

Возбуждение гармонического осциллятора униполярными прямоугольными импульсами излучения

© Н.Н. Розанов

ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: nnrosanov@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2023 г.

В окончательной редакции 12.12.2023 г.

Принята к публикации 26.12.2023 г.

Проведен анализ возбуждения классического и квантового гармонического осцилляторов униполярными импульсами в прямоугольном временном профиле. Для квантового осциллятора определена вероятность возбуждения в зависимости от параметров задачи. Прослежен переход от случая предельно коротких импульсов, когда возбуждение определяется электрической площадью импульса, к длинным импульсам, для которых основным фактором служит энергия импульса. При этом найдено существенное отличие условий применимости приближения внезапных возмущений в случаях классического и квантового осцилляторов.

Ключевые слова: гармонический осциллятор, электрическая площадь импульса, униполярный импульс.

DOI: 10.61011/OS.2023.12.57406.133-23

Введение

Модель гармонического осциллятора, как классического, так и квантового, хорошо описывает целый ряд физических процессов, включая молекулярные колебания (если не возбуждены высокие колебательные уровни [1]). Для квантового осциллятора нерелятивистское уравнение Шредингера имеет точное решение, тесно связанное с решением классического уравнения движения, при произвольном виде внешней силы и временной зависимости частоты осциллятора (см. оригинальные статьи [2–6], содержание которых суммировано в монографии [7]). Результат, естественно, существенно зависит от вида временной зависимости этих величин.

В последнее время достигнут существенный прогресс в получении весьма коротких лазерных импульсов, отмеченный присуждением Нобелевских премий 1999 г. ([8], фемтосекундные длительности) и 2023 г. ([9], аттосекундные импульсы). Особый интерес, по нашему мнению, представляют предельно короткие униполярные или квазиуниполярные импульсы ввиду их однонаправленного (за всю длительность импульса) воздействия на электрические заряды (см. оригинальные статьи [10–16], обзоры [17–19] и главу в монографии [20]). Хотя некоторые свойства униполярных импульсов обсуждались уже более 60 лет тому назад [21], до сих пор продолжаются дискуссии о самой возможности существования таких импульсов [22,23]. При этом имеются убедительные, по нашему мнению, теоретические и экспериментальные свидетельства существования таких импульсов и их распространения в коаксиальных волноводах [20]. Остроту дискуссии снижает то, что не имеется существенных отличий воздействия на микрообъекты строго униполярного импульса и импульса с протяженным слабым

фронтом импульсов противоположной полярности и/или же пары далеко разнесенных униполярных импульсов с суммарной нулевой электрической площадью.

Целью настоящей работы служит анализ возбуждения гармонического осциллятора униполярным импульсом с прямоугольным временным профилем и сравнение классического и квантового описания такого возбуждения. Это позволит проследить переход от предельно коротких к более длительным импульсам. Отметим, что возбуждение квантового гармонического осциллятора рассматривалось на основе точного решения и решения в приближении внезапных возмущений [24,25] в большом числе работ [26–31]. Рассматриваемая в настоящей работе задача позволяет уточнить условия применимости приближения внезапных возмущений. Укажем также, что возможность управления формой и получения униполярных или квазиуниполярных импульсов с близким к прямоугольному временным профилем теоретически демонстрируется в работах [32–35].

Классический осциллятор

Уравнение движения классического гармонического осциллятора с единичной массой под действием внешней силы $f(t)$, которую можно отождествить с напряженностью электрического поля E , имеет вид

$$d^2x/dt^2 + \omega^2x = f(t). \quad (1)$$

Здесь x — смещение осциллятора относительно положения равновесия в отсутствие силы и ω — частота свободных осцилляций. До начала импульса внешней силы ($t < 0$) осциллятор находится в положении равновесия, $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = 0$.

Одиночный импульс с прямоугольным временным профилем с длительностью τ и амплитудой A обладает „площадью импульса“ (понимаемой как электрическая площадь) $S_f = \int f(t)dt = A\tau$ и энергией $W_f = A^2\tau$. Во время действия импульса ($0 < t < \tau$) решение (1) описывает гармоническое колебание около смещенного положения равновесия:

$$x(t) = \frac{A}{\omega^2} [1 - \cos(\omega t)] = 2 \frac{A}{\omega^2} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right). \quad (2)$$

К концу импульса $t = \tau$ осциллятор приобретает энергию

$$W = 2 \frac{A}{\omega^2} \sin^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right). \quad (3)$$

