

01

## Формирование изображения звезды при влиянии углового анизопланатизма в турбулентной атмосфере

© В.А. Богачев,<sup>1</sup> А.В. Немцева,<sup>1,2</sup> Ф.А. Стариков<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,

607188 Саров, Нижегородская обл., Россия

<sup>2</sup> Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,

Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Сарове,

607328 Саров, Нижегородская обл., Россия

<sup>3</sup> Саровский физико-технический институт — филиал Национального исследовательского ядерного университета „Московский инженерно-физический институт“,

607186 Саров, Нижегородская обл., Россия

e-mail: bogachev.v@mail.ru

Поступило в Редакцию 28 февраля 2024 г.

В окончательной редакции 3 апреля 2024 г.

Принято к публикации 12 апреля 2024 г.

Проведено трехмерное численное моделирование распространения излучения естественной звезды через турбулентную атмосферу к телескопу, расположенному на Земле, а также получения ее изображения с помощью адаптивной оптики и техники лазерного опорного источника. Проведена верификация расчетной модели. Исследована и сравнена с приближенными аналитическими данными точность определения угловой координаты звезды с помощью излучения второй естественной звезды, находящейся за пределами изопланарной области, при различном внешнем масштабе турбулентности.

**Ключевые слова:** численное моделирование, турбулентная атмосфера, внешний масштаб турбулентности, угловой анизопланатизм.

DOI: 10.61011/JTF.2024.06.58123.59-24

### Введение

В настоящей работе рассматриваются вопросы, представляющие интерес для астрономии и лазерной локации удаленных объектов. Для астрономии актуальна задача о наблюдении космических объектов, находящихся как на очень большом (звезды), так и на конечном расстоянии от телескопа. Задача о лазерной локации космического объекта, движущегося по околоземной орбите, вызывает особый интерес в связи с проблемами космической лазерной связи [1], а также с загрязнением околоземного пространства космическим мусором, значительная часть которого не каталогизирована [2]. В обоих случаях на качество изображения космического объекта существенное влияние оказывает турбулентность атмосферы.

В современных наземных астрономических обсерваториях для компенсации негативного влияния атмосферной турбулентности используются адаптивные оптические системы (АОС) [3–6]. Суть работы АОС состоит в измерении оптических искажений на пути следования света в атмосфере до телескопа и внесении требуемых фазовых искажений, компенсирующих влияние турбулентности, с помощью адаптивного зеркала. Для этой цели может быть использовано как излучение от самого наблюдаемого объекта, так и излучение от „зажигаемого“ в его направлении искусственного источника —

лазерной опорной звезды (ЛОЗ) [7]. Последний случай актуален, если объект имеет малый блеск или рядом отсутствует достаточно яркий естественный астрономический источник. При этом интересующий объект и ЛОЗ должны находиться в пределах изопланарной области, т.е. угловое расстояние между ними должно быть достаточно малым, чтобы свет от объекта и ЛОЗ проходил через одни и те же оптические неоднородности. В реальных АОС эффективность применения рэлеевской ЛОЗ ограничена высотой 10–20 km над поверхностью Земли из-за убывания эффективности рэлеевского рассеяния с увеличением высоты. Формирование ЛОЗ в натриевом слое на высоте 90–100 km является более предпочтительным, так как в этом случае компенсируются оптические неоднородности всего значимого столба атмосферы.

Применение техники ЛОЗ сопряжено с проблемой определения глобального наклона волнового фронта [8]. Лазерный пучок, создающий ЛОЗ, и излучение от ЛОЗ, перехваченное телескопом, проходят через один и тот же атмосферный оптический „клин“, что делает невозможным определение величины наклона волнового фронта опорного излучения. Изучаются различные подходы к решению этой проблемы [9–12], в которых значительную роль играет расчетное моделирование [13,14]. Сопоставление результатов аналитических оценок и численного моделирования распространения излучения че-

рез турбулентную атмосферу позволяет верифицировать численную модель и глубже понять влияние различных эффектов на качество изображения астрономического объекта, сформированного с помощью адаптивной оптики.

В настоящее время при создании систем лазерной космической связи [1] одной из ключевых является проблема точного позиционирования передаваемого сигнала на удаленном приемнике [15–17]. Весьма полезными здесь оказываются экспериментальные данные о взаимной корреляции наклонов волнового фронта от двойных звезд [18,19]. Например, в работе [19] такие данные приведены для трех пар звезд при различном угловом расстоянии между ними, а также для одной двойной звезды при различных значениях угла места. Естественно, экспериментальные данные получены при определенных условиях оптической погоды. Численные оценки предоставляют большую гибкость в варьировании как параметров исходящего лазерного излучения, так и турбулентной трассы, по которой оно распространяется [20,21]. Однако при проведении расчетных оценок важно учитывать конечность внешнего масштаба турбулентности как параметра, определяющего крупномасштабные оптические aberrации.

Целью настоящей работы является расчетное исследование возможности формирования дифракционного изображения естественной звезды и точности определения ее угловой координаты с помощью адаптивной оптики и совместного использования опорного излучения двух видов — от ЛОЗ, зажигаемой в ее направлении, и второй звезды, находящейся на угловом расстоянии, существенно превышающем классический угол изопланатизма. Результаты, полученные в трехмерных расчетах при различном внешнем масштабе турбулентности, сравниваются с имеющимися в литературе аналитическими оценками.

## 1. Постановка задачи

Схема задачи представлена на рис. 1. Две естественные звезды наблюдаются через телескоп, расположенный на Земле. Угловое расстояние между ними  $\alpha = 10 \text{ arcsec} = 48.5 \mu\text{rad}$  — по  $5 \text{ arcsec}$  влево и вправо (по оси  $x$ ) от вертикального направления  $z$ . Для наблюдателя на Земле звезды являются практически точечными источниками света. В связи с тем, что они удалены на огромное расстояние, кривизна волнового фронта их излучения, дошедшего до Земли, является пренебрежимо малой величиной. Считаем, что на верхней границе атмосферы излучение от каждой звезды имеет плоский волновой фронт, который при прохождении через атмосферу приобретает фазовые искажения. Излучение от звезд после телескопа с круглой входной апертурой либо непосредственно, либо после прохода через АОС фокусируется линзой для построения изображения звезд.

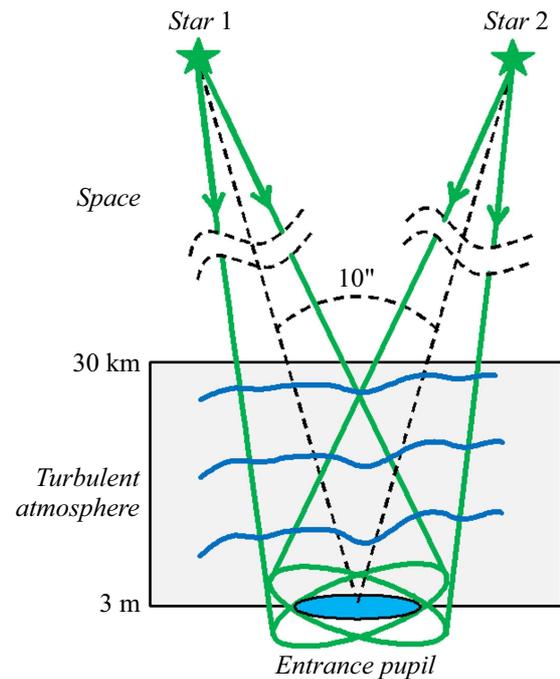


Рис. 1. Схема задачи по исследованию углового анизопланатизма.

Для расчетов используется высотная модель структурной характеристики показателя преломления воздуха  $C_n^2(h)$  [22]. В приземном слое  $C_n^2 = 2 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^{-2/3}$ , что отвечает ночным наблюдениям на равнинной местности. Известно, что основными пространственными параметрами, характеризующими влияние турбулентности атмосферы на световое излучение, являются параметр Фрида  $r_0$ , угол изопланатизма  $\theta_0$  и изокинетический угол  $\theta_T$ . Параметр  $\theta_0$  характеризует область изопланатизма с учетом всех оптических aberrаций, а параметр  $\theta_T$  — с учетом только наклонов волнового фронта по осям  $x$  и  $y$ .

