

01.1

Модель микровзрыва композитных капель углеводород–вода: точное решение

© И.В. Деревич, Д.И. Матюхина

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет), Москва, Россия
E-mail: DerevichIgor@bmstu.ru

Поступило в Редакцию 10 октября 2023 г.

В окончательной редакции 17 декабря 2023 г.

Принято к публикации 17 декабря 2023 г.

Представлено аналитическое решение задачи о прогреве композитной сферической капли, состоящей из микрокапли воды, расположенной в центре капли жидкого углеводорода, обтекаемого горячим потоком газа. На границе сред заданы условия сопряжения, на внешней границе — условие теплообмена. Нестационарная температура капли представляется разложением по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля. Результаты расчетов по полученной аналитической формуле удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Ключевые слова: композитное углеводородное топливо, собственные функции задачи Штурма–Лиувилля, собственные значения задачи Штурма–Лиувилля, условия сопряжения, сферические функции Бесселя.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.07.57465.19761

Эмульсии органического топлива и воды перспективны с точки зрения снижения выбросов экологически вредных веществ и увеличения эффективности диспергирования капель органического топлива в результате вскипания микрокапель воды, расположенных внутри капли углеводорода. Исследования композитных топлив проводятся экспериментальным и теоретическим путем [1–6].

В ряде работ [7–9] предложены простая математическая модель и приближенное решение задачи о прогреве капли композитного топлива. В этих работах капля представляется сферическим объемом тяжелого углеводорода (дизельного топлива), в центре которого расположена микрокапля воды. Задача решается в пренебрежении конвективным движением жидкости внутри неизотермической капли. Это упрощение справедливо для капель высоковязкого дизельного топлива диаметров меньше нескольких миллиметров.

Методика решения модельной задачи, предложенная в [7], является необоснованно громоздкой и труднопроизводимой. С точки зрения современных методов математической физики решение задачи получается стандартным разложением по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля. Кроме того, метод решения [7] обладает рядом принципиальных неточностей. Во-первых, в постановке задачи вместо граничного условия третьего рода, соответствующего условиям экспериментов, выставляется граничное условие первого рода. Во-вторых, некорректно описано распределение температуры в углеводороде. Уравнения Бесселя имеют два независимых решения: функция Бесселя первого рода, имеющая конечное значение в нуле, и второго рода с логарифмической расходимостью в нуле. В углеводороде в распределение температуры должны входить сфериче-

ские функции Бесселя как первого, так и второго рода. В-третьих, при корректном решении задачи получается аналитическая формула в виде ряда по собственным функциям, не требующая численного интегрирования по времени. В любой момент времени в любой точке капли значение температуры следует из формулы решения.

Цель настоящей работы — представить краткое изложение стандартного метода нахождения аналитического решения на основе разложения по системе ортогональных собственных функций.

На рис. 1, *a* показан эскиз задачи. Сферическая капля жидкого углеводорода (*Oil*) и расположенная в центре микрокапля воды (*Water*) с начальной температурой попадают в поток горячего газа с температурой Θ_G . В результате нагрева капли температура поверхности микрокапли воды за время t_{boil} достигает температуры кипения Θ_{Wboil} . На рис. 1, *b* показан пример расчета распределения температуры внутри композитной капли по аналитическому решению, описанному далее.

Для экспериментальных условий, с которыми проводится сопоставление результатов расчетов, вклад радиационного переноса тепла существенно меньше, чем конвективного, и в расчетах не учитывается. Уравнение для температуры композитной капли и начальное распределение температуры имеют вид

$$\rho c \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \lambda \Delta \Theta, \quad \Theta \Big|_{t=0} = \Theta_0. \quad (1)$$

Здесь ρ , c , λ — плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности композитной капли; температуру воды и углеводорода обозначаем как

$$\Theta(r, t) = \begin{cases} \Theta_W(r, t), & r < R_W, \\ \Theta_O(r, t), & R_W < r < R_O, \end{cases}$$

где R_W, R_O — радиусы капли воды и поверхности капли углеводорода; теплофизические свойства углеводорода и воды различны

$$\rho, c, \lambda = \begin{cases} \rho_W, c_W, \lambda_W, & r < R_W, \\ \rho_O, c_O, \lambda_O, & R_W < r < R_O. \end{cases}$$

