01.1

Сравнительный анализ классического и дробного уравнений движения

© С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия
E-mail: rsergo@mail.ru

Поступило в Редакцию 14 декабря 2023 г.
В окончательной редакции 14 декабря 2023 г.
Принято к публикации 4 марта 2024 г.

Анализируются свойства диссипативных систем, которые описываются классическим и дробным уравнениями движения. Приводятся и сравниваются функции Лагранжа этих систем. Рассмотрены примеры инфинитного и финитного движений. На основе полученных результатов дается уточняющая интерпретация дробного интегро-дифференцирования в задачах механики.

Ключевые слова: уравнение Лагранжа, функция Лагранжа, уравнение движения, диссипация энергии, инфинитное и финитное движения, дробное интегро-дифференцирование.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.11.57906.19845

В любой реальной динамической системе полная энергия всегда убывает, переходя в иные виды энергии, в частности в теплоту. Это происходит из-за неизбежного присутствия в системе сил сопротивления. Открытая система по существу перестает быть диссипативной, если потерянная энергия в ней целиком компенсируется поступающей извне энергией. В механике диссипация, как правило, учитывается путем введения в уравнение Лагранжа диссипативной функции Рэлея, которая характеризует скорость убывания энергии системы [1]. При таком подходе в теории появляются два новых свойства [2]: 1) нарушается симметрия относительно изменения направления течения времени; 2) перестает выполняться принцип наименьшего действия. Первое свойство считается фундаментальным и связывается с необратимостью реальных динамических процессов. Второе свойство зависит от способа учета диссипации и, вообще говоря, может быть исключено из теории. Один из подходов, позволяющих это сделать, заключается в учете необратимости времени посредством его явного включения в функцию Лагранжа.

В настоящей работе для диссипативных механических систем проводится сравнение метода Бейтмана–Калдиролы–Канаи (Bateman–Caldirola–Kanai, BCK) [2,3] и метода, основанного на дробном интегро-дифференцировании [4,5]. Оба метода базируются на применении функции Лагранжа, зависящей от времени. Рассматривается одномерное движение материальной точки. Отправным пунктом является уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial L}{\partial x}=0, \tag{1}$$

где $L=L(t,x,v)$ — функция Лагранжа, зависящая от времени t, координаты материальной точки x и ее скорости v.

В BCK-методе функция Лагранжа консервативной системы дополняется экспоненциальным множителем [2,3]:

$$L=\left[\frac{mv^2}{2}-U(x,t)\right]\exp(t/\tau), \tag{2}$$

где $U(x,t)$ — потенциальная функция, m — масса, $\tau>0$ — некоторое характерное время. Подставляя (2) в (1), получаем уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\tau}mv=-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}. \tag{3}$$

Второе слагаемое в левой части (3) определяет силу динамического трения. Отметим, что BCK-метод получил наибольшее распространение в теории квантовых диссипативных систем [6,7].

Пусть сила, действующая на механическую систему, представима в виде

$$F(x,t)=-\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t\left(\frac{\partial U(x,t')}{\partial x}\right)G(t-t')dt', \tag{4}$$

где $G(t)$— функция динамической памяти. Функция $G(t)$ определяет изменение импульса как реакцию на кратковременное воздействие силы. Запись (4) равносильна тому, что рассматривается нелокальная потенциальная функция $\tilde{U}(x,t)$, которая учитывает запаздывание при взаимодействии и выражается через интеграл свертки:

$$\tilde{U}(x,t)=U_0+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t U(x,t')G(t-t')dt', \tag{5}$$

где U_0, вообще говоря, зависит от времени. С учетом (5) запишем функцию Лагранжа

$$L=\frac{mv^2}{2}-\tilde{U}(x,t). \tag{6}$$

Подставляя (5), (6) в (1), находим уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial U(x,t')}{\partial x}\right) G(t-t')dt'. \qquad (7)$$

Многие реальные системы обладают степенной динамической памятью [5], которая задается функцией вида

$$G(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\alpha}, \qquad 0 < 0 \leqslant 1. \qquad (8)$$

Из (7), (8) получаем уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial U(x,t')}{\partial x}\right)\frac{dt'}{(t-t')^{1-\alpha}}. \qquad (9)$$

Если $|\partial U(x,t)/\partial x| \leqslant t^{-\varepsilon}C(x)$ для некоторого $\varepsilon < \alpha$ и не зависящей от времени функции $C(x)$, то имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_0^t \left(\frac{\partial U(x,t')}{\partial x}\right)\frac{dt'}{(t-t')^{1-\alpha}} = 0.$$

Это соотношение позволяет переписать уравнение (9) в компактном виде

$$\frac{m}{\tau^{1-\alpha}}\frac{d^\alpha v}{dt^\alpha} = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}, \qquad (10)$$

