

01

## Самоподобный вихрь

© В.П. Коверда, В.Н. Скоков

Институт теплофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия

E-mail: koverda@itp.uran.ru

Поступило в Редакцию 29 января 2024 г.

В окончательной редакции 20 февраля 2024 г.

Принято к публикации 4 марта 2024 г.

Предложен аналитический подход к описанию компьютерной модели „кучи песка“, описывающий положительные  $1/f$ -флуктуации. Решением предложенных уравнений являются случайные процессы со степенным поведением спектров мощности и функций распределения случайных флуктуаций.

**Ключевые слова:** самоподобные случайные процессы, стохастические уравнения, вихри, спектр мощности,  $1/f$ -шум.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.11.57907.19876

Случайные процессы называются самоподобными, если они не имеют выделенных пространственных или временных масштабов. Характерной особенностью таких процессов являются степенные зависимости спектральной плотности и функций распределения. Самоподобные случайные процессы, включая самоподобные вихревые структуры, встречаются в физике, геофизике, биологии и других областях [1–6]. Степенные зависимости приводят к возможности больших выбросов и возникновению крупномасштабных вихрей, которые наблюдаются в океанических течениях, атмосферных явлениях при формировании облаков, образовании торнадо, астрофизических явлениях при образовании галактик [7–9]. Случайные самоподобные процессы при неравновесных фазовых переходах были экспериментально обнаружены в критических режимах теплопереноса: при переходе от пузырькового кипения жидкости к пленочному [10], критическом истечении вскипающей жидкости [11], акустической кавитации [12].

Компьютерные модели „кучи песка“ с концепцией самоорганизованной критичности привлекают для объяснения многих случайных процессов с большими самоподобными флуктуациями [1]. Эволюция в такой системе происходит без тонкой подстройки параметров, а распределение подобно флуктуациям в критическом состоянии. Во многих работах описание самоподобных случайных процессов основывается на дробном интегрировании белого шума: дробное уравнение диффузии, диффузия на фрактальных структурах [13–16]. Получаемые при таком моделировании случайные процессы требуют больших вычислительных ресурсов и, как правило, нестационарны.

Нами был предложен аналитический подход к описанию самоподобных случайных процессов с большими флуктуациями, который значительно сокращает и упрощает вычислительную процедуру по сравнению с дробным интегрированием. Этот подход основан на использовании системы нелинейных стохастических уравнений,

описывающей стохастическую динамику при взаимодействующих неравновесных фазовых переходах.

Система стохастических уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi\psi^2 + \psi + \xi_1(t), \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\psi\varphi^2 + 2\varphi + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — динамические переменные,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — гауссовские  $\delta$ -коррелированные шумы. Система уравнений (1) описывает случайные блуждания в потенциале, соответствующем суперпозиции взаимодействующих докритического и закритического фазовых переходов. Система получена с использованием теории фазовых переходов Ландау разложением термодинамического потенциала по параметрам порядка докритического и закритического фазовых переходов с учетом их взаимодействия и последующим поворотом координатных осей на  $\pi/4$  [17].

При численном интегрировании в конечных разностях система (1) принимает вид [17]:

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1} &= (\varphi_i + \psi_i\Delta t)(1 + \psi_i^2\Delta t)^{-1} + p_i\Delta t^{0.5}, \\ \psi_{i+1} &= (\psi_i + 2\varphi_i\Delta t)(1 + \varphi_i^2\Delta t)^{-1} + q_i\Delta t^{0.5}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $p_i$  и  $q_i$  — векторы гауссовских случайных чисел с нулевым средним и дисперсией  $\sigma^2$ ,  $\Delta t$  — интервал времени (шаг интегрирования). При  $\Delta t \rightarrow 0$  система (2) совпадает с системой (1), которая имеет нестационарное решение. При конечном  $\Delta t$  система имеет стационарное решение [18]. Особенность стохастических уравнений состоит в том, что дифференциал времени является бесконечно малым второго порядка по отношению к дифференциалу стохастической переменной [19]. Поэтому уравнения (2) содержат интервал времени в степени 0.5.