При фиксированной амплитуде силы A и увеличении длительности импульса τ энергия осциллятора периодически меняется между максимальным значением $W_{\max} = 2 \frac{A}{\omega^2}$ при $\tau = (N + \frac{1}{2}) T_{\text{osc}}$, где $T_{\text{osc}} = \frac{2\pi}{\omega}$ — период свободных колебаний осциллятора и N — целое число, и минимальным значением $W_{\min} = 0$, отвечающим полной остановке осциллятора в равновесном положении, при $\tau = NT_{\text{osc}}$. В терминах энергии импульса

$$W = 2 \frac{W_f}{\omega^2 \tau} \sin^2 \left(\frac{\omega \tau}{2} \right) = \frac{W_f}{\omega^2 \varphi} \sin^2 \varphi, \quad (4)$$

где $\varphi = \omega \tau / 2$. Экстремумы энергии осциллятора при фиксированной энергии импульса и увеличении его длительности достигаются при значениях φ , служащих решениями трансцендентного уравнения $\tan \varphi = 2\varphi$. Первый и главный максимум реализуется при $\varphi \approx 1.17$. Минимумы энергии $W_{\min} = 0$ вновь отвечают остановке осциллятора при $\tau = NT_{\text{osc}}$.

При импульсах с длительностью, много меньшей периода осциллятора,

$$\tau \ll T_{\text{osc}}, \quad (5)$$

его конечная энергия, как это видно из (3), полностью определяется электрической площадью импульса: $W = \frac{1}{2}(A\tau)^2 = \frac{1}{2}S_E^2$. Это отвечает приближению внезапных возмущений, когда импульс столь короток, что за его длительность положение осциллятора не успевает сместиться и весь эффект воздействия на него импульса сводится к передаче механического импульса, пропорционального электрической площади импульса. Примечательно, что при классическом описании условие (5) является единственным условием применимости приближения внезапных возмущений независимо от величины амплитуды или энергии возбуждающего импульса.

Аналогичным образом можно рассмотреть возбуждение осциллятора несколькими импульсами прямоугольной формы. Отличие состоит в изменении начальных условий для следующего импульса вследствие воздействия предыдущих импульсов.

Квантовый осциллятор

Уравнение Шредингера для квантового гармонического осциллятора, возбуждаемого внешней силой $f(t)$, для волновой функции $\psi(x, t)$ в атомной системе единиц (единичные заряд и масса электрона, $e = m = 1$, и приведенная постоянная Планка $\hbar = 1$) имеет вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \psi - f(x) \psi. \quad (6)$$

В (6) x — координата, а остальные обозначения соответствуют предыдущим.

В отсутствие внешней силы, до прихода импульса ($t \rightarrow -\infty$) и после его окончания ($t \rightarrow +\infty$), стационарные состояния свободного осциллятора описываются эквидистантным спектром энергии и волновыми функциями вида [7]

$$\psi_n(x, t) = \varphi_n(x) \exp \left[-i \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega t \right],$$

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \omega x^2 \right) H_n(\sqrt{\omega} x). \quad (7)$$

Здесь $n = 0, 1, 2, \dots$ — номер состояния и H_n — полиномы Эрмита. Во время действия импульса происходят переходы между этими уровнями. Вероятность перехода с уровня n на уровень m за всю длительность импульса дается выражением [7]

$$W_{mn} = \frac{n_{<}!}{n_{>}!} \nu^k (L_{n_{<}}^k)^2 \exp(-\nu), \quad (8)$$

где L_n^k — обобщенные полиномы Лагерра $n_{<} = \min(m, n)$, $n_{>} = \max(m, n)$ и $k = |n - m|$. В частности, вероятность сохранения осциллятора после импульса в основном состоянии W_{00} и его возбуждения W_{exc} равны

$$W_{00} = \exp(-\nu), \quad W_{\text{exc}} = 1 - W_{00} = 1 - \exp(-\nu). \quad (9)$$

Основным параметром в (8) и (9) служит безразмерная величина ν , зависящая от вида функции $f(t)$. Для прямоугольного импульса с указанными выше характеристиками

$$\nu = \nu_0 \left\{ 4 \sin^2 \frac{\omega \tau}{2} + \left[\frac{A}{\omega^2} \omega \tau + \left(1 - \frac{A}{\omega^2} \right) \sin(\omega \tau) \right]^2 \right\}, \quad (10)$$

где $\nu_0 = \frac{A^2}{2\omega^3}$. Для предельно коротких импульсов (условие (5)) в низшем приближении

$$\nu = \frac{(A\tau)^2}{2\omega} = \frac{S_f^2}{2\omega}. \quad (11)$$

Зависимость вероятности только от электрической площади импульса отвечает приближению внезапных возмущений.