В случае колмогоровского спектра флуктуаций показателя преломления воздуха параметры  $r_0$ ,  $\theta_0$  и  $\theta_T$  определяются как [4]:

$$r_0 = \left( 0.423k^2 (\sec \xi)^2 \int_{h_0}^{h_{\max}} C_n^2(\xi) d\xi \right)^{-3/5}, \quad (1)$$

$$\theta_0 = \left( 2.914k^2 (\sec \xi)^{8/3} \int_{h_0}^{h_{\max}} C_n^2(\xi) \xi^{5/3} d\xi \right)^{-3/5}, \quad (2)$$

$$\theta_T = \left( 0.668k^2 D^{-1/3} (\sec \xi)^3 \int_{h_0}^{h_{\max}} C_n^2(\xi) \xi^2 d\xi \right)^{-1/2}, \quad (3)$$

где  $\lambda$  и  $k = 2\pi/\lambda$  — длина волны и волновое число излучения,  $\xi$  — зенитный угол,  $D$  — диаметр приемной апертуры телескопа,  $h_0$  — высота приемной апертуры телескопа над поверхностью Земли,  $h_{\max}$  — высота

верхней границы атмосферы. Для заданных в расчетах параметров  $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$ ,  $\xi = 0^\circ$ ,  $D = 1 \text{ m}$ ,  $h_0 = 3 \text{ m}$ ,  $h_{\text{max}} = 30 \text{ km}$  получаем, что  $r_0 = 5.9 \text{ cm}$ ,  $\theta_0 = 0.6 \text{ arcsec}$ ,  $\theta_T = 2.13 \text{ arcsec}$ . Важно отметить, что  $\theta_T < \alpha$  и  $\theta_0 \ll \alpha$ . Аналитические выражения для  $r_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_T$  (1)–(3) являются предельными (оценкой снизу), так как в колмогоровской модели турбулентности внутренний масштаб искажений  $l_0 = 0$ , а внешний масштаб  $L_0 = \infty$ . В реальности параметры  $l_0$ ,  $L_0$  принимают конечные значения.

## 2. Расчетная модель

Расчет распространения излучения в турбулентной атмосфере проводился в рамках интегрирования параболического уравнения для комплексной амплитуды поля излучения [23]:

$$2ik \frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 \varepsilon E = 0, \quad (4)$$

где  $E(x, y, z)$  — комплексная амплитуда напряженности электрического поля излучения,  $\varepsilon(x, y, z)$  — функция, описывающая флуктуации диэлектрической проницаемости среды. Уравнение (4) решалось численно с использованием разностной схемы Ладагина [24], обладающей нулевой амплитудной ошибкой и фазовой погрешностью четвертого порядка при интегрировании дифракционного оператора. Сплошная случайно-неоднородная среда заменялась эквивалентной цепочкой фазовых экранов. В расчетах использовалась модель пространственного спектра флуктуаций показателя преломления фон Кармана [25]:

$$\Phi_n(\kappa_\perp, \kappa_z) = 0.033 C_n^2 (\kappa_\perp^2 + \kappa_z^2 + \kappa_0^2)^{-11/6}, \quad (5)$$

где  $\kappa^2 = \kappa_\perp^2 + \kappa_z^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2$ ,  $\kappa$  — пространственная частота,  $\kappa_0 = 2\pi/L_0$  — наименьшая пространственная частота,  $L_0$  — внешний масштаб турбулентности. Наибольшая пространственная частота  $\kappa_m = 2\pi/l_0$  соответствует внутреннему масштабу турбулентности  $l_0$ . Вклад в „энергию“ турбулентности от самых малых масштабов незначителен, поэтому для спектра (5)  $l_0 = 0$ . В инерционном интервале  $2\pi L_0^{-1} \leq \kappa \leq 2\pi l_0^{-1}$  спектр фон Кармана соответствует теории Колмогорова–Обухова [26,27].

Для спектра фон Кармана известно аналитическое выражение для вычисления корреляционной функции фазы на тонком фазовом экране [28]:

$$B_\varphi(r) = \sigma_\varphi^2 \frac{2^{1/6}}{\Gamma(5/6)} (\kappa_0 r)^{5/6} K_{5/6}(\kappa_0 r), \quad (6)$$

$$\sigma_\varphi^2 = 2.4\pi^2 k^2 \kappa_0^{-5/3} (0.033 C_n^2 \Delta z), \quad (7)$$

где  $r$  — расстояние между двумя точками экрана,  $\Gamma(-)$  — гамма-функция,  $K(-)$  — функция Макдональда,  $\sigma_\varphi^2$  — дисперсия флуктуаций фазы на экране,  $\Delta z$  — толщина турбулентного слоя, заменяемого фазовым

экраном,  $C_n^2 = \text{const}$ . Для вертикальной трассы, моделируемой совокупностью фазовых экранов, используем в выражении (7)  $\int_{h_0}^{h_{\text{max}}} C_n^2(\xi) d\xi$  вместо  $C_n^2 \Delta z$ . Структурная функция фазы вычислялась по формуле

$$D_\varphi(r) = 2(B_\varphi(0) - B_\varphi(r)). \quad (8)$$

В расчетной модели турбулентная трасса заменялась цепочкой из  $M$  фазовых экранов,  $\delta$ -коррелированных вдоль направления  $z$  [29,30]. Структурная функция фазы для цепочки экранов вычислялась как сумма структурных функций отдельных экранов т. е.

$$D_\varphi^{\text{num}}(r) = \sum_{i=1}^M D_i^{\text{num}}(r).$$

Поскольку используемая модель соответствует условиям локально однородной и изотропной турбулентности, вычисление  $D_i^{\text{num}}(r)$  на сетке проводилось вдоль одного выделенного направления на  $i$ -м фазовом экране с использованием корреляционной функции, вычисленной в узлах сетки:

$$B_i^{\text{num}}(l) = \frac{1}{(N-l)} \sum_{m=1}^{N-l} \tilde{\varphi}_i(m, N/2) \tilde{\varphi}_i^*(m+l, N/2), \quad (9)$$

где  $\tilde{\varphi}_i(m, n)$  — случайная реализация комплексного фазового поля [28],  $N$  — четное число узлов расчетной сетки,  $l = 0, \dots, N-1$ .

В спектральном методе [29] случайное фазовое поле формируется с помощью фильтрации гауссова псевдослучайного поля, а передаточная функция фильтра определяется пространственным спектром фазовых флуктуаций. Этот метод позволяет сформировать фазовые экраны с  $L_0 \leq A/2$ , где  $A$  — поперечный размер счетной области. В расчетах  $A = 5.12 \text{ m}$ , что позволяет корректно моделировать фазовые искажения с  $L_0$  до 2.56 m. Минимальный размер искажений  $l_0 \approx 2s$  [29] равен 5 mm, где  $s$  — шаг расчетной сетки.

Для моделирования крупномасштабных искажений при  $L_0 > A/2$  и сохранения размера счетной области дополнительно применялся метод субгармоник [28,31]. Суть этого метода состоит в последовательном добавлении в спектр флуктуаций фазы пространственных гармоник, период которых больше размера счетной области. Эта процедура осуществляется путем последовательного (итерационного) сгущения узлов расчетной сетки в спектральной плоскости ( $\Delta\kappa_x, \Delta\kappa_y$ ) в окрестности нулевой гармоники. В соответствии с [31] на каждой  $j$ -й итерации в спектр фазы добавляются дополнительные 32 гармоники с шагом  $\Delta\kappa_x/3^j$  и  $\Delta\kappa_y/3^j$ , которые рассчитываются в прямоугольной области спектрального пространства, ограниченной точками с координатами  $(\pm\Delta\kappa_x/3^{j-1}, \pm\Delta\kappa_y/3^{j-1})$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$ . Таким образом, точность воспроизведения низкочастотной части спектра фазы возрастает за счет увеличения числа

итераций  $J$ . Результирующее фазовое поле находится в виде суммы ее высокочастотной части, получаемой спектральным методом, и низкочастотной части, генерируемой с субгармониками. Структурная функция фазы на  $j$ -й итерации представляет собой сумму структурных функций высокочастотной части фазы и ее низкочастотной части до  $j$ -й итерации включительно.

