

01

Влияние анизотропии изоэнергетической поверхности на электропроводность тонкой проводящей пленки в продольном магнитном поле

© И.А. Кузнецова, О.В. Савенко, Д.Н. Романов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150003 Ярославль, Россия
e-mail: romanov.yar357@mail.ru

Поступило в Редакцию 19 сентября 2023 г.
В окончательной редакции 30 марта 2024 г.
Принято к публикации 1 апреля 2024 г.

Построена теоретическая модель электропроводности тонкой проводящей пленки. В качестве граничных условий для функции распределения носителей заряда использована модель диффузно-зеркальных граничных условий. Получены аналитические выражения для проводимости как функции безразмерных параметров: толщины пленки, частоты внешнего электрического поля, индукции внешнего магнитного поля, эффективных масс вдоль и поперек плоскости пленки, степени вырождения электронного газа, коэффициентов зеркальности нижней и верхней границ пленки. Для нахождения функции распределения носителей заряда использован кинетический подход. Изоэнергетическая поверхность материала проводника пленки имеет форму трехосного эллипсоида. Проанализированы зависимости модуля и фазы проводимости от параметров, характеризующих анизотропию изоэнергетической поверхности. Проведен сравнительный анализ теоретических расчетов с экспериментальными данными по зависимости магнетосопротивления пленки висмута от индукции внешнего магнитного поля.

Ключевые слова: тонкая пленка, кинетическое уравнение, модель Фукса, изоэнергетическая поверхность, продольное магнитное поле.

DOI: 10.61011/JTF.2024.05.57807.243-23

Введение

Тонкопленочная технология позволяет создавать тонкие проводящие слои, находящие применение в фотонике и нанофотонике [1,2], СВЧ-электронике [3,4], солнечной энергетике [5–9]. Под „тонкими“ понимаются такие пленки, толщина которых сравнима или меньше длины свободного пробега электронов. С развитием технологии увеличивается плотность полупроводниковых приборов на интегральной схеме. В связи с этим предъявляются большие требования к качеству параметров проводящих слоев, из которых состоят полупроводниковые приборы.

Когда толщина пленки становится сравнимой с длиной свободного пробега носителей заряда, возрастает вклад поверхностного рассеяния в электрические свойства данной пленки, например, уменьшается электропроводность, возрастает коэффициент Холла и т.д. Если в пленке отсутствуют квантовые размерные эффекты, т.е. ее толщина много больше длины волны де Бройля носителя заряда, движущегося со средней скоростью, то для расчета электрических параметров пленки достаточно воспользоваться кинетическим уравнением, справедливым в квазиклассическом приближении.

В последнее десятилетие были опубликованы работы, связанные с теоретическими и экспериментальными исследованиями электрических и гальваномагнитных свойств тонких проводящих пленок. В работе [10] представлена новая модель электропроводности тонкой по-

ликристаллической пленки. В статьях [11–13] показано экспериментальное влияние продольного, поперечного и перпендикулярного магнитных полей на удельное сопротивление тонких пленок золота зернистой структуры при температурах 4–50 К и сравнения с теоретическими расчетами на основе кинетического уравнения Больцмана.

Расчет электрической проводимости тонкого металлического слоя в случае различных коэффициентов зеркальности его поверхностей был выполнен в работах [14,15]. Высокочастотная электропроводность в поперечном магнитном поле была рассчитана в работе [16], а в продольном магнитном поле — в работе [17]. Для решения задач в вышеуказанных работах использовался стандартный кинетический метод, заключающийся в решении кинетического уравнения с соответствующими граничными условиями. Подобный метод решения применялся и для исследования электрических и гальваномагнитных свойств тонких металлических проволок. Так, в работе [18] определена самоиндукция тонкой металлической проволоки.

Закон дисперсии (зависимость энергии квазичастицы от импульса) оказывает существенное влияние на характер движения электронов (дырок) в полупроводнике. Изоэнергетическая поверхность висмута для электронов представляет собой три эллипсоида вращения, у которых оси вращения лежат в одной плоскости и угол

между данными осями равен $2\pi/3$. Расчет высокочастотной электропроводности тонкого металлического слоя в случае эллипсоидальной поверхности Ферми приводится в статье [19]. В настоящей работе проведено сравнение между экспериментальными данными и теоретическими расчетами по зависимости магнетосопротивления от индукции внешнего магнитного поля пленки висмута, так как данный материал обладает высокой анизотропией изоэнергетической поверхности. По сравнению с другими полупроводниками висмут обладает преимуществом легкости изготовления высококачественных монокристаллов с большими длинами свободного пробега электронов, достигающими величины порядка 1 мкм . Это позволяет лучше изучить классический размерный эффект, когда толщина пленки становится меньше длины свободного пробега электронов или дырок.

В настоящей работе в рамках кинетического подхода изучается влияние анизотропии изоэнергетической поверхности на электропроводность тонкой проводящей пленки в продольном магнитном поле. Пленка немагнитная и монокристаллическая. Внешние поля однородные, скин-эффект и плазменный резонанс не учитываются (частота внешнего электрического поля достаточно мала).

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую пленку, лежащую в плоскости XOY . Материалом пленки является проводник. Под проводником понимается металл или полупроводник с произвольной степенью вырождения. Толщина пленки a много больше длины волны де Бройля носителя заряда, движущегося со средней скоростью, что позволяет пренебречь квантовыми размерными эффектами. Вдоль оси X направлено магнитное поле с индукцией \mathbf{B} и электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} (рис. 1, a). Пленка находится в вакууме или расположена между двумя изолирующими слоями, не пропускающими ток через границы пленки. Электрическое поле является однородным и испытывает гармонические колебания с частотой ω :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t). \quad (1)$$

Пусть у проводника изоэнергетическая поверхность имеет форму трехосного эллипсоида. Такая форма поверхности есть у Si, Ge, Вi и других материалов. Пусть полуоси эллипсоида лежат вдоль импульсных осей как на рис. 1, b . В этом случае закон дисперсии примет вид

$$\varepsilon = \frac{p_x^2}{2m_1} + \frac{p_y^2}{2m_2} + \frac{p_z^2}{2m_3}, \quad (2)$$

где m_1, m_2, m_3 — эффективные массы вдоль осей p_x, p_y, p_z .

Для определения электропроводности пленки используется функция распределения f . Если отклонение системы от положения равновесия незначительно, т.е.