Второе уравнение систем (1) и (2) является управляющим, а первое — подчиненным. Решение управляющего уравнения описывает эволюцию флуктуаций,

которые имеют гауссовские „хвосты“ функции распределения (переменная  $\psi$ ). Это дает возможность использования классического выражения для энтропии при оценке устойчивости решения [20]. Решение подчиненного уравнения дает самоподобный случайный процесс со степенным распределением (переменная  $\varphi$ ). При критическом значении интенсивности шума ( $\sigma_1 = \sigma_2 \approx 1$ ) спектр мощности флуктуаций  $\varphi$  принимает вид спектра фликкер-шума  $S_\varphi \sim 1/f$ . Спектр переменной  $\psi$  имеет вид  $S_\psi = 1/f^2$ .

Решением систем (1) и (2) являются положительные и отрицательные флуктуации. В компьютерной модели „кучи песка“ рассматриваются положительные значения флуктуаций. Система уравнений (1) и ее численный аналог (2) описывают случайные блуждания в двух гиперболических долинах потенциала взаимодействующих фазовых переходов, что приводит к флуктуациям разных знаков. Если ввести зеркальное отражение фазовых траекторий от оси ординат, получим только положительные значения переменных, что соответствует компьютерной модели „кучи песка“. Зеркальное отражение траекторий учитывается введением знака модуля в уравнения. В этом случае система (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1} &= (|\varphi_i| + |\psi_i|\Delta t)(1 + \psi_i^2\Delta t)^{-1} + p_i\Delta t^{0.5}, \\ \psi_{i+1} &= (|\psi_i| + 2|\varphi_i|\Delta t)(1 + \varphi_i^2\Delta t)^{-1} + q_i\Delta t^{0.5}. \end{aligned} \quad (3)$$

Расчет реализаций  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  проводили для 16384 шагов интегрирования с шагом  $\Delta t = 0.02$ . Для определения функций распределения и спектров мощности использовали ансамбль из 128 реализаций. Численные решения показывают, что существует сохраняющееся произведение  $\varphi(t)\psi(t) \approx 1$ , и соответственно спектр мощности величины, обратной к  $\psi(t)$ , т.е. переменной  $1/\psi(t)$ , совпадает со спектром самоподобного случайного процесса  $\varphi(t)$  и имеет вид  $S_{1/\psi} \sim 1/f$  [20,21]. Это свойство позволяет получить на основе системы (1) управляющее стохастическое уравнение для переменной  $\psi(t)$ , а переменную  $\varphi(t)$  определить как обратную к  $\psi$  величину:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\psi}{\varepsilon + \psi^2}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\psi} - \sigma_\theta^2\psi + \xi(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  — малая константа, исключая расходящуюся обратную функцию  $1/\psi$  при случайном приближении  $\psi$  к нулю. При численных расчетах с учетом свойств белого шума можно записать  $\sigma_\theta^2 = \sigma^2\Delta t$  [19,21]. Второе уравнение системы (4) описывает случайные блуждания в силовом поле с логарифмическим потенциалом. При численном интегрировании система (4) с учетом зеркального отражения фазовых траекторий принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{\psi_i}{\varepsilon + \psi_i^2}, \\ \psi_{i+1} &= |\psi_i| + \frac{|\psi_i|\Delta t}{\varepsilon + \psi_i^2} - \sigma^2\psi_i\Delta t^2 + q_i\Delta t^{0.5}. \end{aligned} \quad (5)$$