На рис. 2 даны структурные функции фазы, вычисленные при разных значениях  $L_0$ . При увеличении  $L_0$  абсолютные значения функции  $D_\varphi(r)$  увеличиваются. Как следует из рис. 2, а, структурная функция фазы на дискретной сетке действительно близка к аналитической при  $L_0 = A/2 = 2.56$  м. При использовании только спектрального метода ошибка моделируемой структурной функции фазы возрастает при увеличении  $L_0$  — на приемной апертуре она достигает 2, 37, 44 и 56% при  $L_0$ , равном 2.56, 20, 40 и 1000 м соответственно. С увеличением числа уровней субгармоник расчетная структурная функция практически совпадает с аналитической, что говорит об адекватном моделировании турбулентного поля флуктуаций показателя преломления. Стоит также отметить, что необходимость в учете конечности  $L_0$  возрастает при увеличении приемной апертуры телескопа.

Таким образом, фазовые экраны, сформированные с помощью комбинации спектрального метода с методом субгармоник, позволяют построить численную модель турбулентности, учитывающую влияние крупномасштабных пространственных неоднородностей, превышающих размер счетной области, на характер распространения пучка в атмосфере. Ниже эта модель была использована для представления вертикальной турбулентной трассы цепочкой фазовых экранов, которые генерировались вышеописанным методом.

### 3. Результаты численного моделирования

На рис. 3 представлены расчетные распределения интенсивности излучения  $I_{NF}(x/D, y/D)$  от звезд 1 и 2 в ближней зоне на приемной круглой апертуре в одной реализации турбулентной атмосферы при  $L_0 = 20$  м. На рис. 4 показаны изображения звезд, т.е. распределения интенсивности их излучения в дальней зоне  $I_{FF}(\theta_x, \theta_y)$ , смещенные на угол  $+5$  arcsec и  $-5$  arcsec от оси по направлению  $x$ . Значения интенсивности  $I_{NF}$  и  $I_{FF}$  нормированы на соответствующие им максимальные значения  $I_{NF}^{vac}$  и  $I_{FF}^{vac}$  в случае прохождения пучка в вакууме. Распределения  $I_{NF}(x/D, y/D)$  и  $I_{FF}(\theta_x, \theta_y)$  имеют ярко выраженную неоднородную структуру, причем она различна для двух трасс. Это уже свидетельствует об анизопланатичности трасс, по крайней мере, по высшим абберациям.

Качество изображения в дальней зоне характеризует влияние турбулентности на излучение, размер пятна существенно превышает дифракционный размер  $\theta_{dif} = 0.28$  arcsec, где  $\theta_{dif} = 2.44\lambda/D$ . В колмогоровской

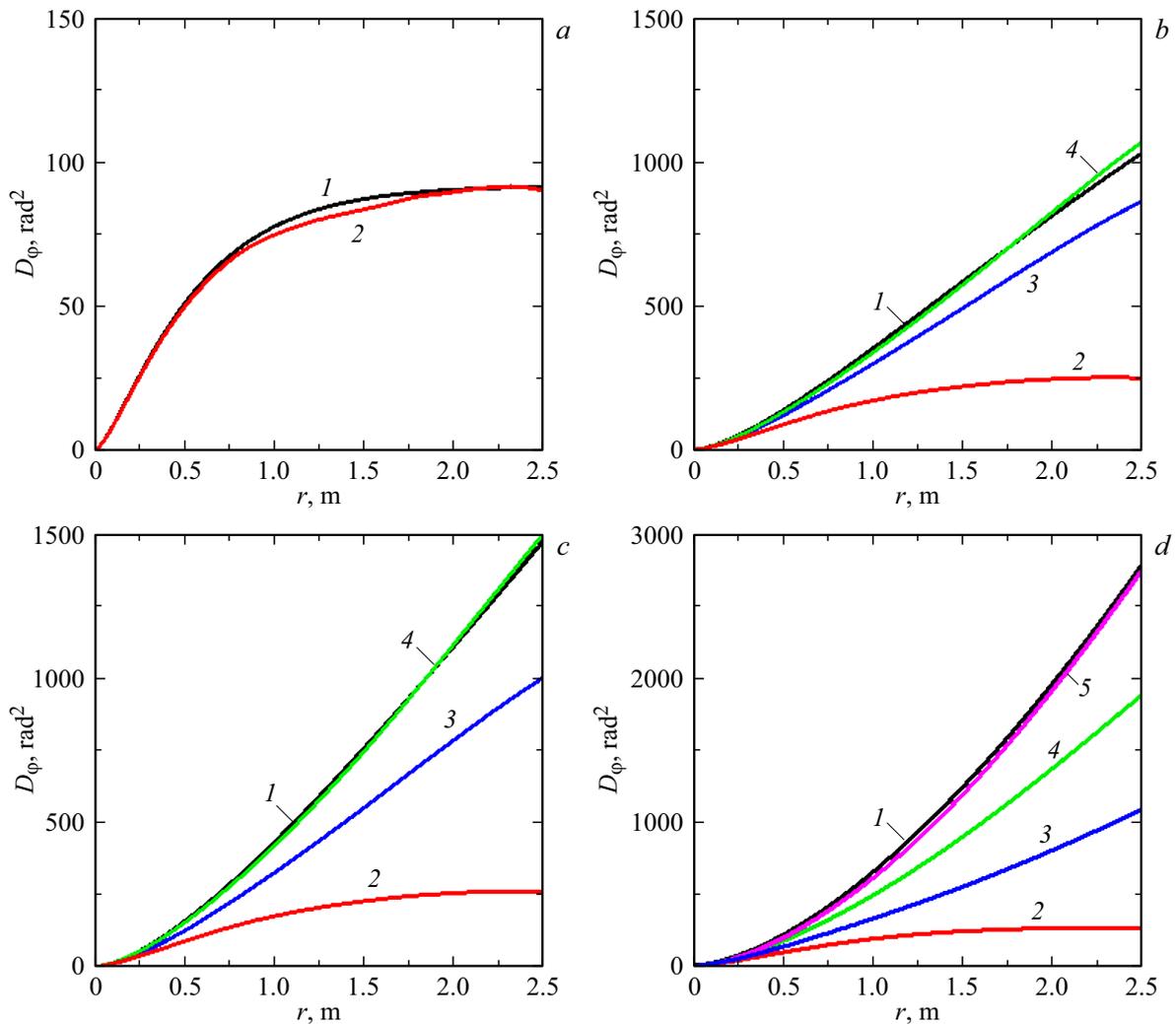
модели турбулентности угловая ширина на полувысоте изображения звезды  $\theta_{FWHM}$  при длительной экспозиции связана с радиусом Фрида как  $\theta_{FWHM} = 0.98\lambda/r_0$  [32]. Используя это выражение, выполним оценку радиуса когерентности атмосферы  $\rho_0$  (аналог параметра  $r_0$  при конечном  $L_0$ ) в случае кармановской модели. Длительная экспозиция моделировалась за счет усреднения 100 изображений звезды, соответствующих различным реализациям турбулентной трассы. В расчетах получено, что  $\rho_0 = 7.4$  см при  $L_0 = 20$  м, т.е. конечность внешнего масштаба турбулентности увеличивает радиус когерентности (напомним, что  $\rho_0 = r_0 = 5.9$  см при  $L_0 = \infty$ ). Зависимость  $\rho_0(L_0)$  будет представлена ниже.

На рис. 5 показано распределение фазы излучения в ближней зоне от каждой звезды и их разности в данной реализации атмосферы (наклоны оптических осей от вертикали на  $\pm 5$  arcsec не учитываем). При развертывании (unwrapping) фазы устранялись ее скачки на  $2\pi$  [33]. При существенно неоднородной картине интенсивности на рис. 3 распределение фазы регулярное (в некоторых областях фазовой поверхности остались малые артефакты, которые не затрудняют восприятие картины в целом).

