете−Солпитера при учете анизотропии с помощью двух различных фазовых функций. Обнаружено, что с ростом анизотропии индикатрисы однократного рассеяния расчеты с фазовой функцией Рэлея−Ганса приводят к более широким угловым пикам когерентного обратного рассеяния, чем расчеты с фазовой функцией Хеньи−Гринштейна. Моделирование когерентного обратного рассеяния методом Монте-Карло на основе фазовой функции Рэлея−Ганса выполнено впервые. На основе альтернативных фазовых функций исследовано влияние понижения длины пространственной когерентности падающего излучения на форму углового пика когерентного обратного рассеяния. Показано, что с уменьшением длины когерентности обе модели приводят к уширению пика, что может быть использовано в биомедицинской диагностике.

Ключевые слова: Когерентное обратное рассеяние, моделирование Монте-Карло, уравнение Бете−Солпитера.

DOI: 10.61011/OS.2024.04.58221.5453-24

1. Введение

На протяжении последнего десятилетия интенсивно развиваются оптические методы в медицинской диагностике [1–6]. Возможность извлечения информации из рассеянного биологической средой излучения связан с наличием так называемого „окна прозрачности“ в ближней инфракрасной области, а фактическая безвредность этого излучения делает возможным его использование при изучении в том числе живых организмов. Открытие когерентных [7–14] и корреляционных [15,16] эффектов в многократном рассеянии в случайно неоднородных средах привело к развитию ближней инфракрасной спектроскопии NIRS (near infrared spectroscopy) и диффузной корреляционной спектроскопии DCS (diffuse correlation spectroscopy) применительно к биологическим системам. В исследованиях используется инфракрасное излучение разного вида: это CV (continious wave), непрерывное излучение — облучение биоткани непрерывной волной [17–20], короткими импульсами [21–24] или же использование излучения с различными видами модуляции [21,25,26]. В работе мы изучаем рассеяние непрерывной плоской лазерной волны, падающей на плоскую границу полубесконечной случайно неоднородной среды. Основное внимание уделяется эффекту усиления когерентного обратного рассеяния (КОР), в котором наиболее явно проявляется волновая природа многократно рассеянного излучения. Отметим, что чрезвычайная узость углового конуса КОР [12–14] существенно препятствует полноценному использованию КОР в биомедицинской практике. Поэтому одной из важных задач является создание и моделирование систем и ситуаций, приводящих к уширению углового конуса КОР.

При определении физиологического состояния биотканей по данным рассеянного излучения важным является знание оптических параметров случайной среды: коэффициента рассеяния μ_s и коэффициента абсорбции μ_a. При их определении очень существенен учет анизотропии индикатрисы однократного рассеяния или фазовой функции. Экспериментально определяемой величиной является приведенный коэффициент рассеяния μ'_s, связанный с коэффициентом рассеяния μ_s соотношением $\mu'_s = (1 - g)\mu_s$ [27], где параметр $g = \langle\cos\theta\rangle$ — средний косинус угла однократного рассеяния. Таким образом, параметр g в низшем приближении уже характеризует анизотропию фазовой функции, при этом, разумеется, к одному и тому же значению $\langle\cos\theta\rangle$ могут приводить самые разные фазовые функции, описывающие анизотропию однократного рассеяния. Поэтому в многократном рассеянии естественной представляется задача сопоставления результатов обратного рассеяния, рассчитанного с помощью различных модельных фазовых функций. Наиболее часто при моделировании анизотропного рассеяния используется эмпирическая фазовая функция Хеньи−Гринштейuна (ХГ), непосредственно включающая в себя параметр g. Причина популярности этой фазовой функции заключается, в основном, в её математическом удобстве. К недостаткам модели ХГ можно отнести отсутствие её обоснования на „микроуровне“, данная фазовая функция не является рассчитанной индикатрисой рассеяния на некотором типе неоднородности в биоткани. Анизотропия рассеяния, и сам параметр g зависят от физических свойств рассеивателей, и прежде всего их размеров. Простейшей моделью, учитывающей вид рассеивающих частиц и исходящей из размеров рассеивателей, является модель суспензии твердых сфер, соответствующая, в частности, красным кровяным тельцам. Эта модель в низшем приближении по отклонениям диэлектрической проницаемости приводит к фазовой функции Рэлея–Ганса (РГ). Численному моделированию именно с этими двумя фазовыми функциями, ХГ и РГ, посвящена настоящая статья. Описание рассеяния на основе формул Ми формально является более точным по сравнении с моделью РГ, однако, использование в моделировании формул Ми сопряжено с большими математическими сложностями. Отметим, что в моделях РГ и Ми степень анизотропии однократного рассеяния определяется безразмерным параметром kR, где R — радиус частицы, а k — волновое число.