внешние поля малы, то можно линеаризовать задачу

$$f(\mathbf{p}, z, t) = f_0(\varepsilon) + f_1(\mathbf{p}, z) \exp(-i\omega t), \quad (3)$$

$$f_0(\varepsilon) = [1 + \exp((\varepsilon - \mu)/k_B T)]^{-1}, \quad (4)$$

где f_0 — равновесная функция распределения Ферми–Дирака (нулевое приближение), а f_1 — малая поправка (первое приближение), обеспечивающаяся малостью внешнего воздействия, μ — электрохимический потенциал, k_B — постоянная Больцмана, T — температура.

Функция распределения подчиняется кинетическому уравнению. Данное уравнение в приближении времени релаксации τ имеет вид

$$\begin{aligned} -i\omega f_1 + v_z \frac{\partial f_1}{\partial z} + e(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}_0) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \\ + e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f_1}{\tau}, \end{aligned} \quad (5)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости носителей заряда.

Для однозначного определения функции распределения используем модель диффузно-зеркальных граничных условий Фукса [20]:

$$\begin{cases} f(v_z, 0) = q_1 f(-v_z, 0) + (1 - q_1) f_0, \\ f(-v_z, a) = q_2 f(v_z, a) + (1 - q_2) f_0, \end{cases} \quad (6)$$

где q_1 и q_2 — коэффициенты зеркальности нижней и верхней поверхностей.

Система уравнений (6) с учетом (3) преобразуется к виду

$$\begin{cases} f_1(v_z, 0) = q_1 f_1(-v_z, 0), \\ f_1(-v_z, a) = q_2 f_1(v_z, a). \end{cases} \quad (7)$$

По найденной функции распределения можно найти плотность тока \mathbf{j} :

$$\mathbf{j} = en\langle \mathbf{v} \rangle = e \int \mathbf{v} f_1 \frac{2d^3 p}{h^3}, \quad (8)$$

где h — постоянная Планка, n — концентрация носителей тока:

$$n = \int f_0 \frac{2d^3 p}{h^3}. \quad (9)$$

2. Метод решения и математические расчеты

Вследствие анизотропии изоэнергетической поверхности (2), проекцией траектории носителей заряда на плоскость YOZ является эллипс (рис. 2). Эллипс описывается следующим уравнением:

$$\left(\frac{y - y_c}{y_{01}} \right)^2 + \left(\frac{z - z_c}{z_{01}} \right)^2 = 1, \quad (10)$$

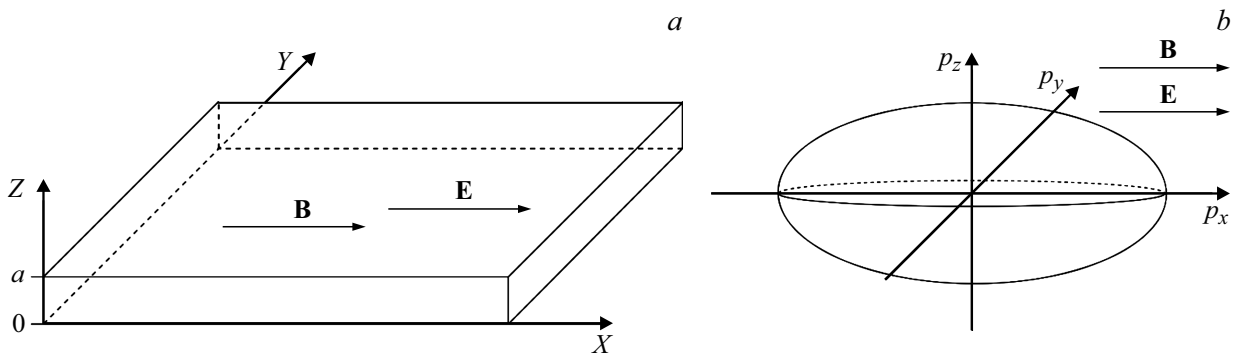


Рис. 1. *a* — тонкая проводящая пленка, *b* — изоэнергетическая поверхность материала пленки.

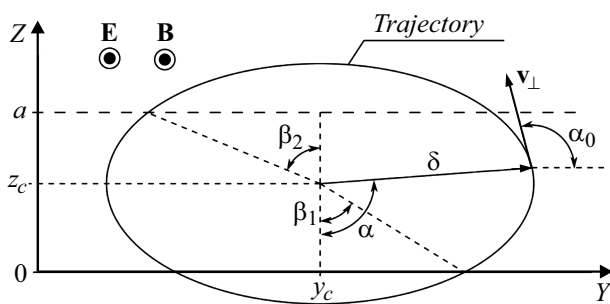


Рис. 2. Траектория носителей заряда в плоскости YOZ.

$$y_{01} = \frac{\sqrt{2m_2\varepsilon_{\perp}}}{Be}, \quad z_{01} = \frac{\sqrt{2m_2\varepsilon_{\perp}}}{Be}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{p_y^2}{2m_2} + \frac{p_z^2}{2m_3}, \quad (12)$$

где y_c и z_c — координаты центра эллипса, y_{01} и z_{01} — полуоси эллипса.

В зависимости от траектории выражение для функции распределения будет принимать различный вид. Траектория электронов (дырок) может пересекать только верхнюю границу пленки (что соответствует функции распределения f_1^u), только нижнюю границу (f_1^d), верхнюю и нижнюю (f_1^{ud}), никакую из границ (f_1^v). Кинетическое уравнение (5) в зависимости от положения траектории решается тем же методом, что и в работе [7].

$$f_1^u(vt', vT') = -\frac{ev_x E_0}{v} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \left[1 - \frac{(1-q_2)e^{-vt'}}{1-q_2e^{-vT'}} \right], \quad (13)$$

$$f_1^d(vt', vT') = -\frac{ev_x E_0}{v} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \left[1 - \frac{(1-q_1)e^{-vt'}}{1-q_1e^{-vT'}} \right], \quad (14)$$

$$f_1^d(vt', vT') = \begin{cases} -\frac{ev_x E_0}{v} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \left[1 - \frac{1-q_1+q_1(1-q_2)e^{-vt'}}{1-q_1q_2e^{-2vT'}} e^{-vt'} \right] & \text{при } v_z > 0, \\ -\frac{ev_x E_0}{v} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \left[1 - \frac{1-q_2+q_2(1-q_1)e^{-vt'}}{1-q_1q_2e^{-2vT'}} e^{-vt'} \right] & \text{при } v_z < 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$f_1^v = -\frac{(ev_x E_0)}{v} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right), \quad (16)$$

где $\nu = \tau^{-1} - i\omega$ — комплексная частота рассеяния, t' — время движения носителя заряда от момента последнего рассеяния на поверхности пленки до текущей точки, положение которой характеризует вектор δ , T' — время движения электрона (дырки) между двумя последовательными рассеяниями на поверхностях пленки.

