06

О генерации высших гармоник дипольным электромагнитным импульсом в вакууме

© Р.М. Фещенко

Физический институт им. П.Н. Лебедева,
199991 Москва, Россия

e-mail: rusl@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 11.12.2023 г.
В окончательной редакции 09.01.2024 г.
Принята к публикации 16.01.2024 г.

Обсуждена генерация нелинейных гармоник самодействующим дипольным импульсом электромагнитного поля, эволюционирующем в вакууме. С использованием нелинейных уравнений Максвелла, полученных из лагранжиана Гейзенберга-Эйлера, показано, что в первом порядке теории возмущений генерация третьей гармоники не происходит, как и следует из закона сохранения энергии-импульса. Показано, что учёт нелинейных эффектов приводит к генерации октупольного электромагнитного импульса на частоте исходного дипольного импульса. С помощью численного моделирования для дипольного импульса гауссовой формы получен спектр генерируемого излучения и показано, что его максимум смещён в область больших частот по сравнению с исходной частотой.

Ключевые слова: нелинейная электродинамика, сохранение энергии-импульса, лагранжиан Гейзенберга-Эйлера, излучение.

DOI: 10.61011/OS.2024.01.57550.5-24

Введение

Известно, что в присутствии сильного электромагнитного поля уравнения Максвелла в свободном пространстве должны быть изменены для учёта эффектов, связанных с поляризацией вакуума. Модифицированные таким образом уравнения поля будут нелинейными [1], что приводит к появлению многих новых физических эффектов. Например, в сильном магнитном поле вакуум ведёт себя как двулучепреломляющая среда [2], а свет в сильном электромагнитном поле (например, поле магнитного диполя) распространяется вдоль кривых линий, являющихся геодезическими в некотором псевдоримановом пространстве [3].

Предметом активных исследований также была генерация высших гармоник полем сильного электромагнитного импульса. В частности, было показано, что плоская монохроматическая электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, не генерирует гармоник даже в присутствии постоянного однородного магнитного поля. С другой стороны, пространственно неоднородная волна в постоянном магнитном поле либо плоская монохроматическая волна, распространяющиеся в пространственно неоднородном магнитном поле, порождает вторую гармонику даже в однопетлевом приближении теории возмущений [4]. Обзор современного состояния теории в этой области может быть найден в [5].

В работе рассматривается (в однопетлевом приближении) иная проблема — генерация высших гармоник сильным дипольным электромагнитным импульсом [6], эволюционирующим в свободном пространстве и взаимодействующим с самим собой.

Уравнения для сильного электромагнитного поля в вакууме

В случае сильного электромагнитного поля (напряженность поля $E \lesssim m_e^2 c^3/e\hbar$, где m_e — масса электрона, e — заряд электрона и c — скорость света) лагранжиан $\mathscr{L}$ свободного электромагнитного поля модифицируется, и в нём появляются члены четвёртого и более высоких порядков по полю [1,2]:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{(0)} + \mathscr{L}_{(1)} + \ldots, \tag{1}$$

где $\mathscr{L}_{(0)}$ — линейный лагранжиан

$$\mathscr{L}_{(0)} = -\frac{1}{16\pi c} F^{ik} F_{ik}, \tag{2}$$

F^{ik} — тензор электромагнитного поля, выражающийся через потенциалы поля A^i обычным образом, $\mathscr{L}_{(1)}$ — нелинейная поправка 4-го порядка по полю, которая при характерной энергии квантов поля $\hbar\omega \ll m_e c^2$ может быть выражена через инварианты поля как

$$\mathscr{L}_{(1)} = \frac{a}{4}\left[(F^{ik}F_{ik})^2 + \frac{7}{4}(e_{ik\mu\nu}F^{ik}F^{\mu\nu})^2\right], \tag{3}$$

где $a = \hbar e^4/(90\pi^2 m_e^4 c^8)$. Лагранжиан (3) называется лагранжианом Гейзенберга-Эйлера.