В настоящей работе расчет интенсивности лазерного излучения, обратно рассеянного биологической средой, выполнен на основе уравнения Бете–Солпитера, примененного для описания переноса излучения в случайно неоднородной среде. Итерационное решение этого уравнения приводит к представлению рассеянной интенсивности в виде ряда по кратностям рассеяния. Члены данного ряда представляет собой многократные интегралы, которые вычислялись методом Монте-Карло (МК). Развитый нами метод моделирования позволил определить степень влияния на результаты расчетов типа анизотропии индикатрисы однократного рассеяния, для чего мы провели сравнение результатов, полученных с использованием индикатрис ХГ и РГ. Сравнительный анализ результатов расчетов интенсивности обратного рассеяния в зависимости от расстояния между источником и детектором, находящимися на поверхности полубесконечной случайно неоднородной среды, был проведен ранее в [28] для фазовых функций ХГ и РГ. Расчеты проводились в широком угловом диапазоне с учетом лишь главного, некогерентного вклада в интенсивность рассеяния, что соответствует использованию уравнения Бете–Солпитера в лестничном приближении. В настоящем сообщении основное внимание уделено области пика КОР, поэтому в расчетах с модельными функциями ХГ и РГ были учтены когерентный и некогерентный вклады в рассеяние. В реализации алгоритма МК мы использовали метод обратного преобразования (inverse transform) [29], который состоит в обращении интегральной или кумулятивной функции распределения случайных пространственных переменных: углов рассеяния и длины свободного пробега. При этом для модельной индикатрисы ХГ обратное преобразование интегральной функции распределения легко выполняется и результат представляется в виде элементарной функции. В настоящей работе, найденная в явном виде интегральная функция распределения для модели РГ, позволила эффективно реализовать для этой модели метод обратного преобразования и впервые выполнить моделирование многократного рассеяния для обоих видов фазовых функций одновременно.

Еще одним важным эффектом в КОР является уширение конуса КОР с понижением степени пространственной когерентности падающего излучения. При моделировании понижения пространственной когерентности мы изменяем число учитываемых кратностей рассеяния. Проведенные расчеты показали, что использование низкокогерентного излучения позволяет получить конус КОР с шириной и относительной высотой, близкими к экспериментальным значениям [12].

2. Перенос излучения

Перенос стационарного излучения в бесконечной случайно неоднородной среде может быть описан уравнением Бете-Солпитера

$$\Gamma(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1|\,\mathbf{k}_s,\mathbf{k}_i)=\frac{k_0^4}{4\pi^2}G(\mathbf{k}_s-\mathbf{k}_i)\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$$

$$+\frac{k_0^4}{4\pi^2}\int d\mathbf{r}_3 G(\mathbf{k}_s-\mathbf{k}_{23})\Lambda(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)\Gamma(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_1|\mathbf{k}_{23},\mathbf{k}_i),\quad(1)$$

где функция когерентности $\Gamma(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1|\mathbf{k}_s,\mathbf{k}_i)$ описывает распространение излучения, падающего в точке $\mathbf{r}_1$ и выходящего в $\mathbf{r}_2$, с начальным, $\mathbf{k}_i$, и финальным, $\mathbf{k}_s$, волновыми векторами; $\mathbf{k}_{ij}=k_0\mathbf{r}_{ij}/r_{ij}$, $\mathbf{r}_{ij}=\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j$, $k_0=2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны в вакууме. Произведение двух комплексно–сопряженных средних функций Грина скалярного поля дает пропагатор однократного рассеяния $\Lambda(r)=r^{-2}\exp(-\mu r)$, $\mu=\mu_s+\mu_a$ — коэффициент экстинкции. Через $G(\mathbf{k})$ обозначен фурье-образ корреляционной функции флуктуаций диэлектрической проницаемости,

$$G(\mathbf{k})=\int d(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}\langle\delta\varepsilon(\mathbf{r})\delta\varepsilon^*(\mathbf{r}_0)\rangle.$$

Оптическая теорема связывает коэффициент рассеяния μ_s с интегральной интенсивностью однократного рассеяния, и обе эти величины выражаются через корреляционную функцию $G(\mathbf{k})$, в частности, в случае скалярного поля

$$\mu_s=\frac{k_0^4}{(4\pi)^2}\int d\Omega_s G(\mathbf{k}_s-\mathbf{k}_i).\quad(2)$$

Для электромагнитного поля в (2) добавляется релеевский множитель: $G\to G(1+\cos^2\theta_s)/2$.

Вводя нормированную фазовую функцию

$$p(\hat{\mathbf{k}}_s\hat{\mathbf{k}}_i)=G(\mathbf{k}_s-\mathbf{k}_i)/\int d\Omega_s G(\mathbf{k}_s-\mathbf{k}_i),$$

где $\hat{\mathbf{k}}$ обозначает единичный вектор вдоль $\mathbf{k}$, уравнение (1) можно представить в виде

$$\Gamma(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1|\mathbf{k}_s,\mathbf{k}_i)=\mu_s p(\hat{\mathbf{k}}_s\hat{\mathbf{k}}_i)\delta(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)$$

$$+\mu_s\int d\mathbf{r}_3 p(\hat{\mathbf{k}}_s\hat{\mathbf{k}}_{23})\Lambda(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_3)\Gamma(\mathbf{r}_3,\mathbf{r}_1|\mathbf{k}_{23},\mathbf{k}_i).\quad(3)$$

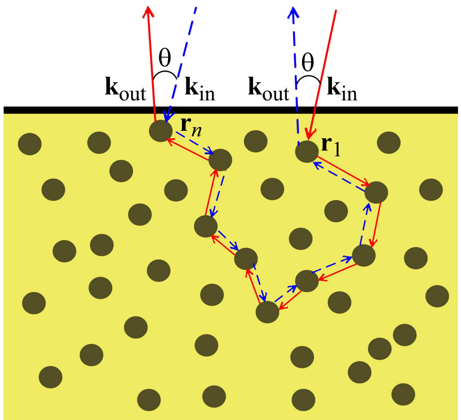

Рис. 1. Схематическое изображение эффекта когерентности в обратном рассеянии. При рассеянии назад сохраняются разницы фаз между полем и его комплексно-сопряженным, распространявшимся в противоположном направлении.