Если рассеяние происходит на верхней поверхности, то $a - z_c < z_{01}$, в противном случае $a - z_c > z_{01}$ (рис. 2). Если рассеяние происходит на нижней поверхности, то $z_c < z_{01}$, в противном случае $z_c > z_{01}$. В этом случае общую функцию распределения можно записать в следующем виде:

$$f_1 = f_1^u \Theta(-A_1) \Theta(A_2) + f_1^d \Theta(A_1) \Theta(-A_2) + f_1^{ud} \Theta(A_1) \Theta(A_2) + f_1^v \Theta(-A_1) \Theta(-A_2), \quad (17)$$

$$A_1 = 1 - \frac{z_c}{z_{01}}, \quad A_2 = 1 - \frac{a - z_c}{z_{01}}, \quad (18)$$

где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (19)$$

Выразим t' и T' через координаты

$$t' = \int_{\alpha'_1}^{\alpha} \frac{ds}{v_{\perp}}, \quad T' = \int_{\alpha'_1}^{\alpha'_2} \frac{ds}{v_{\perp}},$$

Пределы интегрирования

Функции	$\alpha_0 \in [0; \pi]$		$\alpha_0 \in [\pi; 2\pi]$	
	β_1	π	π	$2\pi - \beta_1$
f_1^d	β_1	π	π	$2\pi - \beta_1$
f_1^u	0	$\pi - \beta_2$	$\pi + \beta_2$	2π
f_1^{ud}	β_1	$\pi - \beta_2$	$\pi + \beta_2$	$2\pi - \beta_1$

$$v_{\perp} = \frac{\sqrt{2\varepsilon_{\perp}}}{\sqrt{m_2 \cos^2 \alpha_0 + m_3 \sin^2 \alpha_0}}, \quad (20)$$

$$ds = \sqrt{\delta^2 + \left(\frac{\partial \delta}{\partial \alpha}\right)^2} d\alpha,$$

$$\delta = \frac{\sqrt{m_2 m_3}}{Be} \frac{\sqrt{2\varepsilon_{\perp}}}{\sqrt{m_2 \cos^2 \alpha + m_3 \sin^2 \alpha}}, \quad (21)$$

где t' и T' — времена движения носителя заряда с положительной ($\alpha_0 \in [0; \pi]$) или отрицательной ($\alpha_0 \in [\pi; 2\pi]$) проекцией скорости v_z от момента времени, когда изменился знак этой проекции скорости v_z , до текущего момента времени или до следующего момента времени, когда снова изменился знак проекции скорости v_z соответственно; α — угол между вектором $(0, 0, -1)$ и вектором δ (показан на рис. 2); α_0 — угол между осью Y и поперечной скоростью v_{\perp} (показан на рис. 2). Пределы интегрирования α'_1 и α'_2 зависят от того, на каких поверхностях пленки рассеивается электрон (дырка) и от значений α_0 , т.е. от знака проекции скорости v_z . Значения данных пределов приведены в таблице.

Переменная α_0 зависит от α . Координаты эллипса зависят от угла α (рис. 2)

$$\begin{cases} y = y_c + \delta \sin \alpha, \\ z = z_c - \delta \cos \alpha. \end{cases} \quad (22)$$

Угол α_0 является углом наклона касательной к эллипсу (рис. 2), поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{dz}{dy}. \quad (23)$$

Если взять производную уравнения эллипса (10) с учетом (22) и (23), то получим связь между углами α_0 и α :

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{m_2}{m_3} \operatorname{tg} \alpha. \quad (24)$$

Для расчета плотности тока (8) удобно перейти к новым переменным $(p_x, p_y, p_z) \rightarrow (\varepsilon_{\perp}, \alpha_0, v_x)$:

$$\begin{cases} p_x = m_1 v_x, \\ p_y = \frac{m_2 \sqrt{2\varepsilon_{\perp}} \cos \alpha_0}{\sqrt{m_2 \cos^2 \alpha_0 + m_3 \sin^2 \alpha_0}}, \\ p_z = \frac{m_3 \sqrt{2\varepsilon_{\perp}} \sin \alpha_0}{\sqrt{m_2 \cos^2 \alpha_0 + m_3 \sin^2 \alpha_0}} \end{cases} \quad (25)$$

Предполагается, что длина рассеяния на примесях меньше длины электрон-электронного взаимодействия. В этом случае неоднородное гидродинамическое течение электронов в пленке не формируется. Неоднородность тока поперек канала недостаточно сильна, чтобы обнаружить ее методами, предложенными для детектирования такой неоднородности в статьях [21–23], так как толщина пленки мала. Найдем средний по толщине пленки ток

$$\langle j_x \rangle = \frac{1}{a} \int_0^a j_x dz. \quad (26)$$

Удельная проводимость определим из формального локального закона Ома:

$$\sigma_x = \langle j_x \rangle / E_0. \quad (27)$$

Введем безразмерные параметры:

$$m_0 = \sqrt[3]{m_1 m_2 m_3}, \quad k_{m1} = m_1 / m_0, \quad k_{m2} = m_2 / m_0, \quad k_{m3} = m_3 / m_0, \quad (28)$$

$$nv_1^2 = \frac{5}{3} \int v^2 f_0 \frac{2d^3 p}{h^3}, \quad u_1 = \frac{m_0 v_1^2}{2k_B T} = \frac{5}{9} \left(\frac{1}{k_{m1}} + \frac{1}{k_{m2}} + \frac{1}{k_{m3}} \right) \frac{I_1}{I_0}, \quad (29)$$

$$I_j = \int_0^{\infty} \frac{u^j \sqrt{u} du}{1 + e^{u-u_{\mu}}}, \quad k_{m\alpha_0} = k_{m2} \cos^2 \alpha_0 + k_{m3} \sin^2 \alpha_0, \quad (30)$$

$$a_0 = a / \lambda, \quad \omega_0 = \lambda \omega / v_1,$$

$$v_0 = a v / v_1 = \lambda_0 (1 - i \omega_0), \quad (31)$$

$$\beta_0 = \lambda e B / (m_0 v_1), \quad \xi = z / a, \quad (32)$$

$$u_{\mu} = \mu / (k_B T), \quad u_{\perp} = \varepsilon_{\perp} / (k_B T),$$

$$u_x = m_0 v_x^2 / (2k_B T), \quad u = k_{m1} u_x + u_{\perp}, \quad (33)$$

где m_0 — эффективная масса плотности состояний; k_{m1} , k_{m2} и k_{m3} — безразмерные эффективные массы вдоль осей p_x , p_y и p_z соответственно; v_1 — характерная скорость, которая вводится через выражение (29) [21]; a_0 — безразмерная толщина пленки; $\lambda = v_1 \tau$ — длина свободного пробега электронов (дырок); ω_0 — безразмерная частота внешнего электрического поля; β_0 — безразмерная индукция магнитного поля.