На границе сред выполняются условия сопряжения (непрерывность температуры и теплового потока):

$$\Theta_W|_{r=R_W} = \Theta_O|_{r=R_W}, \quad -\lambda_W \frac{\partial \Theta_W}{\partial r}|_{r=R_W} = -\lambda_O \frac{\partial \Theta_O}{\partial r}|_{r=R_W}. \quad (2)$$

На поверхности капли ставится граничное условие конвективного теплообмена согласно гипотезе Ньютона. Учитывается, что тепло, переданное капле, расходуется на ее прогрев и на испарение жидкости с поверхности капли:

$$-\lambda_O \frac{\partial \Theta_O}{\partial r}|_{r=R_O} = \alpha_O \left(\Theta_O|_{r=R_O} - \Theta_G \right) - \rho_O \Delta H_O \frac{dR_O}{dt}. \quad (3)$$

Здесь α_O — коэффициент теплоотдачи при обтекании испаряющейся капли горячим газом [10], ΔH_O — энтальпия испарения.

В центре капли выставляется граничное условие симметрии

$$\frac{\partial \Theta_W}{\partial r}|_{r=0} = 0. \quad (4)$$

За время прогрева композитных капель до температуры кипения воды объем капли углеводорода за счет испарения меняется незначительно, и в дальнейшем радиус капли считается постоянным $dR_O/dt = 0$ [9].

Уравнение (1), условия сопряжения (2), граничное условие (3) без учета изменения объема капли и условие симметрии (4) приводятся к безразмерному виду. Безразмерные температуры воды и углеводорода равны $\Theta_W^* = (\Theta_W - \Theta_G)/\Theta_G$, $\Theta_O^* = (\Theta_O - \Theta_G)/\Theta_G$. Безразмерная координата равна $r^* = r/R_O$. Безразмерное время определяется как $t^* = \kappa_O t / R_O^2$ ($\kappa_O = \lambda_O / (\rho_O c_O)$ — коэффициент температуропроводности углеводорода). Далее звездочкой обозначены безразмерные переменные.

Решение задачи (1)–(4) в безразмерной форме ищем в виде ряда по сферическим функциям Бесселя нулевого порядка. В углеводороде в распределение температуры включены сферические функции Бесселя первого и второго рода, а в микрокапле воды — первого рода, которые автоматически удовлетворяют условию симметрии (4). Ставится задача Штурма–Лиувилля для расчета собственных функций и собственных значений оператора Лапласа с разрывным коэффициентом переноса. Из условий сопряжения определяется функциональный вид собственных функций.

Из граничного условия (3) следует характеристическое уравнение, из которого численно находятся собственные значения. На рис. 2, а показан вид функции $\Psi_O(\omega^*)$, корни которой ω_n^* являются собственными

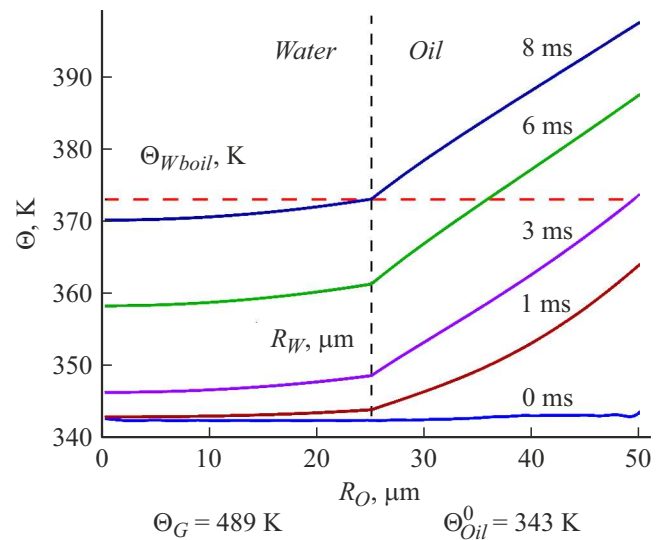
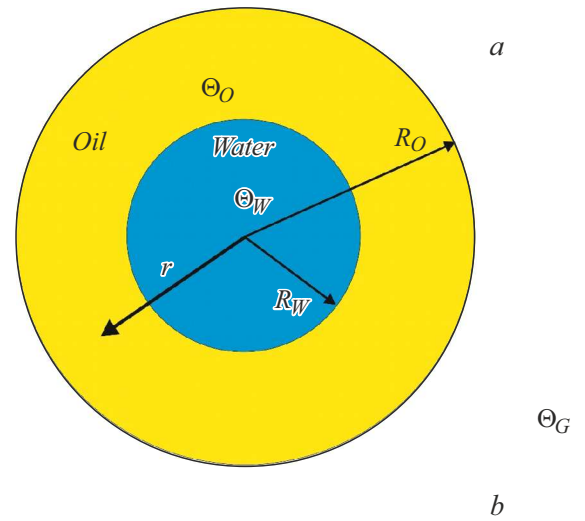