Отметим, что фазовая функция зависит лишь от косинуса угла θ между векторами, являющимися её аргументами, то есть $p(\hat{\mathbf{k}}_s, \hat{\mathbf{k}}_i) = p(\cos\theta)$.

3. Моделирование Монте-Карло

Пусть z — декартова координата точки $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_\perp, z)$, нормальная к границам плоскопараллельного слоя толщины T, $0 \le z \le T$, включая случай полубесконечной среды, $z \ge 0$. С точностью до постоянного размерного множителя главная некогерентная часть интенсивности рассеянного в верхнее полупространство (далее „назад") излучения, может быть представлена в виде [28,29,30]

$$J(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = 4\pi \int_0^\infty dz_1 \int_{z_2>0} d\mathbf{r}_2 \Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1 | \mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i) \times \exp\left(-\mu\left(\frac{z_2}{\cos\theta_s} + \frac{z_1}{\cos\theta_i}\right)\right),$$

где θ_i — угол падения, θ_s — угол обратного рассеяния, отсчитываемый от обратного по отношению к оси z направления. Итерированние уравнения Бете-Солпитера (3) приводит к представлению интенсивности в виде ряда по кратностям рассеяния:

$$J(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = \sum_{n=1}^{\infty} J^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s), \tag{4}$$

где $J^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$ — вклад n-го порядка рассеяния.

В рамках лестничного приближения на основе уравнения Бете–Солпитера мы представляем член n-го порядка $J^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$ как среднее по выборке N_{ph} падающих фотонов:

$$J^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = \frac{1}{N_{\text{ph}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{ph}}} W_n^{(j)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) \times p\left(\hat{\mathbf{k}}_{n\,n-1}^{(j)} \hat{\mathbf{k}}_s\right) f_{\text{BLB}}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s, z_1^{(j)}, z_n^{(j)}), \tag{5}$$

где $W_n^{(j)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$ и $z_n^{(j)}$ — соответственно вес и расстояние до границы от точки n-го акта рассеяния $\mathbf{r}_n^{(j)}$. Множитель Бугера-Ламберта-Бера $f_{\text{BLB}}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s, z_1^{(j)}, z_n^{(j)})$ описывает распространение излучения от точки входа до точки первого рассеяния и, в приближении Фраунгофера, от точки n-го рассеяния до выхода из среды. Он зависит от оптических параметров среды на пути фотонов, и геометрии потока фотонов. При изучении рассеяния в области КОР, в сумме (4) необходимо учитывать вклады не только лестничных диаграмм, но также и вклады максимально перекрестных диаграмм [20].

Вес $W_n^{(j)}$ представляет собой случайное значение многократного пространственного интеграла, возникшего как итерация n-го порядка уравнения Бете–Солпитера. Вычисляя его, можно смоделировать стохастическую последовательность, или траекторию, точек рассеяния $\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_n$. Полную сумму лестничных диаграмм, практически не зависящую от угла обратного рассеяния в области пика обратного рассеяния, обозначим $J_L(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = \sum_n J_L^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$, а полную сумму максимально перекрестных диаграмм —

$$J_C(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s) = \sum_n J_C^{(n)}(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s).$$

Для волны, обратно рассеянной под углом $\theta = \theta_s$ (см. Рис. 1), в выражении (5) в слагаемых, учитывающих лестничные вклады, функция $f_{\text{BLB}} = F_L$, где

$$F_L\left(\mathbf{r}_1^{(j)}, \mathbf{r}_n^{(j)}\right) = \exp\left(-\mu(z_1^{(j)} + z_n^{(j)}/\cos\theta_s)\right),$$

а в слагаемых, учитывающих вклады максимально перекрестных диаграмм, $f_{\text{BLB}} = F_C$, где

$$F_C\left(\mathbf{r}_1^{(j)}, \mathbf{r}_n^{(j)}\right) = \exp\left(-\frac{\mu}{2}\left(z_1^{(j)} + z_n^{(j)}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos\theta_s}\right)\right) \times \exp\left[ik\left(x_1^{(j)} - x_n^{(j)}\right)\sin\theta_s + ik\left(z_1^{(j)} - z_n^{(j)}\right)(1 - \cos\theta_s)\right].$$