Опуская математические преобразования, получим выражения для удельной электропроводности (27):

$$\begin{aligned} \sigma(a_0, \omega_0, \beta_0, k_{m1}, k_{m2}, q_1, q_2, u_{\mu}) \\ = \sigma_0 \sum (a_0, \omega_0, \beta_0, k_{m1}, k_{m2}, q_1, q_2, u_{\mu}), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\sigma_0 = (ne^2 \tau) / m_0, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Sigma = \frac{a_0}{2\pi v_0 I_0} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{u_x} e^{u-u_{\mu}}}{(1 + e^{u-u_{\mu}})^2} \\ \times (B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5) du_{\perp} du_x, \end{aligned} \quad (36)$$

$$B_1 = \int_0^1 \int_0^\pi 2 \left[1 - \frac{(1 - q_1)e^{-\nu t'_1}}{1 - q_1 e^{-\nu T'_1}} \right] \frac{\Theta(A_1)\Theta(-A_1)}{k_{m\alpha_0}} d\alpha_0 d\xi, \quad (37)$$

$$B_2 = \int_0^1 \int_0^\pi 2 \left[1 - \frac{(1 - q_2)e^{-\nu t'_2}}{1 - q_2 e^{-\nu T'_2}} \right] \frac{\Theta(-A_1)\Theta(A_1)}{k_{m\alpha_0}} d\alpha_0 d\xi, \quad (38)$$

$$B_3 = \int_0^1 \int_0^\pi \left[1 - \frac{1 - q_1 + q_1(1 - q_2)e^{-\nu T'_3}}{1 - q_1 q_2 e^{-2\nu T'_3}} e^{-\nu t'_1} \right] \times \frac{\Theta(A_1)\Theta(A_2)}{k_{m\alpha_0}} d\alpha_0 d\xi, \quad (39)$$

$$B_4 = \int_0^1 \int_0^\pi \left[1 - \frac{1 - q_2 + q_2(1 + q_1)e^{-\nu T'_3}}{1 - q_1 q_2 e^{-2\nu T'_3}} e^{-\nu t'_1} \right] \times \frac{\Theta(A_1)\Theta(A_2)}{k_{m\alpha_0}} d\alpha_0 d\xi, \quad (40)$$

$$B_5 = \int_0^1 \int_0^\pi 2 \frac{\Theta(-A_1)\Theta(-A_2)}{k_{m\alpha_0}} d\alpha_0 d\xi, \quad (41)$$

$$\nu t'_1 = \int_{\beta_1}^\alpha dC_t, \quad \nu t'_2 = \int_0^\alpha dC_t, \quad (42)$$

$$\nu T'_1 = \int_{\beta_1}^\pi dC_t, \quad \nu T'_2 = \int_0^{\pi - \beta_2} dC_t, \quad \nu T'_3 = \int_{\beta_1}^{\pi - \beta_2} dC_t, \quad (43)$$

$$dC_t = \frac{\nu_0 \sqrt{k_{m\alpha_0} k_{m2} k_{m3}}}{a_0 \beta_0} \sqrt{\tilde{\delta}^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial \alpha} \right)^2} d\alpha, \quad \tilde{\delta} = \frac{1}{\sqrt{k_{m2} \cos^2 \alpha + k_{m3} \sin^2 \alpha}}, \quad (44)$$

$$\cos \beta_1 = A_1 = 1 - \sqrt{\frac{u_1}{k_{m2} u_\perp}} a_0 \beta_0 \xi - \frac{\cos \alpha \sqrt{k_{m3}}}{\sqrt{k_{m2} \cos^2 \alpha + k_{m3} \sin^2 \alpha}}, \quad (45)$$

$$\cos \beta_2 = A_2 = 1 - \sqrt{\frac{u_1}{k_{m2} u_\perp}} a_0 \beta_0 (1 - \xi) - \frac{\cos \alpha \sqrt{k_{m3}}}{\sqrt{k_{m2} \cos^2 \alpha + k_{m3} \sin^2 \alpha}}, \quad (46)$$

где σ_0 — статическая проводимость, Σ — безразмерная электропроводность. В выражении $k_{m\alpha_0}$ зависит от угла α_0 , который выражается через угол α с помощью формулы (24). В выражениях (45) и (46), наоборот, нужно выразить угол α через угол α_0 с помощью той же формулы (24).

Проводимость от носителей заряда с траекторией, которая не пересекается с границами пленки, обусловлена

функцией распределения f_1^{ud} , f_1^v . Такую проводимость будем называть объемной. Она равна

$$\Sigma_v = \frac{a_0}{2\pi\nu_0 I_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sqrt{u_x} e^{u-u_\mu}}{(1 + e^{u-u_\mu})^2} B_5 du_\perp du_x. \quad (47)$$

Проводимость от носителей заряда с траекторией, которая пересекается с границами пленки, обусловлена функцией распределения f_1^{ud} , f_1^u и f_1^d . Такую проводимость будем называть поверхностной, она равна разнице полной проводимости и объемной проводимости

$$\Sigma_s = \Sigma - \Sigma_v. \quad (48)$$

3. Предельные случаи

3.1. Вырожденный электронный газ ($\exp(u_\mu) \gg 1$)

Данный газ соответствует высокой концентрации, малой эффективной массе и низкой температуре газа свободных носителей заряда (металл, полупроводник с высокой концентрацией примесей). Функция распределения Ферми–Дирака примет ступенчатый вид

$$f_0 = \begin{cases} 0, & u < u_\mu, \\ 1, & u > u_\mu. \end{cases} \quad (49)$$