Рис. 1. Эскиз задачи (а) и пример динамики прогрева композитной капли (б).

значениями. Перелом собственных функций задачи на линии раздела сред (рис. 2, б) обусловлен различием в теплофизических свойствах воды и углеводорода. Динамику безразмерной температуры внутри композитной капли иллюстрирует рис. 1, б. Расчет проводится по аналитической формуле

$$\Theta^*(r^*, t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\omega_n^{*2} t^*) X_n^*(r^*), \quad (5)$$

где A_n — коэффициенты разложения, определяемые исходя из начального распределения температуры,

$$A_n = \frac{1}{\|X_n^*\|^2} \int_0^1 \rho^* c^* \Theta_0^*(r^*) X_n^*(r^*) r^{*2} dr^*,$$

$$\|X_n^*\|^2 = \int_0^1 \rho^* c^* X_n^{*2}(r^*) r^{*2} dr^*.$$

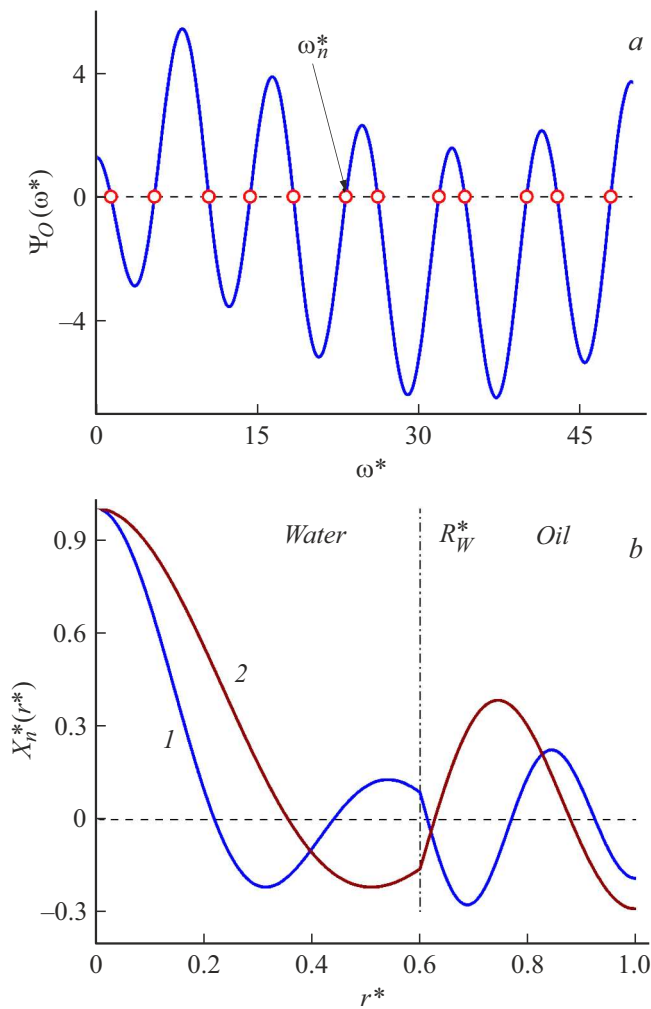


Рис. 2. *a* — иллюстрация решения характеристического уравнения. Точки показывают собственные значения ω_n^* , объемная доля воды $\chi_W = 22\%$. *b* — собственные функции $X_n^*(r^*)$ задачи Штурма–Лиувилля разных порядков: $n = 7$ (1) и 5 (2).

