

Точность и особенности применения методов определения ускорения по спектру сигнала лазерного автодина в присутствии нелинейных эффектов, обусловленных внешней оптической обратной связью

© М.Г. Инкин, Д.А. Яковлев, С.Ю. Добдин, А.В. Скрипаль

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия
e-mail: sunbeam18.95@mail.ru

Поступило в Редакцию 24 января 2024 г.

В окончательной редакции 24 января 2024 г.

Принято к публикации 24 января 2024 г.

Рассмотрены два метода оценки параметров движения при микросмещениях, основанные на анализе спектра Фурье сигнала лазерного автодина и использующие особенности спектров интерференционных сигналов от равноускоренно движущихся объектов и возможность аппроксимации таких спектров простой функцией, выражаемой через интегралы Френеля. На основе результатов численного моделирования оценены возможности применения этих методов в условиях существенного влияния на сигнал автодина внешней оптической обратной связи, изменяющей условия генерации лазерного диода, и значительной зашумленности сигнала, свойственной автодинным интерферометрам на лазерных диодах. Исследовано влияние внешней обратной связи на спектр интерференционного сигнала автодинного интерферометра при движении отражателя с ускорением. Показано, что характер изменения спектров фрагментов сигнала с увеличением уровня обратной связи позволяет использовать рассматриваемые методы даже при относительно высоких уровнях обратной связи. Для обоих методов выявлены условия достижения хорошей точности оценок параметров движения, касающиеся выбора анализируемых фрагментов сигнала.

Ключевые слова: лазерная интерферометрия, лазерный автодин, преобразование Фурье, интегралы Френеля, измерение ускорения, спектр автодинного сигнала, обратная оптическая связь.

DOI: 10.61011/JTF.2024.03.57385.13-24

Введение

Методы измерения ускорения при микросмещениях на основе электрических сигналов, возникающих при деформации микрообъектов и структур на их основе, обладают низкой разрешающей способностью [1,2]. Более высоким разрешением обладают лазерные интерференционные и спекл-системы, поскольку изменяющаяся при микросмещениях фаза лазерного излучения чувствительна к нанометровым деформациям и смещениям. Созданы микроэлектромеханические преобразователи ускорения с оптическим узлом считывания на основе двухканального интерферометра Фабри-Перо [3], интерферометра Майкельсона [4,5], одновременно трех лазерных интерферометров [6]. Достижения в области лазерной интерферометрии ускорения связаны с применением интерферометра со стандартом оптической длины волны на базе Nd: YAG-лазера бегущей волны с внутрирезонаторным удвоением частоты излучения и системой стабилизации по резонансам насыщенного поглощения в молекулярном иоде [7,8]. Для измерения ускорения с погрешностью не хуже $10 \mu\text{m/s}^2$ может быть использован лазерный интерферометр, предназначенный для измерения массовой скорости конденсированных веществ в ударно-волновых экспериментах в области физики высоких плотностей энергии [9].

Лазерные автодинные системы обладают важным преимуществом по сравнению с двухлучевыми интерферометрами, поскольку позволяют создавать компактные измерительные датчики, значительно упрощают оптическую схему измерительной системы и оказываются востребованными в МЭМС интегральных датчиках [10–12].

Известны различные методы анализа автодинного сигнала при движениях микрообъектов с ускорением, такие как метод минимизации невязки между квадратами отклонений экспериментальных и теоретических величин автодинного сигнала [13,14], спектральные методы анализа формы автодинного сигнала [15].

В работе [13] показана возможность измерения ускорения при неравномерно ускоренных микроперемещениях объекта величиной от $50 \mu\text{m/s}^2$ и выше. Вид функции движения отражателя с ускорением может быть также восстановлен с помощью методов вейвлет-преобразования [14].

В работе [16] предложен метод определения ускорения по спектру автодинного сигнала, основанный на анализе его дискретного спектра Фурье. В работе посредством численного моделирования было показано, что спектры интерференционного сигнала при движении отражателя с ускорением во многих случаях имеют характерную трапециевидную форму с хорошо выраженным плато и что по боковым участкам трапециевидного спектра с хорошей точностью могут быть

определены скорости движения отражателя в моменты времени, соответствующие началу и концу анализируемого фрагмента сигнала. Теоретическое обоснование этого метода и критерии его применимости представлены в настоящей работе. Также в настоящей работе предлагается более общий и точный, хотя и более вычислительно затратный альтернативный метод определения параметров движения с ускорением по спектрам интерференционного сигнала. Оба метода описаны в разд. 2. Основной же целью настоящей работы явилась оценка применимости этих методов в условиях модуляции частоты излучения лазерного автодина за счет внешней оптической обратной связи при уровнях модуляции, соответствующих режимам очень слабой и слабой обратной связи (разд. 1, 3 и 4).