В этом случае выражения (29) и (36) преобразуются следующим образом:

$$u_1 = k_m u_\mu, \quad k_m = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k_{m1}} + \frac{1}{k_{m2}} + k_{m1} k_{m2} \right), \quad \rho = \sqrt{\frac{u_\perp}{u_\mu}}, \quad (50)$$

$$\Sigma = \frac{3a_0}{2\pi\nu_0 \sqrt{k_{m1}}} \times \int_0^\infty \rho \sqrt{1 - \rho^2} (B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5) d\rho, \quad (51)$$

$$\cos \beta_1 = A_1 = 1 - \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{k_m}{k_{m2}}} \times a_0 \beta_0 \xi - \frac{\cos \alpha \sqrt{k_{m3}}}{\sqrt{k_{m2} \cos^2 \alpha + k_{m3} \sin^2 \alpha}}, \quad (52)$$

$$\cos \beta_2 = A_2 = 1 - \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{k_m}{k_{m2}}} \times a_0 \beta_0 (1 - \xi) + \frac{\cos \alpha \sqrt{k_{m3}}}{\sqrt{k_{m2} \cos^2 \alpha + k_{m3} \sin^2 \alpha}}, \quad (53)$$

3.2. Невырожденный электронный газ ($\exp(-u_\mu) \gg 1$)

Данный случай соответствует низкой концентрации, высокой эффективной массе и высокой температуре газа свободных носителей заряда (полупроводник с низкой концентрацией примесей). Функция распределения Ферми–Дирака примет вид классического распределения Максвелла–Больцмана:

$$f_0 = \exp\{u_\mu - u\}. \tag{54}$$

В этом случае выражения (29) и (36) преобразуются следующим образом:

$$u_1 = \frac{5}{2}k_m, \tag{55}$$

$$\Sigma = \frac{a_0}{2\pi\nu_0k_{m1}^{3/2}} \int_0^\infty e^{-u_\perp} (B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5) du_\perp. \tag{56}$$

3.3. Сферическая изоэнергетическая поверхность ($k_{m1} = k_{m2} = 1$)

Полученные выражения (36)–(46) соответствуют электропроводности, полученной в работе [17].

$$\Sigma = \frac{a_0}{\nu_0} - B_{1s} - B_{2s} - B_{3s}, \tag{57}$$

$$B_{1s} = \frac{1}{\nu_0} \int_0^{u_0} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{u_\perp}{u_1}} D(u_\perp) g_1 \left(\frac{\nu_0 \varphi_1}{a_0 \beta_0} \right) d\eta du_\perp, \tag{58}$$

$$B_{2s} = \frac{1}{\nu_0} \int_{u_0}^\infty \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{u_\perp}{u_1}} D(u_\perp) g_1 \left(\frac{\nu_0 \varphi_1}{a_0 \beta_0} \right) d\eta du_\perp, \tag{59}$$

$$B_{3s} = \frac{1}{\nu_0} \int_{u_0}^\infty \int_{\eta_0}^1 \sqrt{\frac{u_\perp}{u_1}} D(u_\perp) g_2 \left(\frac{\nu_0 \varphi_2}{a_0 \beta_0} \right) d\eta du_\perp, \tag{60}$$

$$g_1(p) = \frac{2 - q_1 - q_2 - (q_1 + q_2 - 2q_1q_2)e^{-p}}{[1 - q_1e^{-p}][1 - q_2e^{-p}]} [1 - e^{-p}], \tag{61}$$

$$g_2(p) = \frac{2 - q_1 - q_2 + (q_1 + q_2 - 2q_1q_2)e^{-p}}{1 - q_1q_2e^{-2p}} [1 - e^{-p}], \tag{62}$$

$$D(u_\perp) = \frac{a_0}{2\pi\nu_0I_0} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u_x} e^{u_x + u_\perp - u_\mu}}{(1 + e^{u_x + u_\perp - u_\mu})^2} du_x, \tag{63}$$

$$\varphi_1 = 2\pi - 2 \arccos \eta,$$

$$\varphi_2 = \pi - \arccos \eta - \arccos(\eta_0 - \eta + 1), \tag{64}$$

$$u_0 = \frac{a_0^2 \beta_0^2 u_1}{4}, \quad \eta_0 = \beta_0 \sqrt{\frac{u_\perp}{u_1}} - 1, \quad u_1 = \frac{5}{4} k_m \frac{I_1}{I_0}. \tag{65}$$

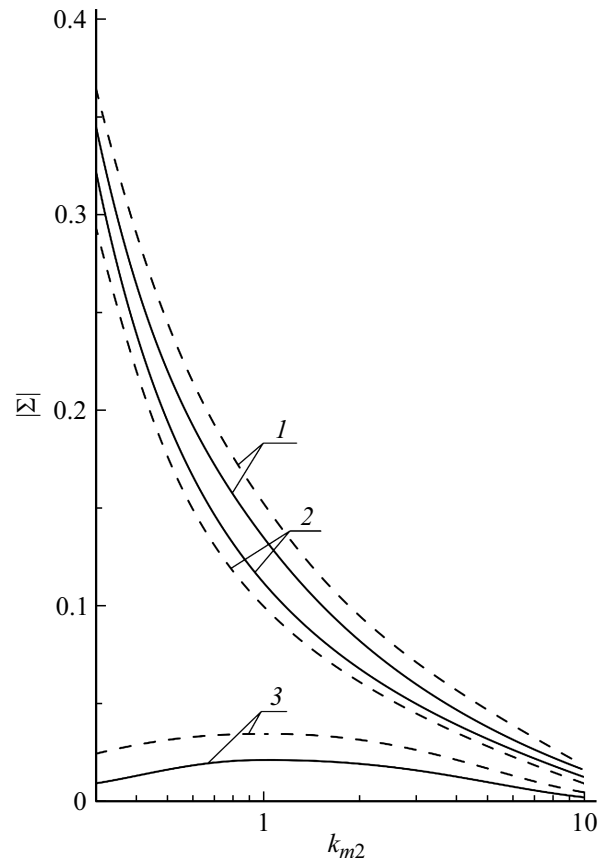


Рис. 3. Зависимость модуля безразмерной электропроводности $|\Sigma|$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (штриховые линии) от безразмерной эффективной массы k_{m2} при $k_{m1} = 1$, $a_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.5$, $\beta_0 = 1$, $q_1 = q_2 = 0$. Кривые 1–3 соответствуют общей, поверхностной и объемной проводимостям.