где [4,5]:

$$\frac{d^\beta v}{dt^\beta} = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int\limits_0^t \frac{v^{(n)}(t')dt'}{(t-t')^{\beta-n+1}}$$

$$(n-1 < \beta \leqslant n, n \in \mathbb{N}).$$

Дробная производная в (10) не задает „дробное ускорение“, как это может показаться на первый взгляд. Это легко видеть из функции Лагранжа (6) и уравнения движения (9). Уравнение движения (10) представлено в удобной математической форме, однако всегда может быть приведено к виду с обычным ускорением и эффективной силой. Если исходить из принципа наименьшего действия и уравнения Лагранжа (1), то уравнение (10) на данный момент оказывается более обоснованным и предпочтительным, чем уравнение с дробной силой трения (см., например, обзор [8]), для которого лагранжиан и/или диссипативная функция Рэлея пока не построены. По сравнению с функцией (2) функция (6) имеет более привычный для классической механики вид. При использовании (6) тривиально выписываются уравнения Гамильтона–Якоби и Шредингера.

Таким образом, ставится задача проанализировать уравнения движения (3) и (10). В уравнении (3) диссипация учитывается дополнительным слагаемым, которое задает силу динамического трения. В уравнении (10) диссипация описывается с помощью функции динамической памяти (8) и дробной производной. Математически росту диссипации отвечают увеличение вклада младшей производной в уравнении (3) и снижение порядка уравнения (10) за счет параметров τ и α соответственно.

Далее с помощью уравнений (3) и (10) рассматриваются примеры инфинитного и финитного движений, а именно движение заряженных частиц под действием постоянного и переменного электрического поля. Движение электрона в постоянном электрическом поле описывается уравнениями

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}mv = qE, \qquad (11)$$

$$\frac{m}{\tau^{1-\alpha}}\frac{d^\alpha v}{dt^\alpha} = qE, \qquad (12)$$

где q — заряд электрона, $E = \mathrm{const}$ — напряженность электрического поля. Несложно заметить, что эти два уравнения строго сопоставимы только при $t \to \infty$, $dv/dt = 0$ и $\alpha = 0$. В этом случае из (11), (12) получаем известное соотношение из теории электропроводности металлов Друде

$$v = \frac{q\tau}{m}E = \mu E,$$

где μ — подвижность электронов. Аналогичный вывод получается и в задаче о свободном падении тела [5,9]. Для финитного движения характерна возвращающая сила. Так, смещения атомов-осцилляторов твердого тела в переменном электрическом поле $E_0\exp(-i\omega t)$ описываются уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{qE_0}{m}\exp(-i\omega t), \qquad (13)$$

где E_0 и ω — амплитуда и частота внешнего переменного электрического поля, ω_0 — собственная частота осцилляторов. Решение уравнения (13) ищется в виде $x = x_0\exp(-i\omega t)$. Поляризация равна $P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0\exp(-i\omega t) = qNx_0\exp(-i\omega t)$. Отсюда находим диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = 1 + \frac{qNx_0}{\varepsilon_0 E_0}. \qquad (14)$$

С учетом решения уравнения (13) из (14) получаем

$$\varepsilon = 1 - \frac{(\omega_p/\omega_0)^2}{(\omega/\omega_0)^2 + i/(\omega_0\tau) - 1}, \qquad (15)$$

где $\omega_p = \sqrt{q^2N/(\varepsilon_0 m)}$ — плазменная частота. С другой стороны, имеем дробное уравнение движения

$$\frac{d^{1+\alpha}x}{dt^{1+\alpha}} + \omega_0^{1+\alpha}x = \frac{qE_0}{m\omega_0^{1-\alpha}}\exp(-i\omega t). \qquad (16)$$

Общее решение уравнения (16) записывается в виде [7, с.17]:

$$x(t) = AE_{\alpha+1,1}\big(-(\omega_0 t)^{1+\alpha}\big) + BtE_{\alpha+1,2}\big(-(\omega_0 t)^{1+\alpha}\big)$$

$$+\frac{qE_0}{m\omega_0^{1-\alpha}}\int\limits_0^t E_{\alpha+1,2}\big(-(\omega_0 s)^{1+\alpha}\big)\exp\big(i\omega(s-t)\big)s^\alpha ds, \tag{17}$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)$ — функция Миттаг-Лефлера [4,5,10–13]. Из (17) следует

$$x_0(\omega) = \lim_{t\to\infty} x(t)\exp(i\omega t) = \frac{qE_0}{m\omega_0^{1-\alpha}}\frac{1}{(-i\omega)^{1+\alpha}+\omega_0^{1+\alpha}}.$$

Подставляя данное выражение в (14), находим

$$\varepsilon = 1 - \frac{(\omega_p/\omega_0)^2}{(-i\omega/\omega_0)^{1+\alpha}+1}. \tag{18}$$

По виду формула (18) схожа с известной формулой Коула−Коула [5,14], за исключением показателя степени, который в формуле Коула−Коула меньше единицы. Численные расчеты действительных и мнимых частей диэлектрических функций (15) и (18) показывают, что классическая и дробная модели с одинаковым успехом могут описывать спектры с узким и симметричным пиком поглощения. В наших работах [10–13] показано, что порядок дробной производной в уравнении колебаний связан с добротностью. Такая же связь существует и между параметрами в уравнениях (13) и (16): $\alpha \approx 1 - 2/(\pi\omega_0\tau)$.