Здесь c^* , ρ^* — разрывные теплоемкость и плотность композитной капли, $\|X_n^*\|$ — норма собственной функции.

При расчетах задается диаметр капли углеводорода, диаметр микрокапли воды определяется исходя из величины объемной концентрации, указанной в экспериментах. Выставляются температура горячего газа, обтекающего каплю, скорость газа, начальная температура композитной капли. В безразмерных координатах из аналитической формулы находится момент времени достижения поверхностью микрокапли воды температуры кипения. Это время принимается за время ожидания микровзрыва.

В расчетах учитываются первые 31 член разложения (5) по собственным функциям. Увеличение числа членов ряда не приводит к существенному изменению результатов расчета.

В экспериментах [7–9,11] регистрируется время прогрева композитной капли до температуры начала кипения воды, которое принимается за время ожидания микровзрыва.

На рис. 3 представлены результаты расчетов времени прогрева поверхности микрокапли воды до температуры кипения по аналитической формуле (5). В качестве модельного углеводорода выбран *n*-додекан (*n*-dodecane $C_{12}H_{26}$ [7]). На рис. 3, *a* показано влияние начальной температуры композитных капель диаметром $50 < d_O < 200 \mu\text{m}$ на время прогрева до микровзрыва.

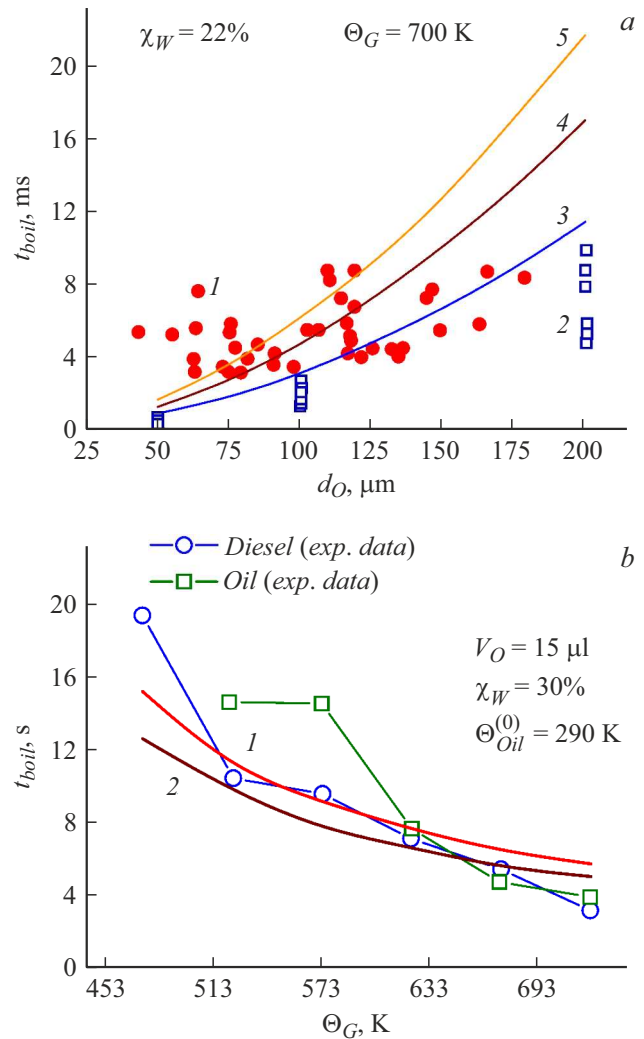


Рис. 3. Сопоставление результатов расчета времени прогрева капель композитного топлива с экспериментальными данными. *a* — влияние начальной температуры композитных капель диаметром $50 < d_O < 200 \mu\text{m}$ на время прогрева до микровзрыва. Точки 1 — экспериментальные данные [7,8], точки 2 — результаты расчетов по модели [7]. Кривые — результаты расчетов по формуле (5) при температуре капель $\Theta_{Oil}^0 = 363$ (3), 353 (4) и 343 К (5). *b* — зависимость времени t_{boil} для капель диаметром $d_O = 3 \text{ mm}$ от температуры газа Θ_G . Точки — экспериментальные данные [11], линии — расчет по формуле (5) при скоростях обтекающего газа $U_G = 1$ (1) и 2 м/с (2).