3.4. Толстая пленка ($a \gg \lambda$), зеркальные поверхности пленки ($q_1 = q_2 = 1$)

Экспоненты $\exp(\nu_0 k_{m0} \varphi_1 / \beta_0 a_0)$ и $\exp(\nu_0 k_{m0} \varphi_2 / \beta_0 a_0)$ в выражениях (36)–(46) быстро затухают в случае толстой пленки, высокой частоты или не дают вклада в случае зеркальных границ пленки. В итоге электропроводность стремится к следующему выражению:

$$\Sigma = \Sigma_v = \frac{a_0}{\nu_0 k_{m1}}, \tag{66}$$

что соответствует известной формуле Друде.

4. Анализ результатов

Различным значениям k_{m1} и k_{m2} из выражения (28) соответствуют разные материалы при фиксированной ориентации изоэнергетического эллипсоида относительно внешнего электрического поля. Электрическое поле направлено вдоль оси X . Для кремния $k_{m1} = 2.9$ и $k_{m2} = 0.59$, а для германия: $k_{m1} = 7.2$ и $k_{m2} = 0.37$,

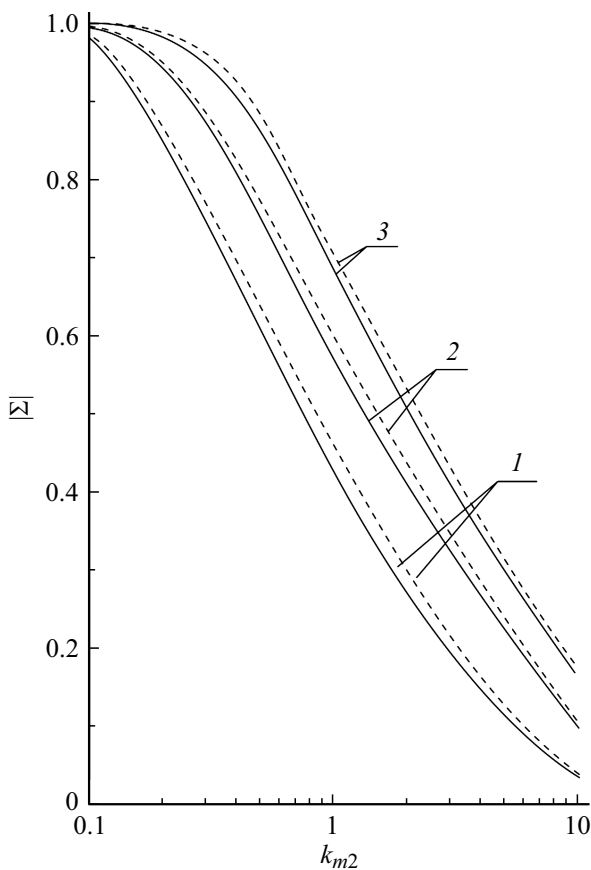


Рис. 4. Зависимость модуля безразмерной электропроводности $|\Sigma|$ в вырожденном случае (сплошные линии) и в невырожденном случае (штриховые линии) от безразмерной эффективной массы k_{m2} при $k_{m1} = 1$, $a_0 = 0.1$, $\omega_0 = 0.1$, $q_1 = q_2 = 0.2$. Кривые 1–3 получены при $\beta_0 = 10, 20, 30$ соответственно.

если ось вращения эллипсоида лежит вдоль внешнего поля [24].

Зависимость электропроводности Σ от k_{m1} очевидна: при увеличении эффективной массы вдоль внешнего поля будет снижаться скорость носителей заряда в этом направлении. Это приведет к уменьшению электропроводности как по модулю, так и по аргументу.

На рис. 3 показана зависимость безразмерной полной, объемной и поверхностной электропроводности от безразмерной эффективной массы k_{m2} вдоль оси p_y . При больших k_{m2} (или при больших m_2 , так как k_{m2} прямо пропорционально m_2) полуось эллипса z_{01} (11) будет вытягиваться поперек плоскости пленки при постоянной энергии ε_{\perp} и при постоянном значении m_3 , т.е. траектория носителей заряда удлиняется до поверхности пленки. Это приводит к снижению модуля объемной и поверхностной электропроводности, так как увеличивается вклад поверхностного рассеяния по сравнению с вкладом объемного рассеяния. При низких значениях k_{m2} при постоянных значениях ε_{\perp} и m_3 сокращается по длине полуось z_{01} , что приводит к уменьшению интенсивности поверхностного рассеяния. В итоге электро-

проводность увеличивается по модулю. У зависимости объемной проводимости от безразмерной эффективной массы k_{m2} наблюдается максимум. Это объясняется тем, что если зафиксировать энергию ε_{\perp} и эффективную массу m_3 , то при увеличении $|1 - k_{m2}|$ увеличивается длина траектории в поперечном сечении пленки (длина окружности меньше периметра эллипса). Увеличение длины траектории приводит к росту отношения частоты рассеяния в объеме к частоте рассеяния на поверхности.

На рис. 4 изображена зависимость модуля безразмерной электропроводности от безразмерной эффективной массы k_{m2} вдоль оси p_y при различных значениях магнитной индукции. С ростом индукции магнитного поля уменьшается периметр эллипса, так как его полуоси обратно пропорциональны индукции магнитного поля (11). Это приводит к меньшей вероятности рассеяния на границах пленки.

На рис. 5 построены теоретические и экспериментальные зависимости продольного относительного магнетосопротивления для поликристаллической пленки висмута с ориентацией (001), которая обладает магнетосопротивлением, аналогичным магнетосопротивлению монокристаллической пленки висмута [25]. Толщина пленки составляет 29 nm. Точки — экспериментальные

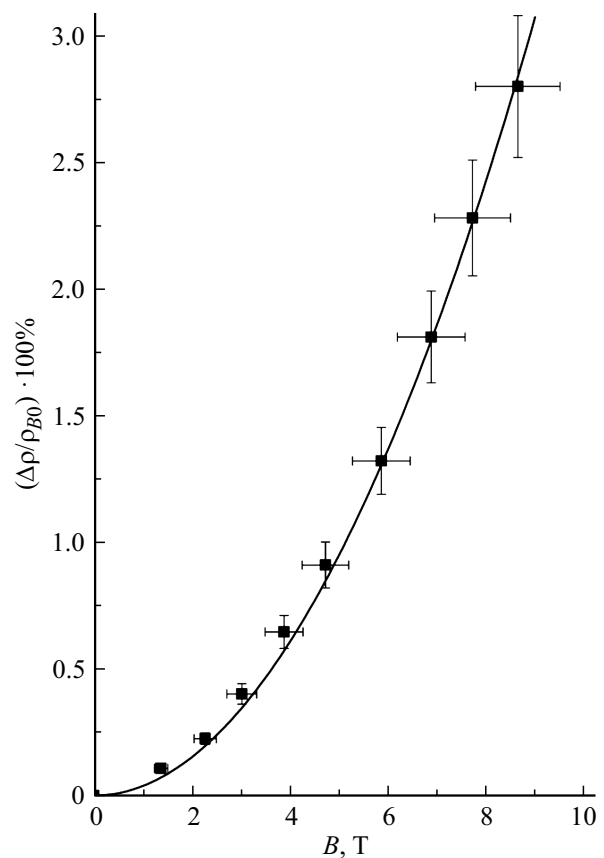


Рис. 5. Зависимость параллельного магнетосопротивления тонкой пленки висмута от индукции магнитного поля. Точки обозначены экспериментальные данные [26], а сплошной кривой — теоретический расчет.