В [9,15] сделан интересный вывод, что дробный интегро-дифференциальный оператор естественным образом возникает при рассмотрении открытой механической системы, которая взаимодействует со своим окружением. Этот вывод в определенной мере согласуется и с нашим рассмотрением, в котором потенциальная функция (5) учитывает открытый и диссипативный характер механической системы, проявляющийся в инерционности (запаздывании) взаимодействия.

Сформулируем кратко выводы. На основе уравнения Лагранжа (1) рассмотрены уравнения движения (3) и (10), которые учитывают диссипацию энергии. Решения этих уравнений различны; их имеет смысл сравнивать только в случае установившегося движения, т. е. при $t \to \infty$. В работе [2] указано, что если правая часть уравнения движения не зависит явно от времени, то задача всегда может быть сведена к уравнениям Лагранжа или Гамильтона. Нами продемонстрировано, что уравнение движения с дробной производной по времени также может сводиться к этим уравнениям.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Механика* (Наука, М., 1988). [L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Mechanics* (Butterworth−Heinemann, Oxford, 1976).].
[2] А.Г. Шалашов, УФН, **188** (11), 1191 (2018). DOI: 10.3367/UFNr.2017.12.038273 [A.G. Shalashov, Phys. Usp., **61** (11), 1082 (2018). DOI: 10.3367/UFNe.2017.12.038273].
[3] L.C. Vestal, Z. Musielak, Physics, **3** (2), 449 (2021). DOI: 10.3390/physics3020030
[4] А.В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка* (Наука, М., 2005).
[5] В.В. Учайкин, *Метод дробных производных* (Артишок, Ульяновск, 2008). [V.V. Uchaikin, *Fractional derivatives for physicists and engineers* (Springer, Berlin, 2013).].
[6] С.В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ, **118** (4), 297 (2023). DOI: 10.31857/S1234567823160127 [S.V. Sazonov, JETP Lett., **118** (4), 302 (2023). DOI: 10.1134/S0021364023602257].
[7] В.И. Манько, С.С. Сафонов, ТМФ, **112** (3), 467 (1997). DOI: 10.4213/tmf1056 [V.I. Man'ko, S.S. Safonov, Theor. Math. Phys., **112** (3), 1172 (1997). DOI: 10.1007/BF02583048].
[8] S. Patnaik, J.P. Hollkamp, F. Semperlotti, Proc. Roy. Soc. A, **476** (2234), 20190498 (2020). DOI: 10.1098/rspa.2019.0498
[9] В.В. Учайкин, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика, **27** (1), 5 (2019). DOI: 10.18500/0869-6632-2019-27-1-5-40
[10] С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху, ЖТФ, **89** (9), 1314 (2019). DOI: 10.21883/JTF.2019.09.48055.284-18 [S.S. Rekhviashvili, A.V. Pskhu, Tech. Phys., **64** (9), 1237 (2019). DOI: 10.1134/S1063784219090135].
[11] А.В. Псху, С.Ш. Рехвиашвили, Письма в ЖТФ, **45** (1), 34 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47154.17540 [A.V. Pskhu, S.S. Rekhviashvili, Tech. Phys. Lett., **44** (12), 1218 (2018). DOI: 10.1134/S1063785019010164].
[12] С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху, З.Ч. Маргушев, Письма в ЖТФ, **47** (22), 49 (2021). DOI: 10.21883/PJTF.2021.22.51728.18964 [S.S. Rekhviashvili, A.V. Pskhu, Z.C. Margushev, Tech. Phys. Lett., **48**, 39 (2022). DOI: 10.1134/S1063785022020067].
[13] С.Ш. Рехвиашвили, А.В. Псху, Письма в ЖТФ, **48** (7), 33 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.07.52290.19137 [S.S. Rekhviashvili, A.V. Pskhu, Tech. Phys. Lett., **48**, 35 (2022). DOI: 10.1134/S1063785022020055].
[14] А.А. Хамзин, Р.Р. Нигматуллин, И.И. Попов, ТМФ, **173** (2), 314 (2012). DOI: 10.4213/tmf8336 [A.A. Khamzin, R.R. Nigmatullin, I.I. Popov, Theor. Math. Phys., **173** (2), 1604 (2012). DOI: 10.1007/s11232-012-0135-1].
[15] В.В. Учайкин, *Механика. Основы механики сплошных сред* (Лань, СПб., 2018).