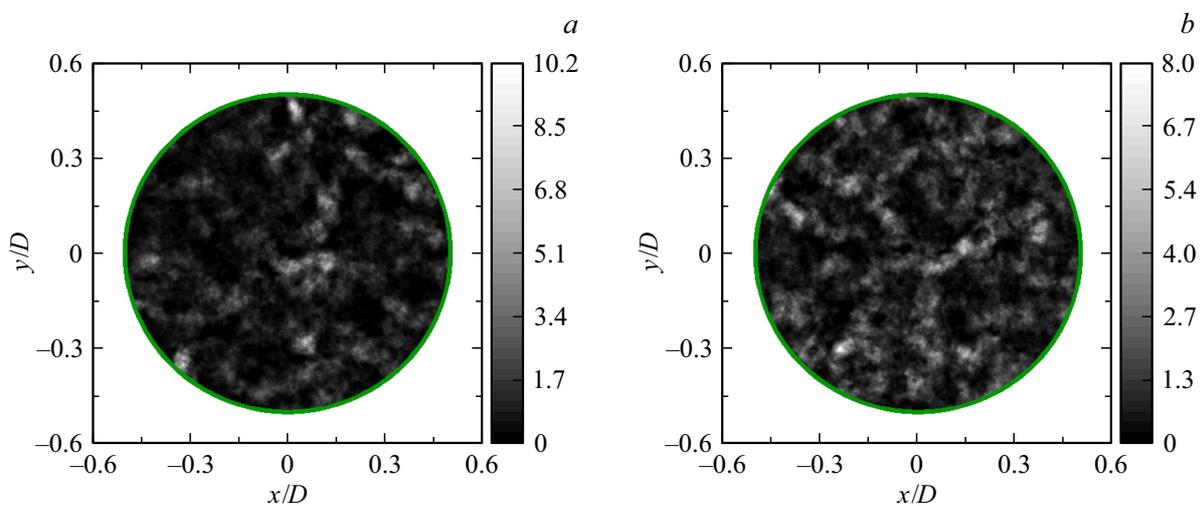
Для фазовой поверхности излучения звезд 1 и 2 параметр  $PV$  (peak-to-valley), т.е. максимальный перепад фазы на апертуре, равен  $PV = 33.9$  и  $24.2$  rad соответственно, а для разности фаз —  $PV = 21.6$  rad. Хотя фазовые поверхности излучения от обеих звезд в целом напоминают друг друга, их разность дает сравнимое значение  $PV$ . Это уже указывает на некоторую степень изопланатичности по низшим абберациям и ее отсутствие по всей совокупности аббераций, что по влиянию на качество изображения аналогично случаю неполного фазового сопряжения [34,35].

Теперь представим себе, что звезда 2, четкое изображение которой нам нужно получить, имеет такую малую звездную величину, что измерить волновой фронт ее излучения не представляется возможным — хорошо известная в астрономии проблема слабого сигнала (малый размер космического мусора или малый блеск звезды). Тогда построим изображение звезды 2 в дальней зоне при фазовой коррекции ее излучения, внося с помощью воображаемого адаптивного зеркала фазовый экран, сопряженный фазе излучения от яркой звезды 1. В этом случае после прохождения адаптивного зеркала излучение звезды 2 приобретет разностный фазовый фронт (рис. 5, с). Изображение звезды 2 показано на рис. 6, а. Его полный угловой размер по уровню 95% энергии после усреднения равен 6 arcsec, что примерно совпадает со случаем без коррекции (рис. 4, б). В этом и выражается анизопланатизм по всем абберациям, т.е. использование звезды 1 в качестве опорного источника для коррекции фазовых искажений от звезды 2 является абсолютно неэффективным.

Поскольку восстановить волновой фронт излучения звезды 2 невозможно из-за ее малого блеска, можно „зажечь“ натриевую ЛОЗ в ее направлении. Но ЛОЗ



**Рис. 2.** Аналитическая (1) и расчетные структурные функции фазы, полученные спектральным методом (2) и с дополнительным использованием метода субгармоник при  $J = 1$  (3), 2 (4), 4 (5) для  $L_0$ , равного 2.56 (a), 20 (b), 40 (c), 1000 м (d).



**Рис. 3.** Мгновенное распределение нормированной интенсивности излучения звезды 1 (a) и 2 (b) в ближней зоне.

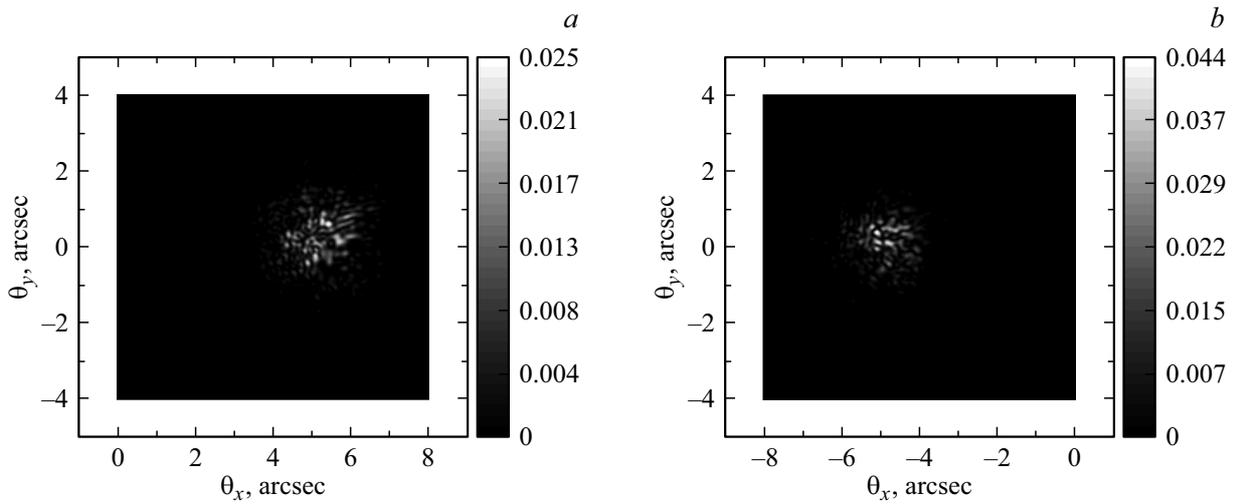


Рис. 4. Мгновенное распределение нормированной интенсивности излучения звезды 1 (а) и 2 (б) в дальней зоне.

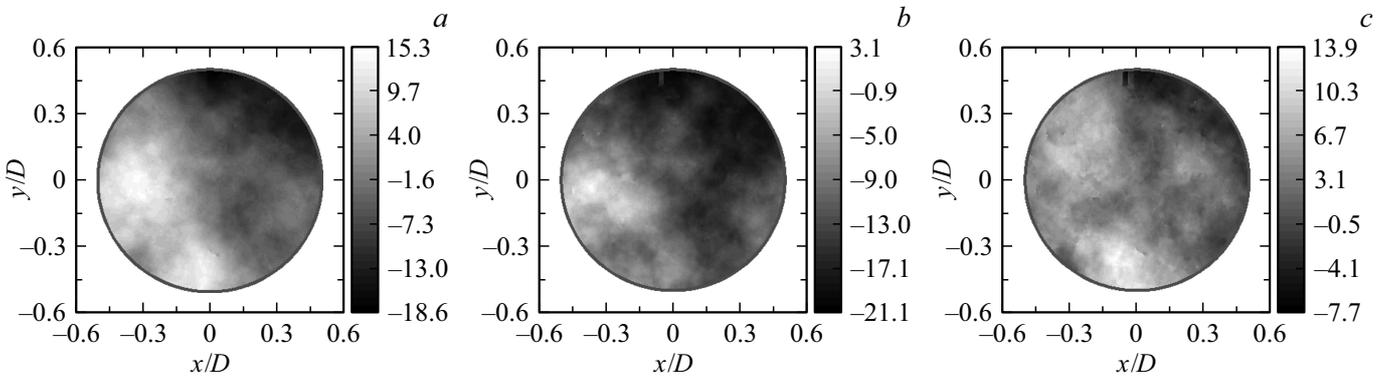


Рис. 5. Распределение фазы излучения (в рад) от звезды 1 (а) и 2 (б) и их разности (с).