1. Влияние внешней обратной связи на сигнал автодинного интерферометра на основе лазерного диода

Сигнал автодинного интерферометра на основе лазерного диода регистрируется с помощью фотоприемника, на который падает излучение, выходящее с задней грани лазерного диода (рис. 1, *a*). Когда автодинный интерферометр работает в обычном интерферометрическом режиме, регистрируемое излучение может рассматриваться как суперпозиция опорной волны — волны,

испускаемой диодом с его задней грани, — и предметной волны — волны, которая получается в результате отражения света, испускаемого диодом с фронтальной грани, от внешнего отражателя (предмета) и прохождения отраженного света через резонатор диода, без учета какого-либо влияния предметной волны на опорную. В этом случае зависимость нормированной переменной (интерференционной) составляющей сигнала интерферометра от времени t при движении внешнего отражателя может быть представлена в виде:

$$P(t) = \cos(\omega_0 \tau(t)), \tag{1}$$

где ω_0 — круговая частота излучения лазера, а τ — время обхода предметной волной расстояния от фронтальной грани диода до отражателя и обратно. Такой режим реализуется, если интенсивность предметной волны при ее прохождении через резонатор диода является очень малой. В этом случае очень малой является и интерференционная составляющая регистрируемого сигнала, что часто делает этот режим неподходящим для измерений. Практически более интересными являются режимы очень слабой и слабой внешней оптической обратной связи. При увеличении интенсивности предметной волны ее присутствие в резонаторе диода приводит к изменению условий генерации, влекущему за собой модуляцию частоты лазерного излучения. Эффект изменения частоты излучения лазерного диода при попадании в его резонатор излучения, отраженного от внешнего отражателя, с хорошей точностью описывается с помощью модели Ланга–Кобаяши [17]. Согласно этой модели, круговая частота излучения диода ω в указанных условиях зависит от τ и может быть найдена из уравнения

$$\omega_0 \tau = \omega \tau + C_B \cdot \sin(\omega \tau + \arctg \alpha), \tag{2}$$

где α — коэффициент уширения линии генерации, C_B — параметр, называемый уровнем внешней оптической обратной связи, и ω_0 — частота излучения диода в отсутствие внешней оптической обратной связи (т.е. при $C_B = 0$). Временная зависимость нормированной переменной составляющей сигнала интерферометра в этом случае может быть выражена следующим образом:

$$P(t) = \cos(\omega(\tau(t))\tau(t)) \tag{3}$$

(изменение частоты генерации лазерного диода за время τ считается пренебрежимо малым, что в обычных условиях вполне оправдано). На рис. 1, *b, c* приведены примеры, показывающие характер и степень изменения сигнала $P(t)$ с увеличением уровня обратной связи для случаев равномерного (рис. 1, *b*) и равноускоренного (рис. 1, *c*) движения отражателя. Режим работы автодинного интерферометра при $C_B \leq 0.1$ принято называть режимом очень слабой обратной связи, а при $0.1 < C_B < 1$ — режимом слабой обратной связи [18]. Обычный интерференционный режим (1) реализуется