Вторая пара уравнений Максвелла теперь может быть получена из лагранжиана (1) с помощью вариационного принципа, тогда как первая пара уравнений Максвелла не изменяется по сравнению с линейным случаем. В результате получаем для второй пары уравнений

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i, \tag{4}$$

где четырёхмерный ток в правой части

$$j^i = -2c^2 \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial L_{(1)}}{\partial F^{ik}} \right) \tag{5}$$

выражается нелинейным образом через полное поле

$$F^{ik} = F_{(0)}{}^{ik} + F_{(1)}{}^{ik} + \dots . \tag{6}$$

Предположим теперь, что нелинейные поправки малы по сравнению с исходным полем $F^{ik}_{(0)}$, которое удовлетворяет линейным уравнениям Максвелла. Тогда первый по малому параметру a поправочный член к полю $F^{ik}_{(1)}$ будет удовлетворять уравнениям (4), где ток в правой части зависит только от исходного сильного поля $F^{ik}_{(0)}$. Если это поле к тому же является полем излучения с конечной полной энергией, для которого второй инвариант всегда равен нулю [7], то в лагранжиане (3) останется только первый член. В результате выражение для тока (5) примет следующий вид:

$$j^i(x) = -2ac^2 \frac{\partial (F^{\mu\nu}_{(0)} F_{(0)\mu\nu})}{\partial x^k} F^{ik}_{(0)}, \tag{7}$$

где было принято во внимание, что $\partial F^{ik}_{(0)}/\partial x^k = 0$.

Таким образом, сильное исходное поле $F^{ik}_{(0)}$ поляризует вакуум, создавая некоторый вакуумный четырёхмерный ток, который генерирует новое поле $F^{ik}_{(1)}$, которое будет включать как излучение, так и неизлучательную часть. Это поле может быть найдено из уравнения (4) с использованием подходящего электромагнитного пропагатора. Если необходимо найти только излучение, то в качестве пропагатора необходимо выбрать функцию Паули-Йордана $\Delta(x)$ [4].

Уравнения (4) можно переписать в несколько иной форме, если ввести тензор индукции H^{ik}, для которого имеем

$$\frac{\partial H^{ik}}{\partial x^k} = 0, \tag{8}$$

где

$$H^{ik} = (1 + 8\pi a F^{st} F_{st}) F^{ik}, \tag{9}$$

причём выражение в скобках соответствует нелинейной диэлектрической и магнитной проницаемостям вакуума.

Используемый здесь подход к построению теории возмущений на основе лагранжиана Гейзенберга-Эйлера использовался ранее, например, в работах [9,10].

Дипольный импульс в вакууме

Пусть теперь поле $F^{ik}_{(0)}$ есть поле конечного дипольного электромагнитного импульса [6]. Поля этого типа обеспечивают максимальную концентрацию энергии в центре для импульса с заданным спектром и энергий [11]. Поле дипольного импульса в общем случае может быть представлено как

$$F^{ik}_{(0)} = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} M^{k\mu} - \frac{\partial}{\partial x^k} M^{i\mu} \right) \frac{\partial g(x)}{\partial x^\mu}, \tag{10}$$

где $M^{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор дипольных моментов вида

$$M^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & d_2 & d_3 \\ -d_1 & 0 & m_3 & -m_2 \\ -d_2 & -m_3 & 0 & m_1 \\ -d_3 & m_2 & -m_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$ и $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ — векторы электрического и магнитного дипольных моментов соответственно, функция $g(x)$ — разность сходящейся и расходящейся сферических волн ($x = (ct, \mathbf{r})$ — четырёхмерные координаты), имеющая следующий вид:

$$\begin{aligned} g(x) =& c \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s) \Delta(x - sn)\, ds \\ =& \frac{f(ct - |\mathbf{r}|) - f(ct + |\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|}. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $f(s)$ — произвольная вещественная функция одной переменной с интегрируемым квадратом и $n^2 = 1$ — произвольный единичный четырёхмерный вектор, задающий систему отсчёта, в которой диполь покоится. Можно показать, что функция $g(x)$ удовлетворяет волновому уравнению $\Box g(x) = 0$. Выражения для электрического и магнитного полей дипольного импульса, следующие из (10), могут быть найдены в [6].

Четырёхмерное фурье-преобразование от $g(x)$ имеет вид, прямо следующий из (12),

$$g(k) = c\Delta(k) f(nk), \tag{13}$$

где $k = (k^0, \boldsymbol{\kappa})$, $f(\xi)$ — фурье-преобразование от $f(s)$, а $\Delta(k)$ — 4D фурье-образ от функции Паули-Йордана [8]:

$$\Delta(k) = \frac{8\pi^2 i}{c} \operatorname{sign}(k^0) \delta(k^2). \tag{14}$$

Из (10) и (13) можно также получить выражение для фурье-гармоник тензора электромагнитного поля дипольного импульса.