Метод Монте-Карло в теории переноса излучения основан на хорошо известной процедуре обратного преобразования [29,32,33], которая позволяет преобразовать интеграл с экспоненциальным распределением по полубесконечному интервалу $[0, \infty]$ в интеграл по случайной величине, равномерно распределенной в единичном интервале $[0, 1]$. В рамках стандартного алгоритма экспонента в пропагаторе $\Lambda(r)$ дает плотность вероятности распределения $f(r)=\mu_s^{-1}\exp(-\mu_s r)$ случайной величины r — расстояния между двумя последовательными рассеяниями фотона. Интегральная функция экспоненциального распределения легко находится:

$$\xi = F(r) = 1 - \exp(-\mu_s r),$$

где ξ или $\xi' = 1-\xi$ — случайные величины, равномерно распределенные в единичном интервале [0, 1]. Обратное преобразование дает

$$r = -\mu_s^{-1}\ln \xi'.$$

К интегралам по угловым переменным метод обратного преобразования применяется аналогично. Сначала, в очередном акте рассеяния от случайного угла рассеяния θ переходим к переменной $t=\cos\theta$, которая далее рассматривается в качестве случайной величины, распределенной в соответствии с заданной фазовой функцией $p(t)$. Аналогично тому, как это проделано для пространственной переменной r, от интеграла по переменной t переходим к интегралу по случайной величине χ, определив для этого интегральную функцию распределения

$$\chi = F(t) = 2\pi \int_{-1}^{t} p(t')dt'.$$

Для равномерно распределенной на единичном интервале [0, 1] случайной величины χ обратное преобразование $t=F^{-1}(\chi)$ дает случайную величину t, распределенную в соответствии с фазовой функцией $p(t)$. В биомедицинских приложениях наиболее часто используется фазовая функция ХГ, важным достоинством которой является то, что обратное преобразование кумулятивной функции (6) выполняется аналитически в явном виде. Описание однократного рассеяния фазовой функцией Релея-Ганса позволяет моделировать оптические свойства биоткани на основе физической модели суспензии, однако, такой подход приводит к существенным математическим усложнениям [28,34].

4. Особенности обратного преобразования для фазовой функции Рэлея-Ганса

При вычислении интенсивности рассеяния по формуле (4), переходя последовательно для каждого $j=2,3,\dots$ от 3D-интегрирования по $\mathbf{r}_j$ к интегрированию по разностной переменной $\mathbf{r}'_j=\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_{j-1}$, имеем

$$\int d\mathbf{r}'_j \Lambda(r'_j) p(t_j) f(r'_j, t_j) = \frac{1}{2\pi\mu} \times \int_0^1 d\xi_j \int_0^1 d\chi_j \int_0^{2\pi} d\phi_j f\left(-\frac{\ln\xi_j}{\mu}, t(\chi_j)\right), \qquad (7)$$

где $f(r'_j, t_j)$ — произвольная функция, а $t_j=t(\chi_j)$ — обратная функция к $\chi_j=\chi(t_j)$ в (6), ϕ_j азимутальный угол. Интегрирование в (7) выполняется, как было сказано в разд. 3, усреднением по выборке равномерно распределенных случайных переменных $\xi_j, \chi_j \in [0;1]$ и $\phi_j \in [0;2\pi]$.

Как известно, анизотропия индикатрисы РГ целиком определяется безразмерным параметром kR. Вводя в фазовую функцию $p(t)$ новую переменную $q=kR\sqrt{2(1-t)}$, имеющую смысл модуля безразмерного вектора рассеяния на частице радиуса R, получим сложную функцию

$$p\left(t(q)\right) = p\left(1-\frac{q^2}{2k^2R^2}\right).$$

Далее для простоты будем писать $p(q)$ вместо $p(t(q))$. В новых переменных формула (6) приобретает вид

$$1-\chi = 2\pi(kR)^{-2}\int_0^q p(q')q'dq'. \qquad (8)$$

Здесь учтено условие нормировки

$$2\pi(kR)^{-2}\int_0^{2kR} p(q)qdq = 1. \qquad (9)$$

Если рассматривать функцию $2\pi(kR)^{-2}p(q)q$ как плотность распределения случайной величины $q\in[0, 2kR]$, то согласно (8) функция $\chi'(q)=1-\chi(q)$ имеет смысл интегральной функции распределения, равной вероятности того, что величина q' принимает значение из интервала $q'<q$.

Фазовую функцию РГ [28,35] можно записать как

$$p(q) = 2(\pi A)^{-1}q^{-6}(\sin q - q\cos q)^2.$$

Из условия нормировки (9) находим постоянную $A=(kR)^{-2}F(2kR)$, где функция $F(q)$ дается выражением

$$F(q) = 4\int_0^q q'^{-5}(\sin q' - q'\cos q')^2 dq'.$$

Очень существенно то, что функция $F(q)$ оказывается элементарной,

$$F(q) = q^{-4}(q^4 - q^2 + q\sin 2q - \sin^2 q),$$

$$0 \le F(q) < 1. \qquad (10)$$

Таким образом, нормированная величина $F(q)/F(2kR)$ фактически является интегральной функцией распределения случайной величины q и в стохастическом методе обратного преобразования может быть отождествлена с равномерно распределенной на промежутке [0, 1] случайной величиной χ':

$$\chi' = F(q)/F(2kR).$$

Отметим, что $q_{\max} = 2kR$. Обратное преобразование дает величину q,

$$q = F^{-1}(x), \tag{11}$$

где $x = F(2kR)\chi'$, $0 \le x \le F(2kR) < 1$.