При учете следующего члена разложения (10) по малому параметру $\omega\tau$

$$v = \frac{S_f^2}{2\omega} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{A}{\omega^2} \right) (\omega\tau)^2 \right]. \quad (12)$$

Поправочный член зависит уже не только от электрической площади импульса, но и от его длительности. Он мал при условии

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} + \frac{A}{\omega^2} \right) (\omega\tau)^2 \ll 1. \quad (13)$$

Неравенство (13) нарушается при достаточно больших амплитудах импульса, т.е. при больших смещениях среднего положения осциллятора A/ω^2 . Тогда требование малости длительности импульса (5) оказывается недостаточным для оправдания приближения внезапных возмущений. Физически это отвечает, что при больших амплитудах импульса за время его действия осциллятор смещается на заметные расстояния. При этом уже существенной оказывается неточность квантового осциллятора, который характеризуется пространственно распределенной волновой функцией, в отличие от точечного классического осциллятора. И это нарушает условия применимости приближения внезапных возмущений в случае квантового осциллятора.

Для импульсов с длительностью, заметно превосходящей период колебаний свободного осциллятора ($\omega\tau \gg 1$),

$$v = \frac{W_f^2}{2\omega^5}. \quad (14)$$

В этом случае степень возбуждения осциллятора определяется уже не электрической площадью импульса, а энергией этого импульса.

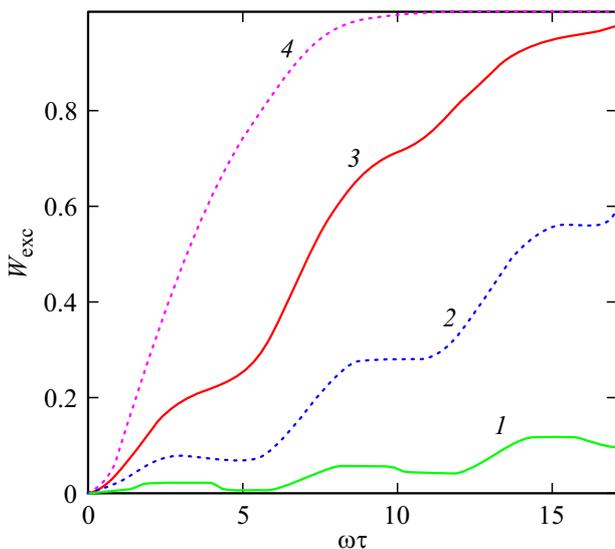


Рис. 1. Зависимость вероятности возбуждения осциллятора W_{exc} от длительности импульса возбуждения τ . Параметры: $\omega = 0.1$, $A = 0$ (кривая 1), 0.05 (2), 0.07 (3) и 0.1 (4).

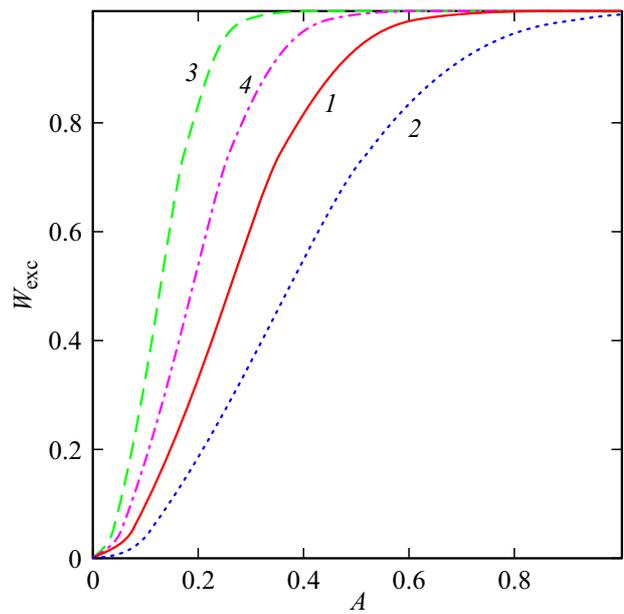


Рис. 2. Зависимость вероятности возбуждения осциллятора (точная (кривые 1 и 3) и в приближении внезапных возмущений (2, 4)) от амплитуды импульса возбуждения A при $\omega\tau = 0.1$ (1, 2) и 0.2 (3, 4).