Ниже будет использоваться так называемый гауссов дипольный импульс, для которого

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \cos(\Omega s/c) \exp\left(-\frac{s^2}{2l^2} \right), \tag{15}$$

где l — полуширина импульса и Ω — центральная частота. Преобразование Фурье от (15) будет равно

$$\begin{aligned} f(\xi) =& \frac{l}{2\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left(-\frac{l^2}{2} (\xi - \Omega/c)^2 \right) \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{l^2}{2} (\xi + \Omega/c)^2 \right) \right] \end{aligned} \tag{16}$$

и при $l \to \infty$ переходит в выражение для спектра монохроматического дипольного импульса:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} (\delta(\xi - \Omega/c) + \delta(\xi + \Omega/c)). \tag{17}$$

В (16) и (17) два слагаемых соответствуют положительно- и отрицательночастотным частям спектра.

Генерация высших гармоник дипольным импульсом

Получим теперь поле излучения, которое сильный дипольный импульс вида (12) генерирует согласно уравнениям (4) и (7). Вычисления удобнее вести для фурье-гармоник поля $F^{ik}_{(1)}$ и тока j^i. Эти фурье-гармоники представляют собой двойную четырехмерную свёртку выражений для фурье-гармоник тензора $F^{ik}_{(0)}$ с учётом дополнительной производной и могут быть представлены как

$$j^i(k) = \frac{2ac^2}{(2\pi)^4}\int F^{ik}(k-k')k'_k I(k')\,d^4k', \tag{18}$$

где I — свёртка вида

$$I(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int F^{ik}(k'')F^*_{ik}(k-k'')\,d^4k''. \tag{19}$$

Принимая теперь во внимание выражение (13), а также тождества $k^2=0$, $(k-k')^2=0$, $(k'-k'')^2=0$ и $k''^2=0$, выражение для тока может быть записано как

$$\begin{aligned} j^i(k) =& \frac{aci}{\pi^2}\int\Big[M^{k\mu}(k^i-k'^i)k'_k k_\mu + M^{i\mu}(kk')(k_\mu-k'_\mu)\Big] \\ &\times I(k')\,\mathrm{sign}(k^0-k'^0)f(k^0-k'^0)\delta((k-k')^2)\,d^4k', \end{aligned} \tag{20}$$

где считается, что $k^0=|\boldsymbol{\kappa}|>0$. Отрицательночастотная часть спектра даёт точно такой же вклад.

Для функции I из (20) получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} I(k) =& 4\int\Big[k'^2(M^{t\mu}M_t{}^\nu k''_t k''_\mu - M^{t\mu}M_t{}^\nu k''_t k'_\mu) \\ &-2(M^{t\mu}k''_t k'_\mu)^2\Big]\,\mathrm{sign}(k'^0-k''^0)f(k'^0-k''^0) \\ &\times\delta((k'-k'')^2)\,\mathrm{sign}(k''^0)f^*(k''^0)\delta(k''^2)\,d^4k'', \end{aligned} \tag{21}$$

которое может быть проинтегрировано трижды и сведено к одномерному интегралу.

Теперь предположим, что магнитный момент $\mathbf{m}_\alpha=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M^{\beta\gamma}/2$ равен нулю, а электромагнитный импульс является полностью электродипольным с дипольным моментом $\mathbf{d}=M^{0\alpha}$. В итоге получается следующее выражение для $I(k'^0,\kappa')$:

$$\begin{aligned} I(k) =& -4\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[P_1|\mathbf{d}|^2+P_2(\mathbf{n}'\mathbf{d})^2\Big] \\ &\times\Big(\theta((k'^0)^2-\kappa'^2-2\kappa''(k'^0-\kappa'))-\theta((k'^0)^2 \\ &-\kappa'^2-2\kappa''(k'^0+\kappa'))\Big)f^*(\kappa'')f(k'^0-\kappa'') \\ &\times\mathrm{sign}(k'^0-\kappa'')\,d\kappa'', \end{aligned} \tag{22}$$