Используя теорему Лагранжа об обращении рядов из (10), получим разложение

$$q^2 = \frac{9}{2}x\left(1 + \frac{9}{20}x + \frac{81}{280}x^2 + \frac{2403}{11200}x^3 + \dots\right), \tag{12}$$

из которого легко находится обратная функция (11). Однако ряд (12) сходится только при $|x| < x_1 \approx 0.9528$. Значение $x_1 = F(q_1)$, где $q_1 \approx 4.4934$ — наименьший положительный корень трансцендентного уравнения

$$\mathrm{tg}(q) = q. \tag{13}$$

В точке $|x| = x_1$ ряд расходится, так как $(F^{-1})'(x_1) = \infty$ в силу $F'(q_1) = 0$ и разложение (12) может быть использовано в численных расчетах только при x заметно меньших x_1.

Индикатриса рассеяния пропорциональна $F'(q) = 4(q\cos q - \sin q)^2/q^5$ и обращается в ноль в точках q_n, в которых выполнено уравнение (13),

$$q_n = r_n - r_n^{-1} - \frac{2}{3}r_n^{-3} - \frac{13}{15}r_n^{-5} - \frac{146}{105}r_n^{-7} + \cdots,$$

$r_n = \pi(n + 1/2)$, $n \ge 1$. С большой степенью точности $q_n = (n + 1/2)\pi - ((n + 1/2)\pi)^{-1}$.

Численные значения последовательностей q_n и χ'_n позволяют с заданной точностью использовать модельные полиномиальные аппроксимации. В точках $x_n = F(q_n)$ обратная функция $F^{-1}(x)$ имеет сингулярности производной $\left(F^{-1}(x)\right)' \propto (x - x_n)^{-2/3}$. В численном алгоритме для $F^{-1}(x)$ нами используется кусочно гладкая аппроксимация, такая, что сама эта функция непрерывна везде, а её первая производная имеет правильные особенности во всех точках x_n. При малых x, далеких от $x_1 \approx 0.95$, мы используем аппроксимацию типа (12) высокого порядка.

5. Результаты моделирования КОР с помощью двух разных индикатрис

Основным препятствием для применения эффекта усиления КОР в биомедицинской практике является малая ширина пика. В работах [36,37] показано, что ширина пика значительно увеличивается при понижении пространственной когерентности падающего излучения с одновременным уменьшением высоты пика. Понижение пространственной когерентности в рассматриваемой нами расчетной схеме моделируется путем понижения максимального числа актов рассеяния n_{sc}. Для сравнения угловых зависимостей интенсивности КОР, рассчитанных с помощью индикатрис ХГ и РГ, вид углового распределения которых можно увидеть в работе [28], приведем связь параметра g, определяющего анизотропию рассеяния в ХГ модели, со значением kR в модели РГ [28,34]:

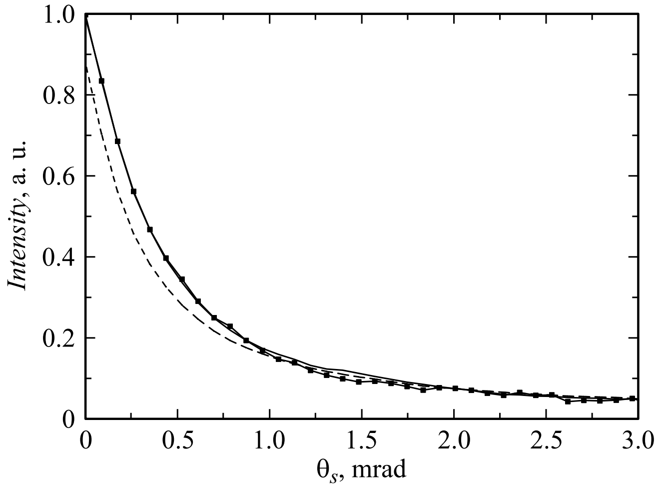

Рис. 2. Зависимость интенсивности КОР от угла θ_s в модели ХГ для сред с заданным параметром анизотропии: штриховая линия $g = 0.001$, сплошная линия $g = 0.772$, линия с закрашенными квадратами $g = 0.925$.

$$g = \frac{4 - (kR)^{-2}\mathrm{Cin}(4kR)}{F(2kR)} - 3,$$

где $\mathrm{Cin}(x)$ - интегральный косинус.

Для падающего луча с длиной волны $\lambda = 685\,\mathrm{nm}$ в среде с показателем преломления $n = 1.33$ находим следующие правила соответствия: $g = 0.773$ для сферических частиц с $R = 250\,\mathrm{nm}$ и $g = 0.925$ для $R = 500\,\mathrm{nm}$. Случай изотропной индикатрисы получаем при $g = 0$ и точечных частиц $R = 0$.

На приведенных ниже рисунках представлены результаты расчетов угловых зависимостей рассеяния назад, в которых учтен только когерентный вклад при разных степенях анизотропии индикатрисы однократного рассеяния. Так, на рис. 2 и 3 представлены угловые зависимости пика КОР, рассчитанные для фазовых функций ХГ и РГ соответственно. Расчеты с фазовой функцией РГ, примененной для системы точечных частиц, описывают результаты изотропного рассеяния. Сравнение этих расчетов с результатами, полученными с фазовой функцией ХГ при $g = 0$ показывает, что они практически совпадают с удовлетворительной точностью. Однако, с ростом анизотропии рассеяния угловые зависимости начинают заметно отличаться, а начиная с размеров рассеивателей, близких к длине волны, наблюдается значительное расхождение. Если в расчетах, выполненных на основе фазовой функции ХГ пик КОР остается достаточно узким, то расчеты по модели РГ приводят к значительному расширению пика, что свидетельствует о возможности использования КОР в биомедицинских приложениях.