данные работы, сплошные кривые — теоретический расчет с помощью формул (34)–(46), (50)–(53). Пленка висмута получалась с помощью молекулярно-лучевой эпитаксии со скоростью 1.6 Å/min. Толщину пленки измеряли с помощью полевой эмиссионной микроскопии. Магнетосопротивление определяли с помощью системы измерения физических свойств (PPMS).

Изоэнергетическая поверхность для электронов в висмуте представляет собой три симметрично расположенных эллипсоида, оси вращения которых направлены параллельно плоскости пленки [26]. Угол между осями вращения одинаков и равен $2\pi/3$. Проводимость пленки висмута может быть определена следующим образом [27]. Пусть σ_{\parallel} и σ_{\perp} — электропроводности, обусловленные одним изоэнергетическим эллипсоидом соответственно. Вдоль внешнего электрического поля направлена продольная масса m_{\parallel} для σ_{\parallel} или поперечная масса m_{\perp} для σ_{\perp} . Если ось вращения эллипсоида параллельна оси p_x , то тензор проводимости является диагональным:

$$\tilde{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{\parallel} & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp} \end{pmatrix}.$$

В случае произвольного направления главной оси эллипсоида в плоскости (p_x, p_y) выражение для тензора проводимости можно получить с помощью матрицы поворота вокруг оси p_z :

$$\sigma_{0ij} = M_{ik}^{v_z}(\varphi_0) \tilde{\sigma}_{0kl} M_{lj}^{v_z}(-\varphi_0),$$

где $M_{ik}^{v_z}(\varphi_0)$ — компоненты матрицы поворота вокруг оси p_z на угол φ_0 :

$$M^{v_z}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{pmatrix},$$

где φ_0 — угол между осью вращения эллипсоида для σ_{\parallel} и напряженностью электрического поля.

В итоге имеем следующий вид тензора проводимости:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{\parallel} \cos^2 \varphi_0 + \sigma_{\perp} \sin^2 \varphi_0 & (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \\ (\sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp}) \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 & \sigma_{\parallel} \sin^2 \varphi_0 + \sigma_{\perp} \cos^2 \varphi_0 \end{pmatrix}.$$

σ_0 — электропроводность от одного эллипсоида, для висмута их три, поэтому электропроводность висмута равна

$$\begin{aligned} \sigma_{0Bi} &= \sigma_0(\varphi_0) + \sigma_0 \left(\varphi_0 + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &+ \sigma_0 \left(\varphi_0 + \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} (\sigma_{\parallel} + \sigma_{\perp}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, электропроводность не зависит от ориентации эллипсоидов, т. е. от угла φ_0 . Нас интересует

только x -составляющая, обусловленная электрическим полем вдоль оси X , т. е. компонента $(\sigma_{0Bi})_{11}$:

$$(\sigma_{0Bi})_{11} = \sigma = \frac{3}{2} (\sigma_{\parallel} + \sigma_{\perp}).$$

На графике $\Delta\rho = \rho - \rho_{B0}$, где $\rho = 1/\sigma$ и $\rho_{B0} = 1/\sigma$ ($B = 0$). Для наибольшего совпадения экспериментальных данных с теоретическим расчетом коэффициенты зеркальности брались равными $q_1 = q_2 = 0.8$.

Заключение

Получены аналитические выражения для высокочастотной электропроводности тонкой пленки в продольном магнитном поле с учетом анизотропной изоэнергетической поверхности. Обнаружен максимум у зависимостей модуля объемной электропроводности от эффективной массы вдоль плоскости пленки. Показано, что с ростом эффективной массы вдоль плоскости пленки снижаются полная и поверхностная электропроводности по модулю. Существует согласие между теорией и экспериментом для электропроводности тонких пленок Вi. Отклонение экспериментальных данных от теоретического расчета не превышает 5%.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] А.Л. Чиж, К.Б. Журавлев, Д.В. Дмитриев, А.И. Торопов, Н.А. Валишева, М.С. Аксенов, А.М. Гилинский, И.Б. Чистохин. Письма в ЖТФ, **45** (14), 52 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.14.48026.17764 [A.L. Chizh, K.B. Mikitchuk, K.S. Zhuravlev, D.V. Dmitriev, A.I. Toropov, N.A. Valisheva, M.S. Aksenov, A.M. Gilinsky, I.B. Chistokhin. Tech. Phys. Lett., **45**, 739 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019070204]
- [2] В.С. Варавин, В.В. Васильев, А.А. Гузев, С.А. Дворецкий, А.П. Ковчавцев, Д.В. Марин, И.В. Сабинаина, Ю.Г. Сидоров, Г.Ю. Сидоров, А.В. Царенко, М.В. Якушев. ФТП, **50** (12), 1652 (2016). [V.S. Varavin, V.V. Vasilyev, A.A. Guzev, S.A. Dvoretzky, A.P. Kovchavtsev, D.V. Marin, I.V. Sabinina, Yu.G. Sidorov, G.Yu. Sidorov, A.V. Tsarenko, M.V. Yakushev. Semiconductors, **50**, 1626 (2016). DOI: 10.1134/S1063782616120265]
- [3] L. Wang, M. Yin, A. Khan, S. Muhtadi, F. Asif, E. S. Choi, T. Datta. Phys. Rev. Appl., **9**, 024006 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.9.024006
- [4] M.A. Abeed, J.L. Drobitch, S. Bandyopadhyay. Phys. Rev. Appl., **11**, 054069 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.054069
- [5] A. Kowsar, S.F.U. Farhad, S.N. Sakib. IJRER, **8** (4), 2218 (2018). DOI: 10.20508/ijrer.v11i4.12474.g8350
- [6] B. Godefroid, G. Kozyreff. Phys. Rev. Appl., **8** (3), 034024 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.8.034024