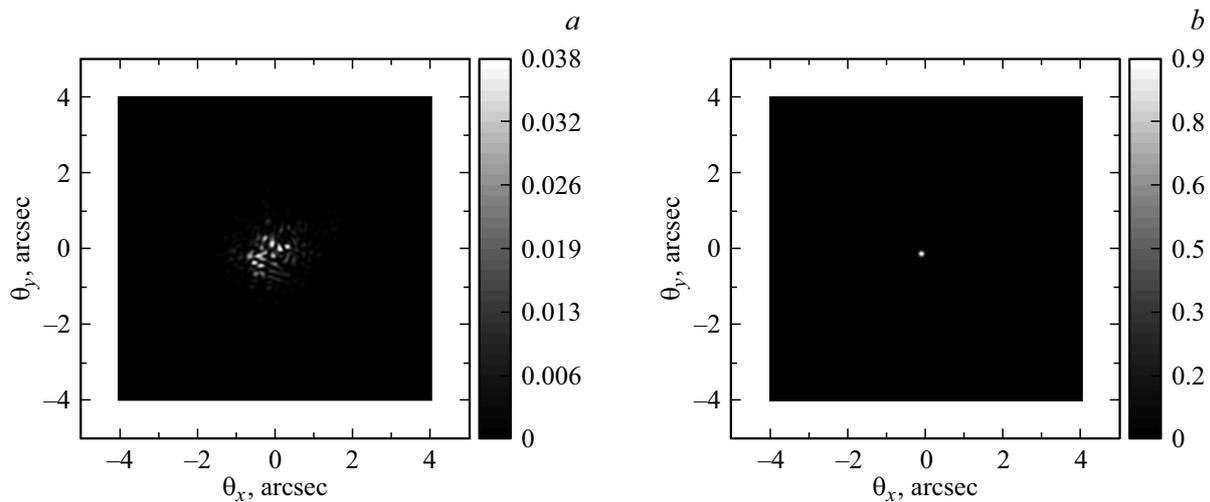
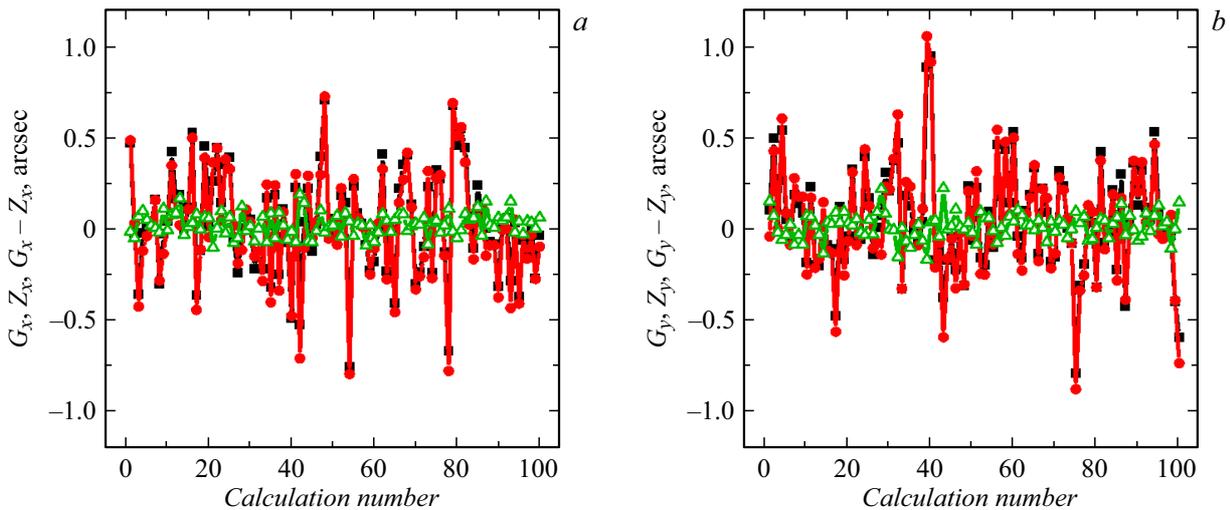


Рис. 6. Распределение нормированной интенсивности звезды 2 при фазовой коррекции по волновому фронту от звезды 1 (а), при фазовой коррекции по ее высшим абберациям и наклонам волнового фронта от звезды 1 (б).

формируется с помощью расположенного на Земле лазера, поэтому возникает проблема неопределенности угловой координаты ЛОЗ (т.е. глобального наклона

волнового фронта) [9–11]. В связи с этим для управления адаптивным зеркалом используем высшие (кроме наклона волнового фронта) абберации от излучения



**Рис. 7.** Координаты  $G$ -наклона (квадраты) и  $Z$ -наклона (круги) волнового фронта излучения от звезды 1 и их разность (треугольники).

ЛОЗ, а наклон — от излучения яркой соседней звезды 1, помня о наличии некоторой степени изопланатичности трасс по низшим абберациям. На рис. 6,  $b$  показано изображение звезды 2 при фазовой коррекции по высшим абберациям ЛОЗ (в пренебрежении эффектом конуса [4]) и наклонам волнового фронта от звезды 1. Здесь изображение идеальное, но оно отклонено от оси на разность двух наклонов. Далее найдем погрешность определения угловой координаты звезды 2 таким способом.

Наклон волнового фронта звезды можно определять двумя способами: по центру масс изображения в дальней зоне и из разложения фазы в ближней зоне по полиномам Цернике [36,37]. На рис. 7 показаны значения  $Gradient$ - и  $Zernike$ -наклона ( $G$ - и  $Z$ -наклона) волнового фронта излучения звезды 1 по оси  $x$  и  $y$  и их разность для 100 случайных реализаций турбулентности атмосферы. Координаты  $G$ -наклона — это угловые координаты ( $G_x, G_y$ ) центра масс изображения звезды, координаты  $Z$ -наклона ( $Z_x, Z_y$ ) — это угловые координаты двух наклонов при разложении волнового фронта излучения по базису полиномов Цернике. Видно, что значения наклонов двух типов близки друг к другу, а амплитуда их разности, соответственно, существенно меньше амплитуды наклона. В расчетах получено, что  $RMS$  (root-mean-square, среднеквадратичное отклонение) полного (по осям  $x$  и  $y$ )  $G$ -наклона в 1.08 раза меньше, чем  $RMS$   $Z$ -наклона — 0.4 arcsec против 0.43 arcsec (для колмогоровской модели турбулентности с бесконечным  $L_0$  отличие в значениях  $RMS$  составляет 1.07 раза [38]).

Угловые координаты  $G$ -наклона волнового фронта от двух звезд для 100 случайных реализаций турбулентности атмосферы показаны на рис. 8,  $a, b$ . Здесь и далее индексы 1 и 2 указывают отношение параметра к звезде 1 и 2 соответственно. Штрихом обозначен уровень, соответствующий половинному дифракционно-

му углу  $0.5\theta_{dif} = 0.14 \text{ arcsec}$ . Видна достаточно высокая корреляция наклонов волнового фронта от двух звезд как по направлению  $x$ , так и по  $y$ . В целом амплитуда флуктуаций наклонов не превышает  $2\theta_{dif}$ . Из рис. 8,  $c, d$  видно, что амплитуда флуктуаций разности наклонов не превышает  $\theta_{dif}$  по направлению  $x$  и  $0.5\theta_{dif}$  по  $y$ , что служит ориентировочным уровнем угловой ошибки определения координаты звезды 2.

На рис. 9,  $a$  показаны  $RMS$  наклонов волнового фронта  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}$  и  $\sigma_{y1}, \sigma_{y2}$  по осям  $x$  и  $y$  для двух звезд в зависимости от  $L_0$ . Расчетные зависимости  $\sigma_{x1}(L_0), \sigma_{y1}(L_0), \sigma_{x2}(L_0), \sigma_{y2}(L_0)$  монотонно растут с ростом  $L_0$  и, кроме этого,  $\sigma_{x1} \approx \sigma_{y1}, \sigma_{x2} \approx \sigma_{y2}$  с точностью не хуже 5% при заданном  $L_0$ , что согласуется с представлениями об изотропности турбулентности.