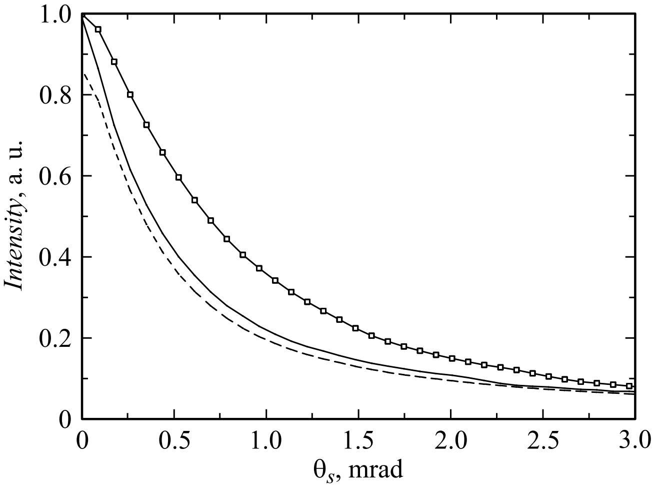

Рис. 3. Зависимость интенсивности КОР от угла θ_s в модели РГ для сред с заданными радиусами рассеивателей: штриховая линия $R = 0.001$ nm, сплошная линия $R = 250$ nm, линия с полыми квадратами $R = 500$ nm.

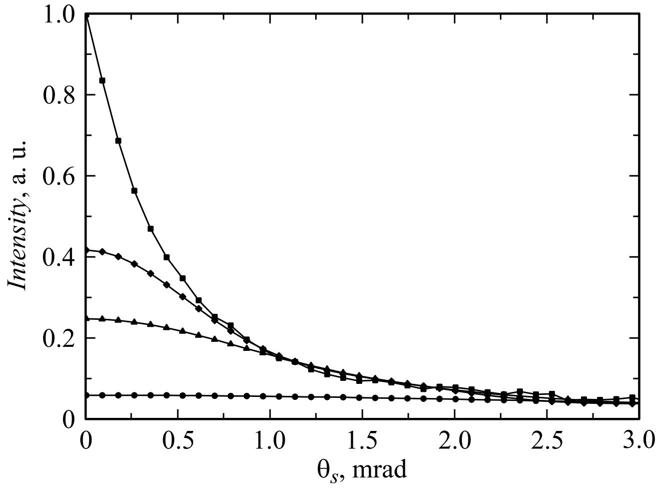

Рис. 4. Зависимость интенсивности КОР от угла θ_s в модели ХГ для сред с заданными количеством рассеяний. Квадрат $n_{sc} = 5000$, ромб $n_{sc} = 100$, треугольник $n_{sc} = 50$, круг $n_{sc} = 15$.

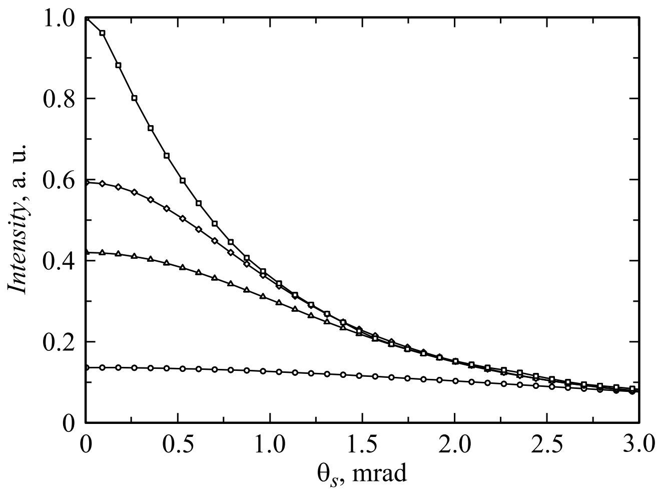

Рис. 5. Зависимость интенсивности КОР от угла θ_s в модели РГ для сред с заданными количеством рассеяний. Квадраты $n_{sc} = 5000$, ромбы $n_{sc} = 100$, треугольники $n_{sc} = 50$, кружки $n_{sc} = 15$.