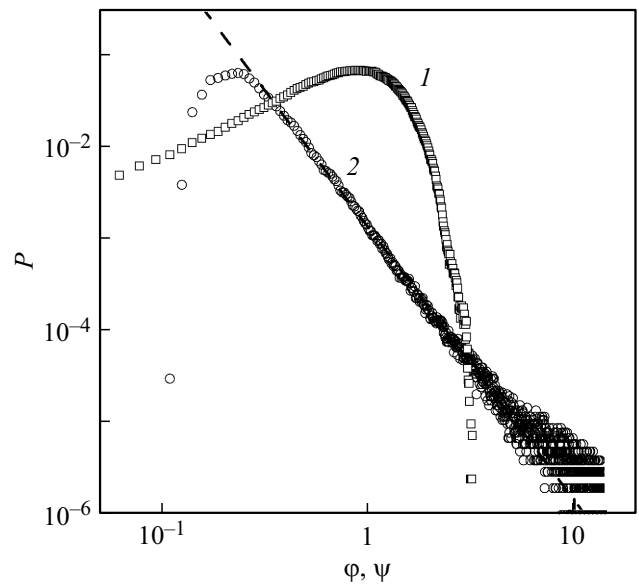


Рис. 1. Функции распределения  $P(\psi)$  (1) и  $P(\varphi)$  (2), полученные из численных решений системы (5). Штриховая линия — зависимость  $P \sim \varphi^{-3}$ .

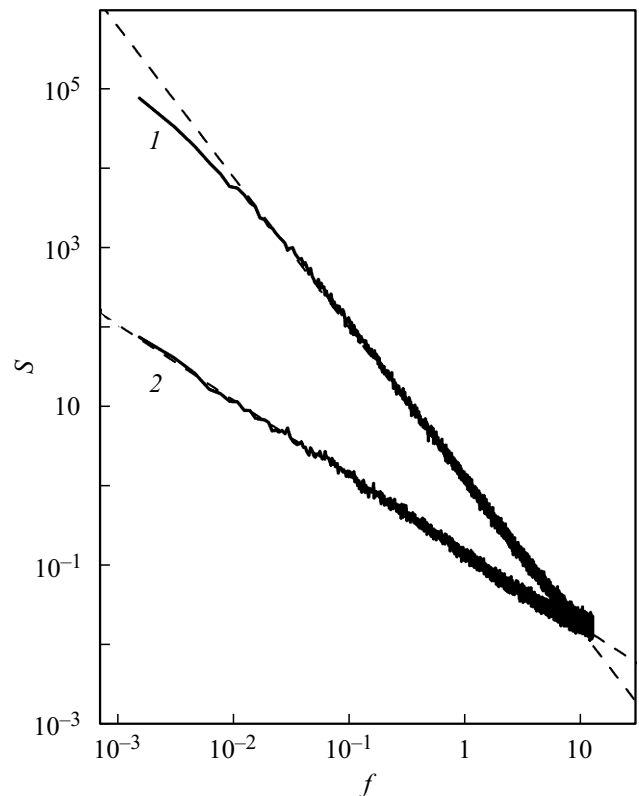


Рис. 2. Спектры мощности переменных  $\psi(t)$  (1) и  $\varphi(t)$  (2), полученные из численных решений системы (5).

На рис. 1 в логарифмических координатах приведены функции распределения  $P(\psi)$  и  $P(\varphi)$ , усредненные по ансамблю из 128 реализаций. Функция распределения  $P(\psi)$  при больших значениях  $\psi$  имеет гауссовский