На рис. 9,  $a$  также показаны приближенные аналитические зависимости [38,39]. В [38] приведено аналитическое выражение для оценки  $RMS$  наклона волнового фронта при  $\eta = D/L_0 \ll 1$ :

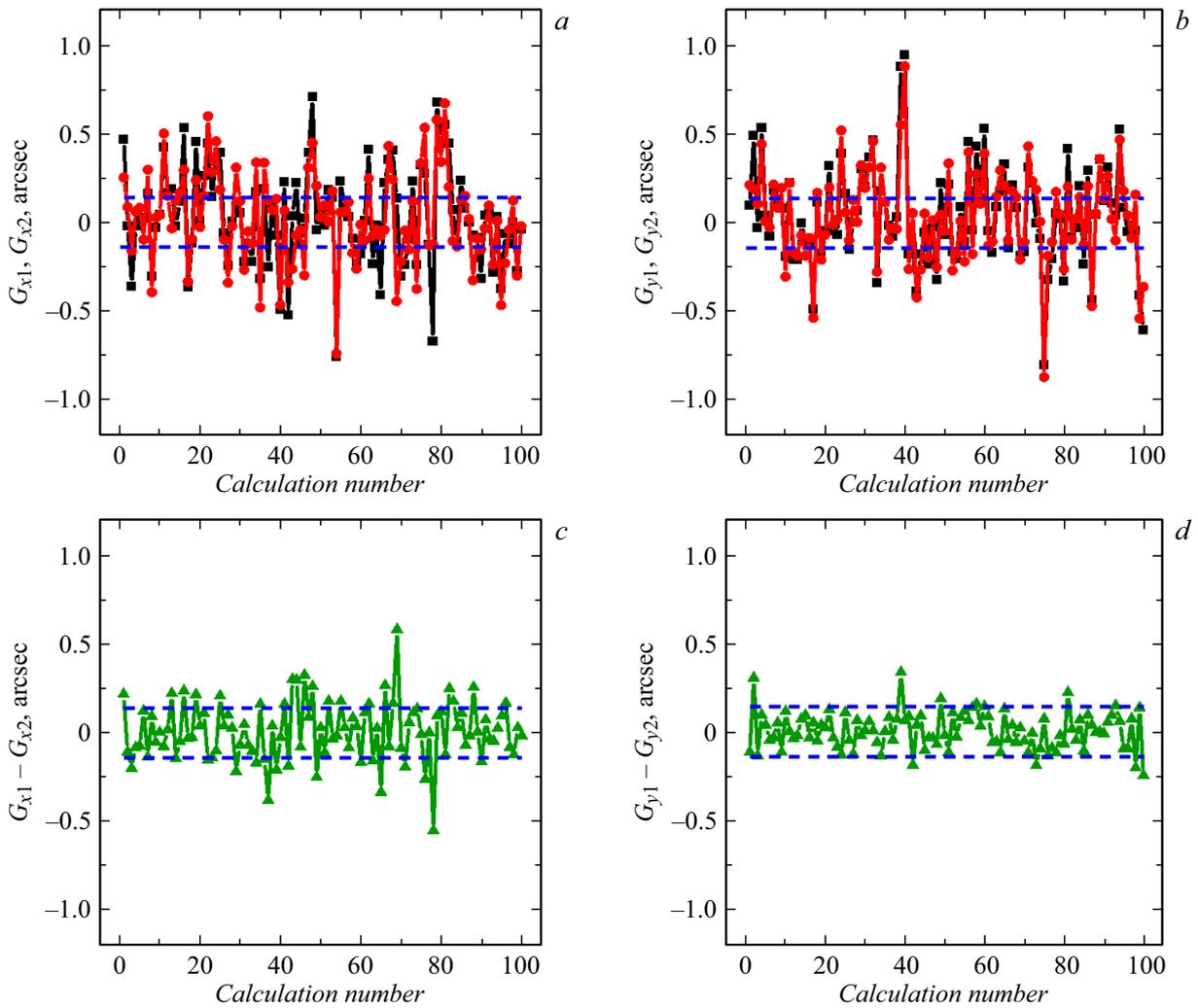
$$T = T_S \approx \left[ \frac{6.08\mu_0}{D^{1/3}} (1 - 1.42\eta^{1/3} + 3.70\eta^2 - 4.01\eta^{7/3} + 4.21\eta^4 - 4.00\eta^{13/3}) \right]^{1/2}, \quad (10)$$

где

$$\mu_0 = \int_0^\infty C_n^2(\xi) d\xi,$$

интегрирование ведется по вертикальной трассе. Выражение (10) выведено в пренебрежении дифракцией и при условии, что  $l_0 = 0$ , а  $L_0$  не зависит от  $z$ .

В [39] предложена другая формула оценки  $RMS$  углового отклонения изображения звезды в фокальной



**Рис. 8.** Координаты  $G$ -наклонов ( $a, b$ ) звезды 1 (квадраты) и звезды 2 (круги) и их разность ( $c, d$ ) для 100 случайных реализаций турбулентной атмосферы.

плоскости телескопа:

$$T = T_L \approx \left[ 3.23R^{-1/3}r_0^{-5/3}k^{-2} \left( 1 - 2^{-1/6}(\kappa_0^*R)^{1/3} \right) \right]^{1/2},$$

$$r_0 \approx \left( k^2 \int_0^\infty C_n^2(\xi) d\xi \right)^{-3/5},$$

$$(\kappa_0^*)^{-1} = \left( \int_0^\infty C_n^2(\xi) \kappa_0^{1/3} d\xi / \int_0^\infty C_n^2(\xi) d\xi \right)^{-3}, \quad (11)$$

где  $R$  — эффективный радиус гауссовой апертуры,  $\kappa_0^* = 2\pi/L_0^*$ ,  $L_0^*$  — эффективный внешний масштаб турбулентности. Выражение (11) выведено при условии  $(\kappa_0^*R)^{-1} \gg 1$  для экспоненциальной модели спектральной плотности показателя преломления [39], которая несколько отличается от широко распространенного спектра фон Кармана:

$$\Phi_n(\kappa_\perp, \kappa_z) = 0.033C_n^2(\kappa_\perp^2 + \kappa_z^2)^{-11/6} \left[ 1 - \exp\left( -\frac{\kappa_\perp^2 + \kappa_z^2}{\kappa_0^2} \right) \right].$$

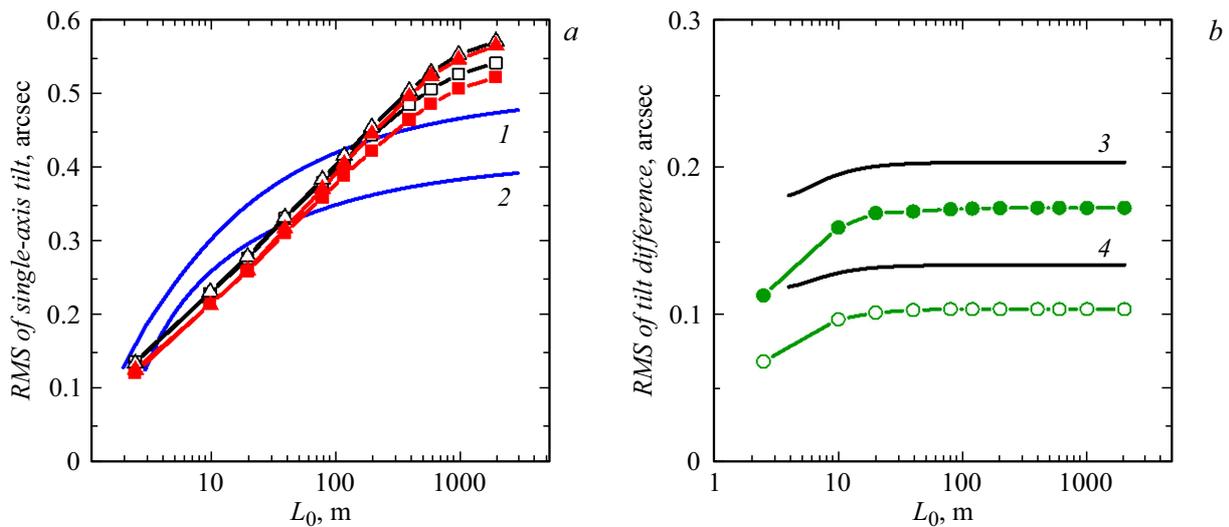
В нашем случае  $L_0^* = L_0$ ,  $R = 50$  см. В силу изотропности турбулентности,  $RMS$  наклона волнового фронта по двум взаимно перпендикулярным направлениям равно  $\sigma_S = T_S/\sqrt{2}$  и  $\sigma_L = T_L/\sqrt{2}$ .