С ростом анизотропии фазовой функции растет зависимость результатов от технических параметров вычислений, в частности, от выбора точек сшивания интервалов аппроксимаций интегральной функции распределения в модели РГ. Явление расширения пика КОР наблюдается в любом случае, однако количественное описание нестабильно. Согласно работам [36,37] наблюдаемое уширение пика КОР происходит вследствие понижения когерентности падающего излучения, при этом рост уширения пика сопровождается значительным снижением высоты самого пика. В этих работах высота пика составляет около 8% от теоретически предсказываемой высоты, равной рассчитанной по некогерентному лестничному вкладу. Нами для описания влияния понижения пространственной когерентности падающего излучения на КОР были проведены расчеты с ограничениями на полное число рассеяний n_{sc}, при этом мы полагали, что n_{sc} можно рассматривать как то число рассеяний, через которое фаза колебаний теряет согласованность и становится случайной. Длина пространственной когерентности L_c принималась равной $L_c = n_{sc} l_s$. Обозначив через $J_L(\theta_s)$ интенсивность обратного рассеяния, рассчитанную только по лестничным диаграммам, начиная с двукратного рассеяния, т.е. главную некогерентную часть, а через $J_C(\theta_s)$, когерентную составляющую, рассчитанную по максимально перекрестным диаграммам, определим параметр усиления КОР как $h(0) = (J_L(0) + J_C(0))/J_L(0)$.

Практически во всех экспериментальных работах, начиная с пионерских [12,14,38], значение параметра усиления КОР $h(0)$ оказывается заметно меньшим предельного теоретического значения $h(0) = 2$. В частности, в [12] получено экспериментальное значение $h(0) = 1.64$, которое совпадает с результатом нашего численного расчета при выборе $n_{sc} = 340$. Рассчитанная при этом значении n_{sc} полуширина пика КОР $\theta_{\mathrm{HW}} = 1.50$ mrad также неплохо согласуется с экспериментальным значением $\theta_{\mathrm{HW}} = 1.58$ mrad [12].

На рис. 4 и 5 представлены угловые зависимости КОР в полупространствах со средами, в которых анизотропия рассеяния моделируется фазовыми функциями ХГ и РГ соответственно. В расчетах с индикатрисой ХГ параметр анизотропии принимался равным $g = 0.925$, а индикатриса РГ бралась для частиц радиуса $R = 500$ nm, что приводит к такому же значению параметра анизотропии. На этих рисунках показано, как изменяется вид угловых зависимостей КОР, в первую очередь высота и полуширина пика, при понижении числа учитываемых рассеяний n_{sc} и соответственно пространственной длины когерентности $L_c = l_s n_{sc}$. Общим результатом моделирования с помощью обеих фазовых функций является снижение высоты пика и одновременный рост ширины пика на половине высоты при уменьшении длины когерентности. При этом видно, что при одних и тех же значениях L_c пики, рассчитанные по модели РГ, по сравнению с результатами для фазовой функции ХГ являются более широкими и почти всегда более высокими.

Следует отметить, что в работе [37] эффект КОР для низкокогерентного оптического излучения использовался при изучении рака тканей толстой кишки человека. Полученная в этой работе высота пика $h(0)$ составляла около 1.07, а полуширина $\theta_{\mathrm{HW}} \approx 3.5\,\mathrm{mrad}$. Наше МК-моделирования дает такую величину $h(0)$ при $n_{\mathrm{sc}} = 20$.