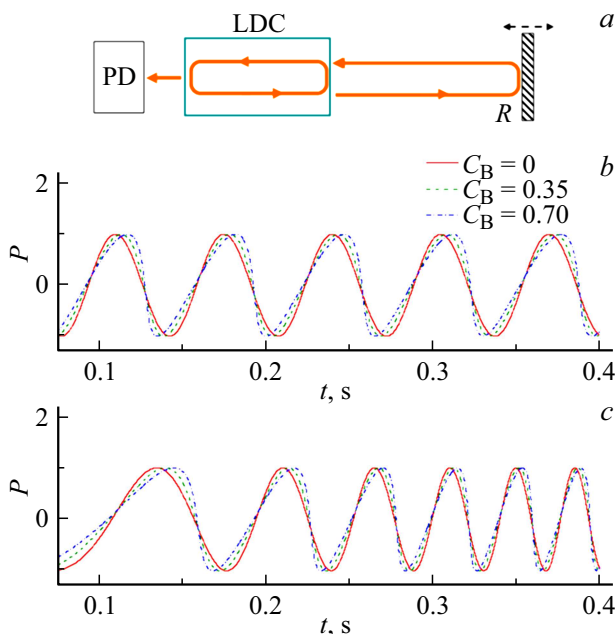


Рис. 1. *a* — условная схема автодинного интерферометра: LDC — резонатор лазерного диода, *R* — внешний отражатель (характеризуемый объект), PD — фотоприемник; *b, c* — изменение формы сигнала автодинного интерферометра с увеличением уровня обратной связи при равномерном (*b*) и равноускоренном (*c*) движении внешнего отражателя. C_B — уровень внешней оптической обратной связи.

при $C_B \approx 0$, когда амплитуда модуляции частоты излучения становится пренебрежимо малой.

В разд. 2 представляются два метода оценки параметров движения отражателя, основанные на анализе спектров Фурье фрагментов автодинного сигнала, соответствующих фазам равноускоренного движения отражателя. В этих методах используются особенности спектров автодинного сигнала, характерные для обычного интерференционного режима. Далее на основе результатов численного моделирования оцениваются возможности применения этих методов при работе интерферометра в режимах очень слабой и слабой обратной связи.

2. Спектральные методы оценки параметров движения отражателя

Остановимся кратко на теоретических основах методов оценки параметров движения, рассматриваемых в настоящей работе.

Сначала уточним смысл некоторых понятий, касающихся дискретных спектров сигнала, в котором они используются в настоящей работе. Пусть $\{P(t_{sl})\}$ — выборка значений сигнала $P(t)$, соответствующих N значениям времени в пределах интервала $[t_1, t_2]$:

$$t_{sl} = t_1 + Tl/N, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad T = t_2 - t_1.$$

Будем считать N четным и достаточно большим, чтобы рассчитанный по данной выборке спектр позволял адекватно воспроизвести форму сигнала на интервале $[t_1, t_2]$. Под амплитудным спектром фрагмента $[t_1, t_2]$ сигнала по данной выборке мы будем понимать множество $\{\mathbf{b}_k\}$ точек $\mathbf{b}_k = (v_k, B_k)$, где v_k — частоты гармоник дискретного спектра Фурье,

$$v_k = \frac{k}{T}, \quad k = 0, 1, \dots, N/2, \quad (4)$$

а B_k — амплитуды гармоник дискретного спектра, выражаемые через коэффициенты ряда Фурье, представляющего значения $P(t)$ рассматриваемой выборки

$$P(t_{sl}) = c_0 + \sum_{k=1}^{N/2} \left[c_k \cos \left(2\pi k \frac{l}{N} \right) + s_k \sin \left(2\pi k \frac{l}{N} \right) \right], \quad (5)$$

следующим образом:

$$B_0 = c_0, \quad B_k = \sqrt{c_k^2 + s_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Коэффициенты ряда (5) могут быть рассчитаны с наименьшими вычислительными затратами с помощью методов быстрого преобразования Фурье. Также в качестве амплитудных характеристик дискретного спектра мы будем рассматривать величины

$$V_k = B_k T, \quad k = 1, 2, \dots, N/2 - 1. \quad (6)$$

Идеальный нормированный автодинный сигнал в условиях отсутствия эффекта обратной связи может быть выражен следующим образом:

$$P(t) = \cos \left[\theta_0 + \frac{4\pi}{\lambda_0} \int_0^t v(t') dt' \right], \quad (7)$$

где $v(t)$ — мгновенная скорость отражателя. Допустим, что в течение интервала времени $t_1 \leq t \leq t_2$ отражатель движется с постоянным ускорением a , при этом скорость

$$v(t) = v(t_1) + a \cdot (t - t_1) \quad (8)$$

не меняет знак. Подставив (8) в (7), представим $P(t)$ на интервале $[t_1, t_2]$ в виде

$$P(t) = \cos \left[\theta_1 + \frac{4\pi}{\lambda_0} \left(v(t_1) \cdot (t - t_1) + \frac{a \cdot (t - t_1)^2}{2} \right) \right], \quad (9)$$

где

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{4\pi}{\lambda_0} \int_0^{t_1} v(t') dt'.$$

Представив сигнал в виде $P(t) = \cos \psi(t)$, обозначим через h число циклов в приращении фазы ψ на интервале $[t_1, t_2]$:

$$h = \frac{\psi(t_2) - \psi(t_1)}{2\pi}. \quad (10)$$

Во всех примерах ниже интервал $[t_1, t_2]$ выбирался так, чтобы h было целым числом, и все приведенные численные оценки, касающиеся точности, соответствуют именно такому правилу выбора анализируемого фрагмента сигнала. На практике следование этому правилу не создает сложностей: например, и t_1 , и t_2 выбираются соответствующими локальным максимумам сигнала ($\cos \theta_1 = 1$), или, скажем, нулевым значениям сигнала ($\cos \theta_1 = 0$) на участках с одинаковым знаком производной dP/dt .