На рис. 1 показана рассчитанная по формулам (9) и (10) вероятность возбуждения W_{exc} квантового осциллятора из его начального основного состояния от длительности импульса (точнее, от безразмерной величины $\omega\tau$, имеющей смысл „числа периодов“ свободных колебаний осциллятора на протяжении импульса) при различных значениях параметра A/ω^2 . Как и в случае классического осциллятора, эта зависимость не периодическая. „Квантовым“ отличием служит то обстоятельство, что теперь минимумы не опускаются до нулевого уровня, что должно было бы происходить в рамках приближения внезапных возмущений (за исключением тривиального случая $\omega\tau = 0$). Видно также, что с ростом амплитуды импульса A вероятность возбуждения приближается к единичной. Эти результаты подтверждают возможность создания инверсии населенностей уровней при накачке предельно короткими импульсами.

Рисунок 2 иллюстрирует сравнение „точного“ выражения для вероятности возбуждения и его аналога в приближении внезапных возмущений. Различие имеет количественный характер и проявляется для промежуточных значений амплитуды импульса. Это обстоятельство позволяет определить область применения указанного приближения.

Обсуждение и выводы

Таким образом, если для справедливости приближения внезапных возмущений в случае классического осциллятора достаточно выполнения требования малой

длительности импульса возмущения по сравнению с характерным периодом осциллятора, то для квантового осциллятора дополнительно возникает ограничение на амплитуду возмущения. Вместе это сводится к требованию малости изменения потенциальной энергии осциллятора за время действия импульса. Различие условий применимости приближения для классического и квантового осцилляторов связано с тем, что первый является точечным, а второй — пространственно распределенным. Представляется, что этот вывод справедлив и для других объектов, моделируемых гармоническими осцилляторами.

Другим выводом, также имеющим общий характер, служит переход (в качестве основного фактора эффективности возбуждения) от электрической площади импульса при его малых длительностях к энергии этого импульса для более длительных импульсов. Эти выводы получены вне рамок теории возмущений, что расширяет область их применимости.

Финансирование работы

Исследование поддержано грантом Российского научного фонда 23-12-00012 (раздел о квантовом осцилляторе) и Государственным заданием ФТИ им. А.Ф. Иоффе, тема 0040-2019-0017 (сравнение результатов для классического и квантового осцилляторов).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Приложение. Вывод формулы (10)

Используем обозначения [7] и метод решения уравнения Шредингера, изложенный там, применительно к рассматриваемому импульсу прямоугольной формы с амплитудой A и длительностью τ . Для этого вернемся к уравнению движения классического осциллятора (1), заменив в нем x на η , для функции $f(t) = A$ при $0 < t < \tau$ и 0 вне этого временного интервала. При этом положим, что при $t < 0$ $\eta = \exp(i\omega t)$. На интервале $(0, \tau)$ решением уравнения $d^2\eta/dt^2 + \omega^2\eta = A$ служит выражение

$$\eta(t) = \frac{A}{\omega^2} + \exp(i\omega t) - \frac{A}{\omega^2} \cos(\omega t). \quad (\text{A1})$$

Теперь находим величину d :

$$d = \frac{iA}{\sqrt{2\omega}} \int_0^\tau \eta(t) dt = \frac{A}{\sqrt{2}\omega^{3/2}} \left\{ -2 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} + i \left[\frac{A}{\omega^2} \omega\tau + \left(1 - \frac{A}{\omega^2} \right) \sin(\omega\tau) \right] \right\}. \quad (\text{A2})$$

Наконец, вычисление $\nu = |d|^2$ приводит нас к выражению (10).