6. Заключение

На основе уравнения Бете-Солпитера для описания переноса оптического излучения в случайно неоднородной среде было выполнено сравнительное моделирование эффекта КОР при учете анизотропии с помощью фазовых функций ХГ и РГ. В алгоритме МК для индикатрисы РГ нами был впервые реализован аналитический метод обратного преобразования угловой интегральной функции распределения, для которой была предложена кусочно-гладкая аппроксимация. Рассчеты показали, что модель РГ при той же степени анизотропии индикатрисы однократного рассеяния дает более широкий и высокий пик КОР по сравнению с моделью ХГ. Было проведено моделирование уширения пика КОР при понижении когерентности падающего излучения. В расчетах, выполненных на основе фазовой функции РГ уширение оказывается более значительным, чем в расчетах с индикатрисой ХГ. Предсказанное уширение позволяет надеяться на возможность использования этого эффекта в биомедицинских приложениях.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00035, https://rscf.ru/project/23-22-00035/.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] D.A. Boas, L.E. Campbell, A.G. Yodh. Phys. Rev. Lett. **75**, 1855 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.1855
[2] В.В. Тучин. *Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике* (IPR Media, M., 2021).
[3] S.L. Jacques. Phys. Med. Biol. **58**, R37 (2013). DOI: 10.1088/0031-9155/58/11/R37
[4] D.J. Davies, Z. Su, M.T. Clancy, S.J. Lucas, H. Dehghani, A. Logan, A. Belli. Journal of Neurotrauma **32**, 933 (2015). DOI: 10.1089/neu.2014.3748
[5] A. Sabeeh, V.V. Tuchin. J. Biomed. Photonics & Engineering, **6**, 040201 (2020). DOI: 10.18287/JBPE20.06.040201
[6] A.P. Tran, S. Yan, Q. Fang. Neurophoton. **7**, 015008 (2020). DOI: 10.1117/1.NPh.7.1.015008
[7] K. M. Watson, J. Math. Phys. **10**, 688 (1969). DOI: 10.1063/1.1664895
[8] D.A. de Wolf. IEEE Trans on Antennas and Propagation. **19**, 254 (1971). DOI: 10.1109/TAP.1971.1139894
[9] Ю.Н. Барабаненков. Изв. вузов, Радиофизика **16**, 88 (1973).
[10] А.Г. Виноградов, Ю.А. Кравцов, В. И. Татарский. Изв. вузов, Радиофизика 16, 1064 (1973).
[11] Y. Kuga and A. Ishimaru. J. Opt. Soc. Am. A **1**, 831 (1984).
[12] M. P. Van Albada and A. Lagendijk. Phys. Rev. Lett. **55**, 2692 (1985). DOI: 10.1103/PhysRevLett.55.2692
[13] P.-E. Wolf and G. Maret, Rev. Lett. **55**, 2696 (1985).
[14] E. Akkermans, P. Wolf, R. Maynard, and G. Maret. J. Phys. France **49**, 77 (1988). DOI: 10.1051/jphys:0198800490107700
[15] D.J. Pine, D.A. Weitz, P.M. Chaikin, and E. Herbolzheimer. Phys. Rev. Lett. **60**, 1134 (1988).
[16] P. Wolf, G. Maret, E. Akkermans, and R. Maynard. J. Phys. France **49**, 63 (1988). DOI: 10.1103/PhysRevLett.60.1134
[17] F. Scholkmann, S. Kleiser, A.J. Metz, R. Zimmermann, J. Mata Pavia, U. Wolf, and M. Wolf. Neuroimage **85**, 6 (2014). DOI: 10.1016/j.neuroimage.2013.05.004
[18] H. Liu, D.A. Boas, Y. Zhang, A.G. Yodh, and B. Chance. Phys. Med. Biol. **40**, 1983 (1995). DOI: 10.1088/0031-9155/40/11/015
[19] O. Pucci, V. Toronov, and K. St Lawrence. Appl. Opt. **49**, 6324 (2010). DOI: 10.1364/AO.49.006324
[20] В.Л. Кузьмин, Ю.А. Жаворонков, С.В. Ульянов, А.Ю. Вальков. ЖЭТФ, **161**, 779 (2022). DOI: 10.31857/S0044451022060013
[21] J. Zhao, H.S. Ding, X.L. Hou, C.L. Zhou, and B. Chance. J. Biomed. Opt. **10**, 024028 (2005). DOI: 10.1117/1.1891345
[22] V. Ntziachristos, B. Chance. Med. Phys. **28**, 1115 (2001). DOI: 10.1118/1.1373674
[23] A. Torricelli, D. Contini, A. Pifferi, M. Caffini, R. Re, L. Zucchelli, L. Spinelli. Neuroimage **85**, 28 (2014). DOI: 10.1016/j.neuroimage.2013.05.106
[24] H. Wabnitz, J. Rodriguez, I. Yaroslavsky, A. Yaroslavsky, V. V. Tuchin. *Handbook of Optical Biomedical Diagnostics. Light-Tissue Interaction, 2nd ed., Vol. 1* (SPIE Press, Bellingham, Washington, 2016).
[25] T. Durduran, R. Choe, J.P. Culver, L. Zubkov, M.J. Holboke, J. Giammarco, B. Chance, A.G. Yodh. Phys. Med. Biol. **47**, 2847 (2002). DOI: 10.1088/0031-9155/47/16/302
[26] M.A. Franceschini, S. Thaker, G. Themelis, K.K. Krishnamoorthy, H. Bortfeld, S.G. Diamond, D.A. Boas, K. Arvin, P.E. Grant. Frequency-Domain Near-Infrared Spectroscopy,. Pediatr. Res. **61**, 546 (2007). DOI: 10.1203/pdr.0b013e318045be99
[27] A.Ishimaru. Wave Propagation and Scattering in Random Media.
[28] В.Л. Кузьмин, А.Ю. Вальков, Л.А. Зубков. ЖЭТФ **155**, 460 (2019). DOI: 10.1134/S0044451019030088

[29] И.М. Соболь. *Численные методы Монте-Карло* (Изд-во Наука, М., 1973).
[30] V.L. Kuzmin, V.P. Romanov, E.V. Aksenova. Phys. Rev. E**65**, 016601 (2001). DOI: 10.1103/PhysRevE.65.016601
[31] T.M. Nieuwenhuizen J. M. Luck. Phys. Rev. E **48**, 569 (1993).
[32] L. Wang, S. L. Jacques, L. Q. Zheng. Comput. Meth. Prog. Bio. **47**, 131 (1995). DOI: 10.1016/0169-2607(95)01640-F
[33] L. Devroye. *Non-Uniform Random Variate Generation* (Springer, New York, 1986).
[34] В.Л. Кузьмин, А.Ю. Вальков. Письма в ЖЭТФ **105**, 261 (2017). DOI: 10.7868/S0370274X17050022
[35] С. Чандрасекар. *Перенос лучистой энергии* (Изд-во иностранной литературы, М., 1953).
[36] Y. L. Kim, P. Pradhan, H. Subramanian, Y. Liu, M. H. Kim, V. Backman. Opt. Lett. **31**, 1459 (2006). DOI: https://doi.org/10.1364/OL.31.001459
[37] Y. L. Kim, Y. Liu, V. M. Turzhitsky, H. K. Roy., R. K. Wali, H. Subramanian, P. Pradhan, V. Backman. J. Biomed. Opt. **11**, 041125 (2006). DOI: 10.1117/1.2236292
[38] D. S. Wiersma, M. P. van Albada, A. Lagendijk. Phys. Rev. Lett. **75**, 1739 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.1739