где $\kappa''=|\boldsymbol{\kappa}''|$, $\boldsymbol{\kappa}''$ — пространственная часть 4D-вектора k'', $\kappa'=|\boldsymbol{\kappa}'|$, $\boldsymbol{\kappa}'$ — пространственная часть 4D-вектора k',

$$\begin{aligned} P_1 =& \frac{1}{2}\Big[((k'^0)^2-3\kappa'^2)S_{00}+((k'^0)^2+\kappa'^2)S_{11} \\ &-2((k'^0)^2-\kappa'^2)k'^0 v^0\Big], \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} P_2 =& \frac{1}{2}\Big[-((k'^0)^2-3\kappa'^2)S_{00}+3((k'^0)^2+\kappa'^2)S_{11} \\ &+8\kappa' k'^0 S_{01}2v_1\kappa'((k'^0)^2-\kappa'^2)\Big] \end{aligned} \tag{24}$$

и

$$S_{00}=\frac{\pi}{2\kappa'}\kappa''^2, \tag{25}$$

$$S_{01}=\frac{\pi((k'^0)^2-\kappa'^2)}{4k'^2}|\kappa''|-\frac{\pi\kappa'^0}{2\kappa'^2}|\kappa''|\kappa'', \tag{26}$$

$$\begin{aligned} S_{11} =& \frac{\pi((k'^0)^2-\kappa'^2)^2}{8\kappa'^3}-\frac{\pi((k'^0)^2-\kappa'^2)k'^0\kappa''}{2\kappa'^3} \\ &+\frac{\pi(k'^0)^2\kappa''^2}{2\kappa'^3}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$v_0=\frac{\pi}{2\kappa'}|\kappa''|, \tag{28}$$

$$v_1=-\frac{\pi((k'^0)^2-\kappa'^2)}{4\kappa'^2}+\frac{\pi k'^0}{2\kappa'^2}\kappa''. \tag{29}$$

После подстановки (22) в выражение для тока (20) можно выполнить интегрирование и получить выражение для компонент тока в виде тройного интеграла.

Заметим, что в излучение будут вносить вклад только поперечные компоненты тока (20), ортогональные радиальному вектору $\mathbf{n}=\boldsymbol{\kappa}/|\boldsymbol{\kappa}|$. Выделяя теперь в (20) явным образом эти поперечные компоненты тока и разбивая выражение на дипольную и октупольную части, можно с учётом выражения (14) для функции Паули-Йордана записать для трёхмерного преобразования Фурье от (положительночастотной) поперечной части электрического поля излучения:

$$\begin{aligned} E^\alpha(\kappa) =& \frac{8aci|\mathbf{d}|^3}{\pi}\Big[(G'_1+\frac{G'_2}{5})(\delta^{\alpha\beta}-n^\alpha-n^\beta)\frac{d^\beta}{|\mathbf{d}|} \\ &+G'_2(\delta^{\alpha\beta}n^\gamma-n^\sigma-n^\alpha n^\beta n^\gamma-n^\sigma)O^{\beta\gamma\sigma}\Big], \end{aligned} \tag{30}$$

где тензор октупольных моментов равен

$$O^{\beta\gamma\sigma}=\frac{d^\beta d^\gamma d^\sigma}{|\mathbf{d}|^3}-\frac{(\delta^{\beta\gamma}d^\sigma+\delta^{\beta\sigma}d^\gamma+\delta^{\gamma\sigma}d^\beta)}{5|\mathbf{d}|}, \tag{31}$$

а коэффициенты G'_1 и G'_2 равны:

$$G'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa'^2 f(\kappa - k'^0) f^*(\kappa'') f(k'^0 - \kappa'')$$
$$\times(\theta((k'^0 - \kappa')(k'^0 + \kappa' - 2\kappa)) - \theta((\kappa' + k'^0)$$
$$\times(k'^0 - \kappa' - 2\kappa)))(\theta((k'^0 - \kappa')(k'^0 + \kappa' - 2\kappa''))$$
$$-\theta((k'^0 + \kappa')(k'^0 - \kappa' - 2\kappa''))) \operatorname{sign}(\kappa - k'^0)$$
$$\times \operatorname{sign}(k'^0 - \kappa'') G_1(k'^0, k', k'')\, d\kappa'_0\, d\kappa'\, d\kappa'', \quad (32)$$