Список литературы

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (Наука, М., 1974). [L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Quantum Mechanics* (Pergamon, NY, 1974)].
- [2] R.P. Feynman. *Phys. Rev.*, **84**, 108 (1951).
- [3] J. Schwinger. *Phys. Rev.*, **91**, 728 (1953).
- [4] K. Husimi. *Prog. Theor. Phys.*, **9**, 381 (1953).
- [5] В.С. Попов, А.М. Переломов. *ЖЭТФ*, **56**, 13375 (1969).
- [6] В.С. Попов, А.М. Переломов. *ЖЭТФ*, **57**, 1544 (1969).
- [7] А.И. Базь, Я.Б. Зельдович, А.М. Переломов. *Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (Наука, М., 1971). [A.I. Baz, Ya.B. Zel'dovich, A.M. Perelomov. *Scattering, Reactions, and Decay in Non-Relativistic Quantum Mechanics* (IPST, 1969), (Nauka, M., 1971)].
- [8] Электронный ресурс. <https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1999/summary/>
- [9] Электронный ресурс. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2023/summary/>
- [10] D. Dimitrovski, E. A. Solov'ev, J. S. Briggs. *Phys. Rev. Lett.*, **93**, 083003 (2004).
- [11] D. Dimitrovski, E. A. Solov'ev, J. S. Briggs. *Phys. Rev. A*, **72**, 043411 (2005).
- [12] Н.Н. Розанов. *Опт. и спектр.*, **124** (1), 75–77 (2018). [N.N. Rosanov. *Opt. Spectrosc.*, **124**, 72 (2018)].
- [13] N. Rosanov, D. Tumakov, M. Arkhipov, R. Arkhipov. *Phys. Rev. A*, **104** (6), 063101 (2021).
- [14] Н.Н. Розанов, Н.В. Высотина. *ЖЭТФ*, **157**, 63 (2020). [N.N. Rosanov, N.V. Vysotina. *JETP*, **130**, 52 (2020)].
- [15] I.A. Aleksandrov, D.A. Tumakov, A. Kudlis, V.M. Shabaev, N.N. Rosanov. *Phys. Rev. A*, **102**, 023102 (2020).
- [16] N. Rosanov, D. Tumakov, M. Arkhipov, R. Arkhipov. *Phys. Rev. A*, **104** (6), 063101 (2021).
- [17] Н.Н. Розанов, Р.М. Архипов, М.В. Архипов. *УФН*, **188**, 1347 (2018). [N.N. Rosanov, R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov. *Phys. Usp.*, **61**, 1227 (2018)].
- [18] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, Н.Н. Розанов. *Квант. электрон.*, **50**, 801 (2020). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, N.N. Rosanov. *Quantum Electronics*, **50**, 801 (2020)].
- [19] R.M. Arkhipov, M. Arkhipov, A. Pakhomov, I. Babushkin, N. Rosanov. *Las. Phys. Lett.*, **19**, 043001 (2022).
- [20] Н.Н. Розанов, М.В. Архипов, Р.М. Архипов, А.В. Пахомов. В монографии *Терагерцовая фотоника* (РАН, М., 2023), с. 360–393.
- [21] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics* (J. Wiley, New York–London, 1962). [Дж. Джексон. *Классическая электродинамика* (Мир, М., 1965)].
- [22] Р.М. Фещенко. *ЖЭТФ*, **163**, 461–462 (2023). [R.M. Feshchenko. *JETP*, **136**, 256–257 (2023)].
- [23] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, Н.Н. Розанов. *ЖЭТФ*, **164** (12), 906–907 (2023). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, N.N. Rosanov. *JETP*, **137** (12), (2023)].
- [24] Л. Шифф. *Квантовая механика* (ИИЛ, М., 1959).
- [25] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (Наука, М., 1974).
- [26] R.M. Arkhipov, A.V. Pakhomov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov. *Opt. Lett.*, **44** (5), 1202–1205 (2019).
- [27] V.A. Astapenko. *Appl. Phys. B*, **126**, 110 (2020).
- [28] В.А. Астапенко, Ф.Б. Розми, Е.В. Сахно. *ЖЭТФ*, **160** (2), 155–166 (2021).

- [29] R. Arkhipov, A. Pakhomov, M. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov. *Sci. Rep.*, **11**, 1961 (2021).
- [30] A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov, R. Arkhipov. *Phys. Rev. A*, **105**, 043103 (2022).
- [31] V.A. Astapenko, T.K. Bergaliev. *J. Opt.*, **25**, 115502 (2023).
- [32] E. Ilyakov, B.V. Shishkin, E.S. Efimenko, S.B. Bodrov, M.I. Bakunov. *Optics Express*, **30**, 14978 (2022).
- [33] R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, P.A. Belov, Yu.A. Tolmachev, I. Babushkin. *Laser Phys. Lett.*, **13**, 046001 (2016).
- [34] Liqiang Feng, J. McCain, Yan Qiao. *Laser Phys.*, **31**, 055301 (2021).
- [35] A.S. Kuratov, A.V. Brantov, Y.F. Kovalev, Y.Yu. Bychenkov. *Phys. Rev. E*, **106**, 035201 (2022).