С ростом размера капли увеличивается доля радиационного переноса тепла, что сокращает время ожидания микровзрыва. Вследствие нелинейности граничного условия, учитывающего радиационный перенос тепла, получить замкнутое аналитическое решение в этом случае затруднительно. Поэтому при выводе аналитического решения перенос тепла за счет излучения не учитывается. Отметим, что это приближение используется в цитированных работах.

Из рис. 3, *a* видно, что результаты расчетов по модели [7] лежат существенно ниже экспериментальных данных. На рис. 3, *b* показано влияние температуры газа на время прогрева каплей диаметром $d_0 = 3 \text{ mm}$ (объем $V_0 \approx 15 \mu\text{l}$) потоком горячего газа. В экспериментах [11] скорость газа $U_G = 2 \text{ m/s}$.

В течение эксперимента капли подвешены на специально скрученных проволочках и сохраняют форму, близкую к сферической. Температура кипения н-додекана более 200°C . Расчеты показывают, что за время достижения микровзрыва температура поверхности углеводорода была не менее чем на 50°C ниже температуры кипения. Давление насыщенных паров тяжелого углеводорода при температуре поверхности капли низкое, и за время эксперимента уносом массы с поверхности за счет испарения можно пренебречь. Этот вывод подтверждается также оценками, представленными практически во всех цитированных работах. Слабое внутреннее конвективное движение высоковязкой жидкости регистрируется только в крупных каплях с размером более 3 mm [11]. В расчетах переносом тепла за счет внутренней конвекции вязкого н-додекана пренебрегается.

Таким образом, в работе представлено аналитическое решение задачи о прогреве капли композитного топлива углеводород–вода. На основе сопоставления с экспериментальными данными можно сделать вывод, что корректное решение задачи приводит к удовлетворительному согласию с экспериментом в отличие от результатов расчетов по модели [7] и не требует дополнительных эмпирических модификаций [8,9].

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-29-00243 (<https://rscf.ru/project/23-29-00243>).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Y. Morozumi, Y. Saito, *Energy Fuels*, **24**, 1854 (2010). DOI: 10.1021/ef9014026
- [2] A.M. Ithnin, H. Noge, H.A. Radir, W. Jazair, *J. Energy Inst.*, **87**, 273 (2014). DOI: 10.1016/j.joei.2014.04.002
- [3] D. Ogunkoya, S. Li, O.J. Rojas, T. Fang, *Appl. Energy*, **154**, 851 (2015). DOI: 10.1016/j.apenergy.2015.05.036
- [4] O.A. Elsanusi, M.M. Roy, M.S. Sidhu, *Appl. Energy*, **203**, 582 (2017). DOI: 10.1016/j.apenergy.2017.06.052
- [5] J. Shinjo, J. Xia, L.C. Ganippa, A. Megaritis, *Phys. Fluids*, **26**, 103302 (2014). DOI: 10.1063/1.4897918
- [6] S. Fostiropoulos, G. Strotos, N. Nikolopoulos, M. Gavaises, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **164**, 120581 (2021). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120581
- [7] S.S. Sazhin, O. Rybdylova, C. Crua, M. Heikal, M.A. Ismael, Z. Nissar, A. Rashid, B.A. Aziz, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **131**, 815 (2019). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.11.065
- [8] Z. Nissar, O. Rybdylova, S.S. Sazhin, M. Heikal, A. Rashid, B.A. Aziz, M.A. Ismael, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **149**, 119208 (2020). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.11.9208
- [9] S.S. Sazhin, T. Bar-Kohany, Z. Nissar, D. Antonov, P.A. Strizhak, O.D. Rybdylova, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **161**, 120238 (2020). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120238
- [10] B. Abramzon, W.A. Sirignano, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **32**, 1605 (1989). DOI: 10.1016/0017-9310(89)90043-4
- [11] D.V. Antonov, M.V. Piskunov, P.A. Strizhak, *Int. J. Thermal Sci.*, **142**, 30 (2019). DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2019.04.011