- [7] S. Bhattacharya, I. Baydoun, M. Lin, S. John. *Phys. Rev. Appl.*, **11** (1), 014005 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.014005
- [8] В.С. Калиновский, Е.В. Контрош, А.В. Андреева, В.М. Андреев, В.В. Малютина-Бронская, В.Б. Залесский, А.М. Лемешевская, В.И. Кузоро, В.И. Халиманович, М.К. Зайцева. Письма в ЖТФ, **45** (16), 52 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.16.48159.17868 [V.S. Kalinovskii, E.V. Kontrosh, A.V. Andreeva, V.M. Andreev, V.V. Maljutina-Bronskaya, V.B. Zaleskii, A.M. Lemesheskaya, V.I. Kuzoro, V.I. Khalimanovich, M.K. Zaitseva. *Tech. Phys. Lett.*, **45**, 850 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019080236]
- [9] А.Б. Никольская, М.Ф. Вильданова, С.С. Козлов, О.И. Шевалеевский. ФТП, **52** (1), 93 (2018). DOI: 10.21883/FTP.2018.01.45325.8591 [A.B. Nikolskaia, M.F. Vildanova, S.S. Kozlov, O.I. Shevaleevskiy. *Semiconductors*, **52** (1), 88 (2018). DOI: 10.1134/S1063782618010165]
- [10] L. Moraga, C. Arenas, R. Henriquez, S. Bravo, B. Solis. *Phys. B: Condens. Matter.*, **499**, 17 (2016). DOI: 10.1016/j.physb.2016.07.001
- [11] R. Henriquez, S. Oyarzun, M. Flores, M.A. Suarez, L. Moraga, G. Kremer, C.A. Gonzalez-Fuentes, M. Robles, R.C. Munoz. *J. Appl. Phys.*, **108**, 123704 (2010). DOI: 10.1063/1.3525704
- [12] R.C. Munoz, M.A. Su'arez, S. Oyarz'un. *Phys. Rev. B*, **81**, 165408 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevB.81.165408
- [13] S. Oyarz'un, R. Henríquez, M.A. Su'arez, L. Moraga, G. Kremer, R.C. Munoz. *Appl. Surf. Sci.*, **289**, 167 (2014). DOI: 10.1016/j.apsusc.2013.10.128
- [14] А.И. Уткин, Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов. Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, **9**, 85 (2016). DOI: 10.7868/S0207352816090158 [A.I. Utkin, A.A. Yushkanov, E.V. Zavitaev. *J. Surf. Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, **10**, 5 (2016). DOI: 10.1134/S1027451016050153]
- [15] А.И. Уткин, А.А. Юшканов. ЖТФ, **86**, 10 (2016). [A.I. Utkin, A.A. Yushkanov. *Tech. Phys.*, **61**, 1457 (2016). DOI: 10.1134/S1063784216100273]
- [16] И.А. Кузнецова, О.В. Савенко, А.А. Юшканов. ЖТФ, **87** (12), 1769 (2017). DOI: 10.21883/JTF.2017.12.45196.1831 [I.A. Kuznetsova, O.V. Savenko, A.A. Yushkanov. *Tech. Phys.*, **62**, 1766 (2017). DOI: 10.1134/S1063784217120143]
- [17] И.А. Кузнецова, О.В. Савенко, П.А. Кузнецов. ФТП, **54** (9), 846 (2020). DOI: 10.21883/FTP.2020.09.49819.11 [I.A. Kuznetsova, O.V. Savenko, P.A. Kuznetsov. *Semiconductors*, **54**, 1039 (2020). DOI: 10.1134/S106378262009016X]
- [18] Э.В. Завитаев, К.Е. Харитонов, А.А. Юшканов. ЖТФ, **89** (5), 643 (2019). DOI: 10.21883/JTF.2019.05.47462.275-18 [E.V. Zavitaev, K.E. Kharitonov, A.A. Yushkanov. *Tech. Phys.*, **64**, 593 (2019). DOI: 10.1134/S1063784219050268]
- [19] И.А. Кузнецова, Д.Н. Романов, А.А. Юшканов. Микроэлектроника, **47** (3), 226 (2018). DOI: 10.7868/S0544126918030079 [I.A. Kuznetsova, D.N. Romanov, A.A. Yushkanov. *Russ. Microelectron.*, **47** (3), 201 (2018). DOI: 10.1134/S1063739718030071]
- [20] E.H. Sondheimer. *Adv. Phys.*, **50** (6), 499 (2001). DOI: 10.1080/00018730110102187
- [21] D.A. Bandurin, I. Torre, R. Krishna Kumar, M. Ben Shalom, A. Tomadin, A. Principi, G.H. Auton, E. Khestanova, K.S. Novoselov, I.V. Grigorieva, L.A. Ponomarenko, A.K. Geim, M. Polini. *Science*, **351**, 1055 (2016). DOI: 10.1126/science.aad0201
- [22] M.J.H. Ku, T.X. Zhou, Q. Li, Yo. J. Shin, J.K. Shi, C. Burch, L.E. Anderson, A.T. Pierce, Yo. Xie, A. Hamo, U. Vool, H. Zhang, F. Casola, T. Taniguchi, K. Watanabe, M.M. Fogler, Ph. Kim, A. Yacoby, R.L. Walsworth. *Nature*, **583**, 537 (2020). DOI: 10.1038/s41586-020-2507-2
- [23] K.S. Denisov, K.A. Baryshnikov, P.S. Alekseev. *Phys. Rev. B Lett.*, **106**, L081113 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevB.106.L081113
- [24] К.В. Шалимова. Физика полупроводников: учебник (Лань, СПб., 2010)
- [25] N. Wang, Y. Qi. *Vacuum*, **191**, 110360 (2021). DOI: 10.1016/j.vacuum.2021.110360
- [26] В.С. Эдельман. УФН, **123** (2), 260 (1977). DOI: 10.3367/UFNr.0123.197710d.0257 [V.S. Edel'man. *Sov. Phys. Usp.*, **20**, 819 (1977). DOI: 10.1070/PU1977v020n10ABEH005467]
- [27] I.A. Kuznetsova, O.V. Savenko, D.N. Romanov. *Phys. Lett. A*, **427**, 127933 (2022). DOI: 10.1016/j.physleta.2022.127933