$$G'_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \kappa'^2 f(\kappa - k'^0) f^*(\kappa'') f(k'^0 - \kappa'')$$
$$\times(\theta((k'^0 - \kappa')(k'^0 + \kappa' - 2\kappa)) - \theta((\kappa' + k'^0)$$
$$\times(k'^0 - \kappa' - 2\kappa)))(\theta((k'^0 - \kappa')(k'^0 + \kappa' - 2\kappa''))$$
$$-\theta((k'^0 + \kappa')(k'^0 - \kappa' - 2\kappa''))) \operatorname{sign}(\kappa - k'^0)$$
$$\times \operatorname{sign}(k'^0 - \kappa'') G_2(k'^0, k', k'')\, d\kappa'_0\, d\kappa'\, d\kappa''. \quad (33)$$

В выражениях (32), (33) коэффициенты определены следующим образом:

$$\begin{aligned} G_1 =&\kappa k'^0(k'^0 - \kappa) P_2 m_2^1 + \kappa\kappa'(k'^0 - \kappa)(P_1 m_0 \\ &-P_1 m_1^1 - P_2 m_3^1) - \kappa\kappa'^2(P_1 m_2^1 + 2P_2 m_4^1), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} G_2 =&P_2 \left[\kappa k'^0(k'^0 - \kappa) m_2^2 - \kappa\kappa' k'^0 m_3^2 \right. \\ &\left. + 2\kappa^2\kappa'(m_3^1 + m_3^2) - \kappa\kappa'^2 m_4^2\right], \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$m_0 = \frac{\pi}{\kappa\kappa'}, \quad (36)$$

$$m_1^1 = -\pi\frac{(\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2}{2\kappa^2\kappa'^2}, \quad (37)$$

$$m_2^1 = \frac{\pi}{2\kappa\kappa'}\left[1 - \frac{((\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2)^2}{4\kappa^2\kappa'^2}\right], \quad (38)$$

$$m_2^2 = \frac{\pi}{2\kappa\kappa'}\left[\frac{3((\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2)^2}{4\kappa^2\kappa'^2} - 1\right], \quad (39)$$

$$\begin{aligned} m_3^1 =&\pi\frac{(\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2}{4\kappa^2\kappa'^2} \\ &\times\left[\frac{((\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2)^2}{4\kappa^2\kappa'^2} - 1\right], \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} m_3^2 =&\pi\frac{(\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2}{4\kappa^2\kappa'^2} \\ &\times\left[3 - \frac{5((\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2)^2}{4\kappa^2\kappa'^2}\right], \end{aligned} \quad (41)$$

$$m_4^1 = \frac{\pi}{8\kappa\kappa'}\left[1 - \frac{((\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2)^2}{4\kappa^2\kappa'^2}\right], \quad (42)$$

$$\begin{aligned} m_4^2 = &-\frac{\pi}{8\kappa\kappa'}\left[1 - \frac{5((\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2)^2}{4\kappa^2\kappa'^2}\right. \\ &\left. + \frac{((\kappa - k'^0)^2 - \kappa'^2 - \kappa^2)^4}{4\kappa^4\kappa'^4}\right]. \end{aligned} \quad (43)$$

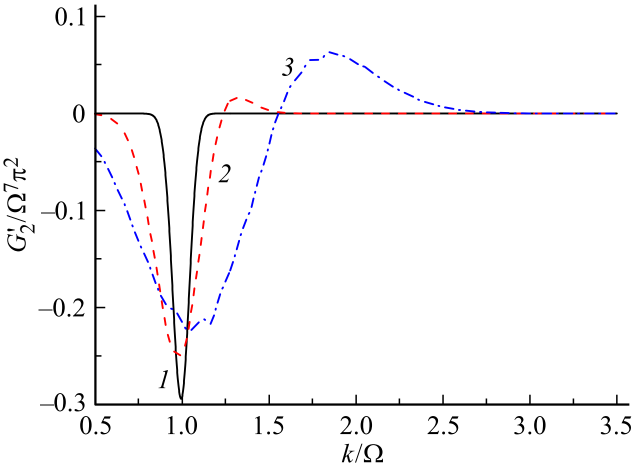
Как видно из выражения (30), угловой спектр излучения изменяется по сравнению с исходным дипольным импульсом и будет включать октупольную компоненту, соответствующую фотону с угловыми моментами $j = 3$, получающимся в результате сложения трёх дипольных фотонов с угловым моментом $j = 1$ либо упругого рассеяния двух дипольных фотонов друг на друге. Отсутствие квадрупольного члена можно объяснить сохранением чётности: три дипольных фотона исходного импульса с отрицательной чётностью $P = -1$ складываются в один фотон, который тоже должен иметь отрицательную чётность; либо два дипольных фотона с отрицательной чётностью рассеиваются друг на друге, давая два фотона, один из которых должен быть дипольным, а второй иметь соответственно отрицательную чётность. Но отрицательной чётностью обладают электрические фотоны только нечётной мультипольности, поскольку $P = (-1)^j$ для фотонов электрического типа [1].