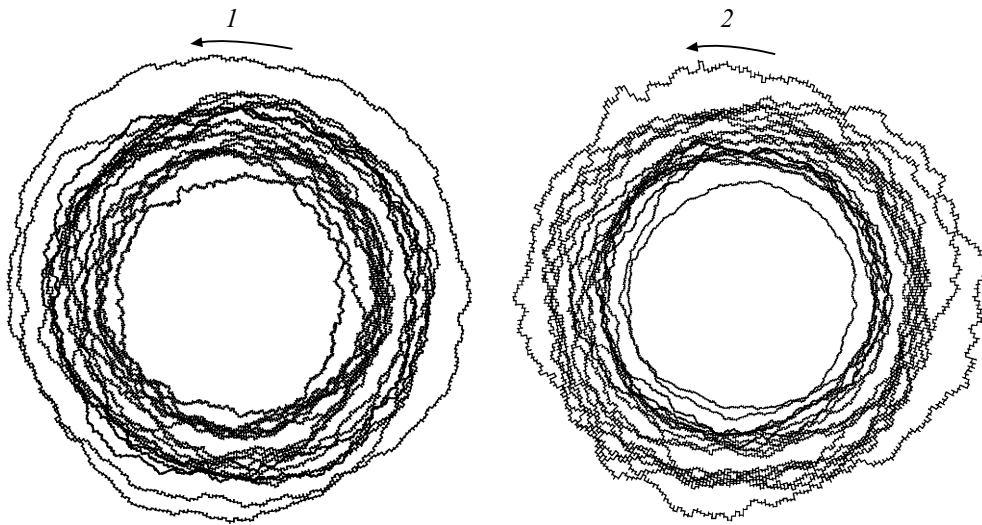


Рис. 3. Вихревые траектории случайных процессов  $\psi(t)$  (1) и  $\varphi(t)$  (2) в полярных координатах.

„хвост“, а функция распределения  $P(\varphi)$  спадает при больших  $\varphi$  по степенному закону. Гауссовское поведение „хвостов“ переменной  $\psi$  дает возможность оценивать устойчивость случайного процесса по формулам классической статистики с использованием принципа максимума энтропии Гиббса–Шеннона [22–24]. Максимум энтропии соответствует критической величине шума. Спектры мощности флуктуаций находились по рассчитанным реализациям методом быстрого фурье-преобразования с последующим усреднением по ансамблю. Усредненные спектры мощности переменных  $\varphi$  и  $\psi$  приведены на рис. 2. Спектр мощности переменной  $\varphi$  принимает вид  $S_\varphi \sim 1/f$  при критической интенсивности шума ( $\sigma_c \approx 1.4$ ), которая за счет одномерности второго уравнения системы (5) в  $\sqrt{2}$  раз выше, чем критическая интенсивность в двумерных системах (1) и (2). Спектр мощности переменной  $\psi$  имеет вид  $S_\psi = 1/f^2$ . Спектры мощности переменных, вычисленные из уравнений (5), совпадают с соответствующими спектрами, вычисленными на основе системы (3).

Положительные степенные флуктуации из системы (5) позволяют описать самоподобный вихрь, если перейти к системе уравнений в полярных координатах:  $r = \psi(t)$  и  $r = \varphi(t)$ , угол  $\theta = 2\pi\Delta t^{-1}t$ . Полученные вихри показаны на рис. 3. Фрагмент 1 на рис. 3 соответствует вихрю, не обладающему свойством самоподобия  $r = \psi(t)$ , так как функция распределения  $P(\psi)$  имеет гауссовские „хвосты“. Фрагмент 2 на рис. 3 демонстрирует самоподобный вихрь  $r = \varphi(t)$  со степенной функцией распределения.

Таким образом, в настоящей работе предложен аналитический подход к описанию компьютерной модели „кучи песка“, описывающий самоподобный случайный процесс. Подход основан на использовании системы нелинейных стохастических уравнений, описывающей стохастическую динамику при взаимодействующих нерав-