Исследуя свойства функции

$$\tilde{f}_P(t_1, t_2, v) = \int_{t_1}^{t_2} P(t) \exp(-i2\pi vt) dt$$

с функцией $P(t)$ вида (9), можно найти, что в случаях, когда ни скорость $v(t_1)$, ни скорость $v(t_2)$ не очень близки к нулю, а точнее при выполнении условия

$$\frac{\min\{|v(t_1)|, |v(t_2)|\}}{\lambda_0} > 2.2\sqrt{a\lambda}, \quad (11)$$

где

$$a\lambda = \frac{|a|}{\lambda_0},$$

приведенные амплитуды гармоник дискретного спектра V_k (6) могут быть приближенно выражены следующим образом:

$$V_k \approx KJ(v_k), \quad (12)$$

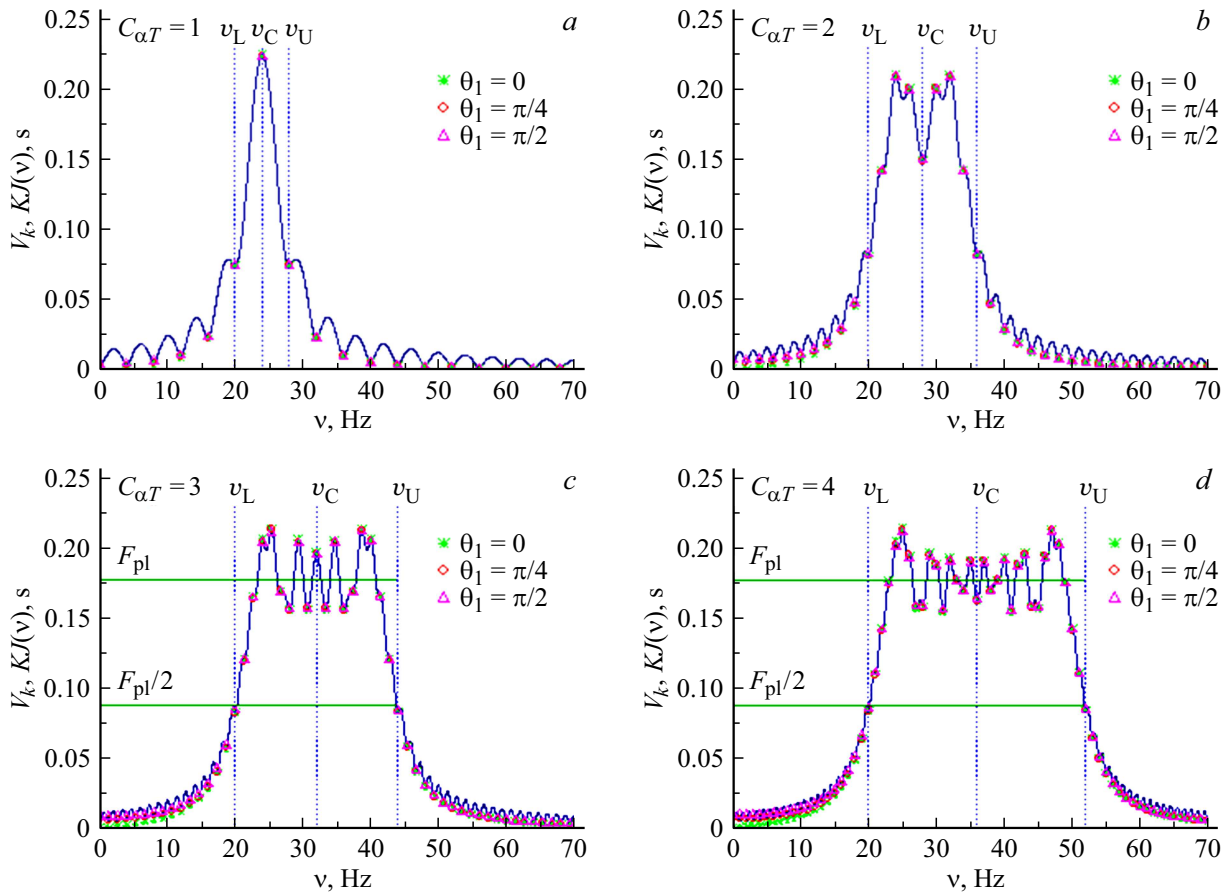


Рис. 2. Дискретные спектры Фурье фрагментов сигнала вида (9) и соответствующие аппроксимирующие кривые $KJ(\nu)$. Значения приведенных амплитуд V_k дискретных спектров, рассчитанных при различных значениях фазы θ_1 , показаны символами, а спектры $KJ(\nu)$ — сплошной линией. Исходные данные указаны в тексте.

где

$$K = \frac{1}{2\sqrt{a_\lambda}}, \tag{13}$$

а

$$J(\nu) = J_F(a_\lambda, \nu_L, \nu_U, \nu) = \sqrt{\left[C\left(\frac{\nu_U - \nu}{\sqrt{a_\lambda}}\right) - C\left(\frac{\nu_L - \nu}{\sqrt{a_\lambda}}\right) \right]^2 + \left[S\left(\frac{\nu_U - \nu}{\sqrt{a_\lambda}}\right) - S\left(\frac{\nu_L - \nu}{\sqrt{a_\lambda}}\right) \right]^2}, \tag{14}$$

где

$$C(u) = \int_0^u \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau, \\ S(u) = \int_0^u \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau^2\right) d\tau$$

— интегралы Френеля, а ν_L и ν_U — характеристические граничные частоты спектра, определяемые как

$$\nu_L = \min\{|\nu_1|, |\nu_2|\}, \quad \nu_U = \max\{|\nu_1|, |\nu_2|\},$$

где

$$\nu_1 = \frac{2\nu(t_1)}{\lambda_0}, \quad \nu_2 = \frac{2\nu(t_2)}{\lambda_0}.$$