В случае если исходный дипольный импульс описывается функцией f, определённой формулой (17), интегрирование по k'^0 и κ'' в выражениях (32), (33) выполняется путем подстановок $\kappa'' = \pm\Omega$ и $k'^0 = \kappa \mp \Omega$. Для третьей гармоники это даёт (принимая во внимание, что $\kappa > 0$ и $\kappa' > 0$) $\kappa = 3\Omega$ и $k'^0 = 2\Omega$. Эти выражения при подстановке в формулы (32) и (33) обращают интегралы по κ' от 0 до $+\infty$ в нуль, поскольку в этом интервале равно нулю произведение тэта-функций. То есть в поле монохроматического электродипольного импульса в вакууме третья гармоника не генерируется. Это также является прямым следствием законов сохранения энергии-импульса в применении к системе взаимодействующих фотонов.

Для первой гармоники имеем для монохроматического импульса $\kappa = \Omega$ и $k'^0 = 0$ или $k'^0 = 2\Omega$, что приводит после интегрирования по κ' от 0 до $+\infty$ в выражениях (32), (33) к следующему выражению для трёхмерного преобразования Фурье поперечных компонент электрического поля:

$$\begin{aligned} E^\alpha(\kappa) = &-\frac{\sqrt{3}i}{15\pi}\frac{\alpha P}{\lambda I_s}\sqrt{\frac{P}{c}}\left[(G''_1 + \frac{G''_2}{5})(\delta^{\alpha\beta} - n^\alpha n^\beta)\frac{d^\beta}{|\mathbf{d}|}\right. \\ &\left. + G''_2(\delta^{\alpha\beta} n^\gamma n^\sigma - n^\alpha n^\beta n^\gamma n^\sigma) O^{\beta\gamma\sigma}\right]\delta(\kappa - \Omega/c), \end{aligned} \quad (44)$$

где $P = |\mathbf{d}|^2\Omega^4/(3c^3)$ — средняя мощность исходного дипольного импульса, $I_s = m_e^4 c^7/(8\pi e^2\hbar^2) \approx \approx 1.82 \cdot 10^{29}\,\mathrm{W/cm^2}$ — швингеровская интенсивность, $\alpha = e^2/(\hbar c)$ — постоянная тонкой структуры, $\lambda = 2\pi c/\Omega$ — длина волны, $G''_1 = -73/630$ и $G''_2 = -1271/3465$.



Нормированный коэффициент $G_2'/(\pi^2\Omega^7)$, вычисленный путем численного интегрирования поля гауссова дипольного импульса (16) по методу Монте-Карло для трёх различных значений параметра $(\Omega l)^{-1}$: *1* — $(l\Omega)^{-1} \sim 0.03$, *2* — $(l\Omega)^{-1} \sim 0.1$ и *3* — $(l\Omega)^{-1} \sim 0.3$.

Выражение (44) означает, что в дополнение к начальному диполю появляется октуполь с той же частотой как результат рассеяния двух фотонов друг на друге. Средняя интенсивность октупольной компоненты будет пропорциональна $\sim (\alpha P/\lambda I_s)^2$, т. е. очень мала.