Учитывая, что при выводе формул (10) и (11) был сделан ряд упрощающих допущений, можно констатировать качественное согласие расчетных и аналитических зависимостей. Видно, что с ростом  $L_0$ , как и в теории турбулентности Колмогорова, расчетные зависимости выходят на плато.

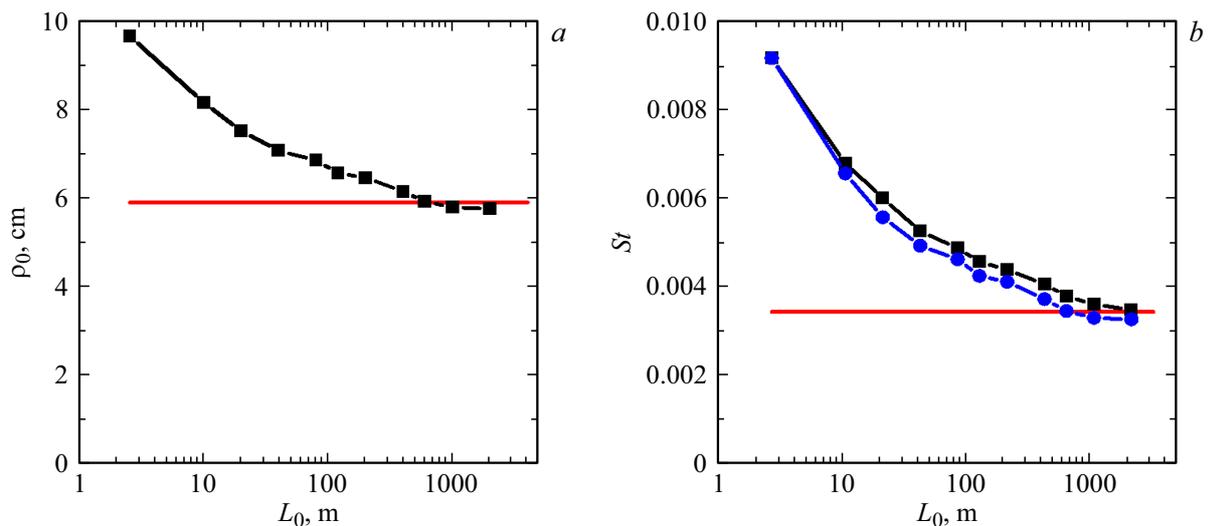
На рис. 9,  $b$  представлены зависимости  $RMS$  разности наклонов волнового фронта для двух звезд от  $L_0$ . Аналитическое выражение для оценки  $RMS$  разности наклонов по осям  $x$  и  $y$  —  $\sigma_{\Delta x}$  и  $\sigma_{\Delta y}$  можно представить следующим образом [4]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\Delta x} \\ \sigma_{\Delta y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta x 0} \\ \sigma_{\Delta y 0} \end{bmatrix} (1 - 20.6\eta^2 + 27.4\eta^{7/3} + \dots)^{1/2}, \quad (12)$$

где  $\sigma_{\Delta x 0}$  и  $\sigma_{\Delta y 0}$  — соответствующие значения при  $L_0 = \infty$ . Математические выражения для  $\sigma_{\Delta x 0}$  и  $\sigma_{\Delta y 0}$



**Рис. 9.** *RMS*  $G$ -наклонов волнового фронта звезды 1 и 2 по осям  $x$  и  $y$  (а) и *RMS* разности  $G$ -наклонов по осям  $x$  и  $y$  (б) в расчетах (кривые с маркерами) и из аналитических оценок (кривые без маркеров) при различных значениях внешнего масштаба турбулентности  $L_0$ . Открытые маркеры: квадраты —  $\sigma_{x1}$ , треугольники —  $\sigma_{y1}$ , круги —  $\sigma_{\Delta y}$ . Сплошные маркеры: квадраты —  $\sigma_{x2}$ , треугольники —  $\sigma_{y2}$ , круги —  $\sigma_{\Delta x}$ . 1 —  $\sigma_S$ , 2 —  $\sigma_L$ , 3 —  $\sigma_{\Delta x}$ , 4 —  $\sigma_{\Delta y}$ .



**Рис. 10.** Радиус когерентности атмосферы (а) и число Штреля излучения от звезды при длительной экспозиции (б) при различных значениях  $L_0$ . Квадраты — расчетные значения, круги — аналитическая оценка, горизонтальная линия — предельное аналитическое значение при  $L_0 = \infty$ .

имеют достаточно громоздкий вид и здесь не приводятся, их можно найти в [4]. Их оценка дает  $\sigma_{\Delta x0} \approx 0.2$  arcsec и  $\sigma_{\Delta y0} \approx 0.13$  arcsec. Зависимости  $\sigma_{\Delta x}(L_0)$  и  $\sigma_{\Delta y}(L_0)$  монотонно возрастают до  $L_0 = 10$  m и далее не меняются (при этом зависимости  $\sigma_{x1}(L_0)$ ,  $\sigma_{y1}(L_0)$  на рис. 9, а продолжают монотонно возрастать примерно до  $L_0 = 2000$  m). Ход расчетных кривых на рис. 9, б качественно согласуется с аналитической зависимостью (12). При  $L_0 > 10$  m *RMS* разности наклонов волнового фронта в 1.8 раза больше по оси углового разноса звезд  $x$ , чем в перпендикулярном направлении  $y$ , что согласуется с теоретическими пред-

ставлениями [38]. Наши расчетные значения меньше оценочных примерно на 20–30%. *RMS* разностного наклона  $\sigma_{\Delta} = \sqrt{\sigma_{\Delta x}^2 + \sigma_{\Delta y}^2}$  примерно равно 0.2 arcsec, что в 1.4 раза меньше полного угла дифракционной расходимости на апертуре. Параметр  $\sigma_{\Delta}$  — это и есть *RMS* наклонов волнового фронта от звезды 2 после их адаптивной фазовой коррекции с использованием наклонов от звезды 1.

На рис. 10, а показана расчетная зависимость радиуса когерентности вертикальной атмосферной трассы от значения внешнего масштаба турбулентности. В расчетах использована формула  $\rho_0 = 0.98\lambda/\theta_{FWHM}$ .

Видно, что с ростом  $L_0$  зависимость  $\rho_0(L_0)$  стремится к значению параметра Фрида  $r_0$ , вычисленному по формуле (1) с учетом зависимости  $C_n^2(z)$  (горизонтальная линия на рис. 10, *a*). На рис. 10, *b* показана расчетная и оценочная зависимость числа Штреля  $St$  [40] излучения от звезды. При длительной экспозиции  $St \approx (1 + (D/\rho_0)^2)^{-1}$  [41]. Данные для построения аналитической зависимости взяты из рис. 10, *a*. Предельное значение параметра  $St$  (горизонтальная линия на рис. 10, *b*) вычислено при  $\rho_0 = r_0$ .

## Заключение

В работе в рамках квазиоптической расчетной модели проведены расчеты распространения излучения от двух естественных звезд через турбулентную атмосферу к телескопу, расположенному на Земле, с учетом конечности внешнего масштаба турбулентности  $L_0$ . Отношение диаметра приемной апертуры телескопа  $D$  к параметру Фрида — около 17, что указывает на сложные условия для астрономических наблюдений, если они проводятся без использования адаптивной оптики. Угловое расстояние между звездами равно 10 arcsec, что существенно превышает угол изопланатизма с учетом как всех оптических aberrаций трассы (0.6 arcsec), так и только aberrаций „наклон“ (2.13 arcsec). Верификация расчетной модели проведена путем сравнения расчетных и аналитических структурных функций фазы излучения.