Частоты ν_L и ν_U ограничивают область локализации наиболее значимых гармоник рассматриваемого спектра. Это хорошо видно из примеров на рис. 2. На этом рисунке показаны спектры фрагментов сигнала разной длительности. Расчет во всех случаях проводился при $a/\lambda_0 = 16 \text{ s}^{-2}$, $t_1 = 0$, $\nu(t_1)/\lambda_0 = 10 \text{ s}^{-1}$. Значения t_2 были взяты следующими: 0.25 (a), 0.5 (b), 0.75 (c) и 1 s (d). В данных примерах $\nu_L = \nu_1 = 20 \text{ Hz}$. Через ν_L условие (11) может быть переформулировано как

$$\nu_L > 4.4\sqrt{a_\lambda}. \tag{15}$$

В рассматриваемых примерах $\nu_L = 5\sqrt{a_\lambda}$, т.е. условие (15) удовлетворяется. На рис. 2 показаны амплитуды V_k , рассчитанные при трех значениях фазы θ_1 , 0, $\pi/4$ и $\pi/2$, и кривые $KJ(\nu_k)$. Как видно из приведенных графиков, аппроксимация (12) во всех рассмотренных случаях является хорошей в основной части спектра сигнала и его высокочастотной периферийной части. В низкочастотной периферийной части с уменьшением

частоты ν точность приближения (12) несколько ухудшается.

Обратим внимание на то, что функция $J(\nu)$ является симметричной относительно $\nu = \nu_C$, где $\nu_C = (\nu_L + \nu_U)/2$, в том смысле, что при любом $\Delta\nu$

$$J(\nu_C + \Delta\nu) = J(\nu_C - \Delta\nu).$$

При равноускоренном движении выполняется соотношение

$$\nu_C = \frac{h}{T} \quad (16)$$

(см. (10)) и, если h является целым, гармоника с номером h дискретного спектра будет иметь частоту, равную ν_C , как это видно из (4) и (16). Это является одним из преимуществ выбора h целым. В этом случае при хорошей точности приближения (12) должны выполняться соотношения

$$V_{h+j} \approx V_{h-j} \quad j = 1, 2, \dots \quad (17)$$

(рис. 2). Симметрия дискретного спектра в смысле выполнения соотношений (17) может рассматриваться в качестве одного из показателей применимости приближения (12).