Необходимо отметить, что для гауссова импульса с конечной шириной спектра (16) всё же появляется некоторое поле излучения на частоте третьей гармоники. Это видно из графиков на рисунке для коэффициента G_2', полученных путём численного вычисления тройного интеграла в (33) методом Монте-Карло в программируемой среде `Matlab`. Коэффициент G_2' был выбран, поскольку он определяет интенсивность генерируемого октупольного импульса в (44). Из рисунка также видно, что с увеличением ширины спектра исходного импульса (параметр $(l\omega)^{-1}$) наблюдается общий сдвиг спектра октупольной компоненты в область высоких частот, что может использоваться, например, для её выделения на фоне сильного начального дипольного импульса.

Заметим, что выводы, сделанные для электродипольных импульсов, будут применимы и к магнитнодипольным импульсам в силу симметрии между электрическим и магнитным полями в вакууме.

Заключение

Рассмотрен вопрос генерации нелинейных гармоник из-за самодействия поля дипольного электромагнитного импульса, эволюционирующего в свободном пространстве. Для этого используются известные нелинейные уравнения электромагнитного поля, учитывающие квантово-электродинамические эффекты в первом неисчезающем порядке по постоянной тонкой структуры в так называемом однопетлевом приближении. Показано, что периодический дипольный импульс не генерирует третью гармонику в вакууме. Невозможность сложения нескольких фотонов также следует из закона сохранения энергии-импульса для системы взаимодействующих фотонов. Тем не менее самодействие дипольного импульса приводит к появлению октупольной компоненты поля на исходной частоте, которая соответствует упругому рассеянию двух дипольных фотонов друг на друге, в результате чего появляется фотон с моментом импульса, равным трём, и исходной частотой.

Дальнейшее численное моделирование показало, что для реальных дипольных импульсов с конечной шириной спектра — например, гауссовых — всё же появляется отличная от нуля интенсивность на частоте третьей гармоники. Однако это явление не связано с генерацией импульса на частоте третьей гармоники и объясняется конечной шириной спектра исходного дипольного импульса. Стоит отметить, что для интенсивных дипольных импульсов, например, в присутствии сильного постоянного магнитного поля третья гармоника будет генерироваться, но силу этого эффекта ещё предстоит оценить. Третья гармоника также будет генерироваться при учёте в лагранжиане Гейзенберга-Эйлера членов шестого и более высоких порядков по полю [9].

Благодарности

Автор выражает признательность сотрудникам ФИАН А.В. Виноградову и И.А. Артюкову за содержательные дискуссии о свойствах дипольных импульсов.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. *Quantum Electrodynamics: Vol. 4*, 2nd Ed. (Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 1982).
[2] D.P. Sorokin. Fortschritte der Physik, **70** (7–8), 2200092 (2022). DOI: 10.1002/prop.202200092
[3] M.I. Vasiliev, V.I. Denisov, A.V. Kozar, P.A. Tomasi-Vshivtseva. Moscow University Physics Bulletin, **72**, 513 (2017). DOI: 10.3103/S0027134917060169
[4] A.E. Kaplan, Yu.J. Ding. Phys. Rev. A, **62** (4), 043805 (2000). DOI: 10.1103/PhysRevA.62.043805
[5] A. Fedotov, A. Ilderton, F. Karbstein, B. King, D. Seipt, H. Taya, G. Torgrimsson. Physics Reports, **1010**, 1 (2023). DOI: 10.1016/j.physrep.2023.01.003
[6] I.A. Artyukov, N.V. Dyachkov, R.M. Feshchenko, A.V. Vinogradov. Physica Scripta, **95** (6), 064006 (2020). DOI: 10.1088/1402-4896/ab848e
[7] R.M. Feshchenko, A.V. Vinogradov. J. Rus. Laser Research, **44** (3), 256 (2023). DOI: 10.1007/s10946-023-10130-0

[8] A.L. Rebenko, P.V. Malyshev. *Theory of Interacting Quantum Fields*, De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 39 (De Gruyter, Berlin, Germany, 2012). DOI: 10.1515/9783110250633
[9] A.M. Fedotov, N.B. Narozhny. Phys. Lett. A, **362** (1), 1 (2007). DOI: 10.1016/j.physleta.2006.09.085
[10] P.V. Sasorov, F. Pegoraro, T.Zh. Esirkepov, S.V. Bulanov. New J. Phys., **23** (10), 105003 (2021). DOI: 10.1088/1367-2630/ac28cb
[11] I. Gonoskov, A. Aiello, S. Heugel, G. Leuchs. Phys. Rev. A, **86** (5), 053836 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevA.86.053836