новесных фазовых переходах, и продемонстрирован на примере описания случайного вихря. Решением предложенных стохастических дифференциальных уравнений являются флуктуационные процессы со степенным поведением спектров мощности и функций распределения флуктуаций.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] P. Bak, *How nature works* (Springer-Verlag Inc., N.Y., 1996).
- [2] R.N. Mantegna, H.E. Stanley, *Nature*, **376**, 46 (1995). DOI: 10.1038/376046a0
- [3] H. Touchette, *Phys. Rep.*, **478**, 1 (2009). DOI: 10.1016/j.physrep.2009.05.002
- [4] L. Bertini, A. De Sole, D. Gabrielli, G. Jona-Lasinio, C. Landim, *Rev. Mod. Phys.*, **87**, 593 (2015). DOI: 10.1103/RevModPhys.87.593
- [5] Á. Corral, *Chaos Solit. Fract.*, **74**, 99 (2015). DOI: 10.1016/j.chaos.2015.01.011
- [6] О.Б. Наймарк, *Физ. мезомеханика*, **11** (2), 89 (2008). [O.B. Naimark, *Phys. Mesomechanics*, **11** (3-4), 187 (2008). DOI: 10.1016/j.physme.2008.07.008].
- [7] А.Г. Бершадский, *УФН* **160** (12), 189 (1990). DOI: 10.3367/UFNr.0160.199012i.0189 [A.G. Bershadskii, *Sov. Phys. Usp.*, **33** (12), 1073 (1990). DOI: 10.1070/PU1990v033n12ABEH002669].
- [8] T. Sarpkaya, *J. Fluids Struct.*, **19**, 389 (2004). DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2004.02.005
- [9] D. Birch, *Phys. Fluids*, **24**, 025105 (2012). DOI: 10.1063/1.3689179
- [10] В.Н. Скоков, В.П. Коверда, А.В. Решетников, *Письма в ЖЭТФ*, **69** (8), 590 (1999). [V.N. Skokov, V.P. Koverda, A.V. Reshetnikov, *JETP Lett.*, **69** (8), 636 (1999). DOI: 10.1134/1.567972].

- [11] А.В. Решетников, Н.А. Мажейко, В.Н. Беглецов, В.Н. Скоков, В.П. Коверда, Письма в ЖТФ, **33** (17), 31 (2007). [A.V. Reshetnikov, N.A. Mazheiko, V.N. Begletsov, V.N. Skokov, V.P. Koverda, Tech. Phys. Lett., **33** (9), 732 (2007). DOI: 10.1134/S1063785007090052].
- [12] V.N. Skokov, V.P. Koverda, A.V. Reshetnikov, A.V. Vinogradov, Physica A, **364**, 63 (2006). DOI: 10.1016/j.physa.2005.09.045
- [13] Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы* (Ин-т компьютерных исследований, М., 2002). [B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature* (W.H. Freeman and Co, N.Y., 1982)].
- [14] B. Mandelbrot, J. Van Ness, SIAM Rev., **10**, 422 (1968). DOI: 10.1137/1010093
- [15] D. Ben-Avraham, S. Havlin, *Diffusion and reactions in fractals and disordered systems* (Cambridge University Press, 2005).
- [16] R. Metzler, J. Klafter, Phys. Rep., **339**, 1 (2000). DOI: 10.1016/S0370-1573(00)00070-3
- [17] V.P. Koverda, V.N. Skokov, Physica A, **346**, 203 (2005). DOI: 10.1016/j.physa.2004.07.042
- [18] V.P. Koverda, V.N. Skokov, Physica A, **555**, 124581 (2020). DOI: 10.1016/j.physa.2020.124581
- [19] В. Хорстхемке, Р. Лефевр, *Индукцированные шумом переходы* (Мир, М., 1987). [W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise-induced transitions: theory and applications in physics, chemistry, and biology* (Springer-Verlag, Berlin, 2006)].
- [20] В.П. Коверда, В.Н. Скоков, Письма в ЖТФ, **48** (14), 7 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.14.52861.19221 [V.P. Koverda, V.N. Skokov, Tech. Phys. Lett., **48** (7), 47 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.07.54038.19221].
- [21] V.P. Koverda, V.N. Skokov, Physica A, **628**, 129141 (2023). DOI: 10.1016/j.physa.2023.129141
- [22] V.P. Koverda, V.N. Skokov, Physica A, **391**, 21 (2012). DOI: 10.1016/j.physa.2011.07.015
- [23] C. Shannon, Bell Syst. Tech., **27**, 379 (1948). DOI: 10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x
- [24] А.Г. Башкиров, ТМФ, **149** (2), 299 (2006). DOI: 10.4213/tmf4235 [A.G. Bashkirov, Theor. Math. Phys., **149** (2), 1559 (2006). DOI: 10.1007/s11232-006-0138-x].