В расчетах проанализированы амплитудно-фазовые характеристики излучения от двух звезд в ближней и дальней зоне и смоделирована фазовая коррекция излучения с учетом анизопланатизма. Продемонстрировано, что использование излучения звезды 1 в качестве опорного для коррекции фазовых искажений излучения звезды 2 и построения ее изображения является неэффективным, что указывает на необходимость „зажигания“ ЛОЗ в направлении звезды 2 для коррекции высших оптических aberrаций. В этом случае, учитывая неопределенность наклона волнового фронта излучения ЛОЗ, можно использовать информацию о наклоне волнового фронта излучения звезды 1 (по центру масс изображения или из разложения по полиномам Цернике). Тогда удается получить практически дифракционного качества изображение звезды 2, но ее угловая координата смещена на разность наклонов от звезд 1 и 2. Найдена расчетная зависимость  $RMS$  как каждого из наклонов, так и их разности от внешнего масштаба турбулентности  $L_0$ . Значение  $RMS$  наклонов и их разности монотонно возрастает при увеличении  $L_0$  и выходит на плато при  $L_0 \gg D$ , как и предсказывает теория. Расчетные значения  $RMS$  разности наклонов меньше аналитических оценок на 20–30%. Интересно, что зависимость  $RMS$  разности наклонов от  $L_0$  выходит на плато гораздо раньше, чем аналогичная зависимость для каждого индивидуального наклона. В расчетах  $RMS$  разности наклонов примерно равно

0.2 arcsec при  $L_0 > 20$  m, что в 1.4 раза меньше полного угла дифракционной расходимости.

В заключение отметим, что созданная расчетная модель, прошедшая апробацию и уточняющая результаты приближенных аналитических моделей, может быть применена для определения количественного влияния анизопланатизма при астрономических наблюдениях с использованием техники ЛОЗ и адаптивной оптики при различном угловом расстоянии между изучаемым объектом и различными опорными источниками в широком диапазоне условий турбулентности, включая ее неколомоговорские особенности.

## Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики (проект „Физика высоких плотностей энергии. Этап 2023-2025“).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] L.C. Andrews, R.L. Phillips. *Laser Beam Propagation Through Random Media* (SPIE Press, Bellingham, 2005)
- [2] С.С. Вениаминов. *Космический мусор. Техногенное засорение космоса и его последствия* (ИКИ РАН, М., 2023), с. 204. DOI: 10.21046/spacedebri-2023
- [3] R.K. Tyson. *Principles of Adaptive Optics* (Academic Press, Boston, 1991)
- [4] J.W. Hardy. *Adaptive Optics for Astronomical Telescopes* (Oxford University Press, NY., 1998)
- [5] F. Roddier. *Adaptive Optics in Astronomy* (Cambridge University Press, UK., 1999)
- [6] В.П. Лукин. *Атмосферная адаптивная оптика* (Наука, Новосибирск, 1986)
- [7] R.Q. Fugate. *Opt. Photon. News*, **4**(6), 14 (1993). DOI: 10.1364/OPN.4.6.000014
- [8] R. Foy. In: *Optics in Astrophysics*, ed. by R. Foy, F.C. Foy (Springer, Dordrecht, 2006), p. 249. DOI: 10.1007/1-4020-3437-7\_15
- [9] R. Foy, A. Migus, F. Biraben, G. Grynberg, P. McCullough, M. Tallon. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **111** (June II), 569 (1995).
- [10] В.П. Лукин, Б.В. Фортес. *Оптика атмосферы и океана*, **10** (1), 56 (1997). [V.P. Lukin, B.V. Fortes. *Atmos. Oceanic Opt.*, **10** (1), 34 (1997).]
- [11] M.S. Belen'kii. *Appl. Optics*, **39** (33), 6097 (2000). DOI: 10.1364/AO.39.006097
- [12] Л.А. Бальбасова, В.П. Лукин. *Оптика атмосферы и океана*, **35** (10), 871 (2022). DOI: 10.15372/AOO20221011 [L.A. Bolbasova, V.P. Lukin. *Atmos. Ocean. Opt.*, **35** (S1), S165 (2022). DOI: 10.1134/s1024856023010037]
- [13] Ф.Ю. Канев, В.П. Лукин. *Адаптивная оптика. Численные и экспериментальные исследования* (Изд-во Института оптики атмосферы СО РАН, Томск, 2005)

- [14] Л.А. Больбасова, В.П. Лукин. *Адаптивная коррекция атмосферных искажений оптических изображений на основе искусственного опорного источника* (Физматлит, М., 2012)
- [15] Н. Hemmati (ed.). *Near-Earth Laser Communications*, 2nd ed. (CRC Press, 2020). DOI: 10.1201/9780429186721
- [16] J. Osborn, M.J. Townson, O.J.D. Farley, A. Reeves, R.M. Calvo. *Opt. Express*, **29** (4), 6113 (2021). DOI: 10.1364/OE.413013
- [17] N. Martinez. *Photonics*, **10** (7), 858 (2023). DOI: 10.3390/photonics10070858
- [18] D. Alaluf, J.M. Perdigues Armengol. *CEAS Space J.*, **14**, 227 (2022). DOI: 10.1007/s12567-021-00392-2
- [19] M. Cockram, N.M. Rey, A. Gilling, D. Alaluf. *Proc. SPIE*, **12777**, 127774E-1 (2023). DOI: 10.1117/12.2690830
- [20] J.R. Beck, J.P. Bos. *Proc. SPIE*, **11506**, 115060N-1 (2020). DOI: 10.1117/12.2568975
- [21] C.J. Pugh, J.-F. Lavigne, J.-P. Bourgoin, B.L. Higgins, T. Jennewein. *Adv. Opt. Technol.*, **9** (5), 263 (2020). DOI: 10.1515/aot-2020-0017
- [22] А.С. Гурвич, А.И. Кон, В.Л. Миронов, С.С. Хмелевцов. *Лазерное излучение в турбулентной атмосфере* (Наука, М., 1976)
- [23] С.М. Рыгов, Ю.А. Кравцов, В.И. Татарский. *Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля* (Наука, М., 1978)
- [24] В.К. Ладагин. *Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики*, **1**, 19 (1985).
- [25] Т. Карман. *Aerodynamics* (McGraw-Hill, NY., 1963)
- [26] А.Н. Колмогоров. *ДАН СССР*, **30** (4), 299 (1941).
- [27] А.М. Обухов. *ДАН СССР*, **32** (1), 22 (1941).
- [28] В.П. Кандидов, М.П. Тамаров, С.А. Шленов. *Оптика атмосферы и океана*, **11** (1), 27 (1998). [V.P. Kandidov, M.P. Tamarov, S.A. Shlyonov. *Atmos. Oceanic Opt.*, **11** (1), 23 (1998).]
- [29] В.П. Кандидов, В.И. Леденев. *Изв. вузов. Радиофизика*, **24** (4), 438 (1981). [V.P. Kandidov, V.I. Ledenev. *Radiophys. Quantum Electron.*, **24**, 301 (1981). DOI: 10.1007/BF01034765]
- [30] S.S. Chesnokov, V.P. Kandidov, S.A. Shlenov, M.P. Tamarov. *Proc. SPIE*, **3432**, 14 (1998). DOI: 10.1117/12.327984
- [31] E.M. Johansson, D.T. Gavel. *SPIE*, **2200**, 372 (1994). DOI: 10.1117/12.177254
- [32] R.N. Wilson. *Reflecting Telescope Optics II. Manufacture, Testing, Alignment, Modern Techniques* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999)
- [33] M. Esseling. *Photorefractive Optoelectronic Tweezers and Their Applications* (Springer International Publishing, Switzerland, 2015), DOI: 10.1007/978-3-319-09318-5
- [34] A.V. Nemtseva, V.A. Bogachev, F.A. Starikov. *Proc. SPIE*, **12341**, 123411D-1 (2022). DOI: 10.1117/12.2644979
- [35] A.V. Nemtseva, V.A. Bogachev, F.A. Starikov. *Proc. SPIE*, **12780**, 127801F-1 (2023). DOI: 10.1117/12.2690981
- [36] F. Zernike. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **94**, 377 (1934).
- [37] R.J. Noll. *J. Opt. Soc. Amer.*, **66** (3), 207 (1976). DOI: 10.1364/JOSA.66.000207
- [38] R.J. Sasiela. *Electromagnetic Wave Propagation in Turbulence: Evaluation and Application of Mellin Transforms* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1994), DOI: 10.1007/978-3-642-85070-7
- [39] V.P. Lukin, V.V. Nosov, A.V. Torgaev. *Appl. Optics*, **53** (10), B196 (2014). DOI: 10.1364/AO.53.00B196
- [40] K. Strehl. *Z. Instrumentenk.*, **22** (July), 213 (1902).
- [41] H.T. Yura. *J. Opt. Soc. Am.*, **63** (5), 567 (1973).