Спектры сигнала, показанные на рис. 2, *c, d*, имеют характерную трапециевидную форму с хорошо выраженным плато. Такую форму спектры имеют при значениях параметра

$$C_{aT} = \sqrt{a_\lambda T}$$

около 3 и больших. Значение параметра C_{aT} с точностью до масштаба определяет форму спектра $J(\nu)$ (характер изменения спектров с увеличением C_{aT} можно оценить из рис. 2). При $C_{aT} \geq 3$ на плато значения $J(\nu)$ колеблются вокруг значения $\sqrt{2}$, а значения $J(\nu_L)$ и $J(\nu_U)$ ($J(\nu_U) = J(\nu_L)$) — приблизительно в два раза меньше, чем $\sqrt{2}$, при этом справедлива следующая приближенная оценка:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\pi C_{aT}} \leq J(\nu_L), J(\nu_U) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\pi C_{aT}}.$$

Уровень плато F_{pl} на спектрах $KJ(\nu)$, представленных на рис. 2, *c, d*, и уровень $F_{pl}/2$ показаны на этих рисунках горизонтальными линиями. Как видно из этих рисунков, значения $KJ(\nu_L)$ и $KJ(\nu_U)$ в обоих случаях близки к $F_{pl}/2$, что полностью согласуется со сказанным выше относительно спектров $J(\nu)$. Указанные особенности трапециевидных спектров $J(\nu)$ с протяженным плато, используются в первом из рассматриваемых спектральных методов оценки параметров движения, который мы условно назовем МН1.

2.1. Метод МН1

В этом методе для нахождения скоростей $\nu(t_1)$ и $\nu(t_2)$ используются оценки ν_U или ν_L , получаемые

следующим образом. Обозначим V_k^e значения амплитуд V_k экспериментального спектра сигнала. В данном методе значения V_k^e используются в качестве оценок значений $KJ(\nu_k)$ (см. (12)). Оценка F_{pl}^e уровня плато F_{pl} получается как среднее по амплитудам V_k^e некоторого числа гармоник, приходящихся на плато:

$$F_{pl}^e = \frac{1}{n_A} \sum_{k=h-\Delta n_A}^{h+\Delta n_A} V_k^e,$$

где $n_A = 2\Delta n_A + 1$ — число гармоник, по которым проводится усреднение. Далее с использованием линейной интерполяции по значениям V_k^e , как значение ν , при котором $KJ(\nu) = F_{pl}^e/2$, находится оценка ν_U и/или ν_L . Например, в качестве оценки ν_U используется значение ν_{Ue} , рассчитываемое по формуле

$$\nu_{Ue} = \nu_j + \frac{(\nu_{j+1} - \nu_j) \left(\frac{F_{pl}^e}{2} - V_j^e \right)}{V_{j+1}^e - V_j^e},$$

где j и $j+1$ — номера гармоник, приходящихся на высокочастотную боковую сторону трапециевидного спектра и отвечающих условию

$$V_j^e > \frac{F_{pl}^e}{2} > V_{j+1}^e.$$

Подобный метод оценки скоростей $\nu(t_1)$ и $\nu(t_2)$ был ранее предложен в работе [16] на основе результатов численных экспериментов. Сказанное выше относительно спектров сигнала может рассматриваться в качестве теоретического обоснования метода [16], а метод МН1 — как усовершенствованный вариант метода [16].

Как ясно из сказанного выше, метод МН1 применим, если для анализируемого фрагмента сигнала удовлетворяется условие $C_{aT} \geq 3$, что является серьезным ограничением. Второй метод, который мы условно назвали МГ1, более универсален — он применим и при существенно меньших C_{aT} , вплоть до значений порядка единицы.

2.2. Метод МГ1

По сути, данный метод сводится к нахождению значений параметров функции $J_F(a_\lambda, \nu_L, \nu_U, \nu)$ (см. (14)), при которых аппроксимация

$$V_k^e \approx KJ_F(a_\lambda, \nu_L, \nu_U, \nu_k)$$

(ср. (12)) для заданного диапазона частот \mathbf{W} является наилучшей. В данном случае параметр K рассматривается не как величина, выражаемая формулой (13), а просто как некоторый коэффициент пропорциональности. Условия задачи, а именно тот факт, что значение $\nu_C = (\nu_L + \nu_U)/2$ и время T являются известными, позволяют ее решать, рассматривая в качестве независимой переменной лишь один из параметров, a_λ , ν_L или ν_U ,

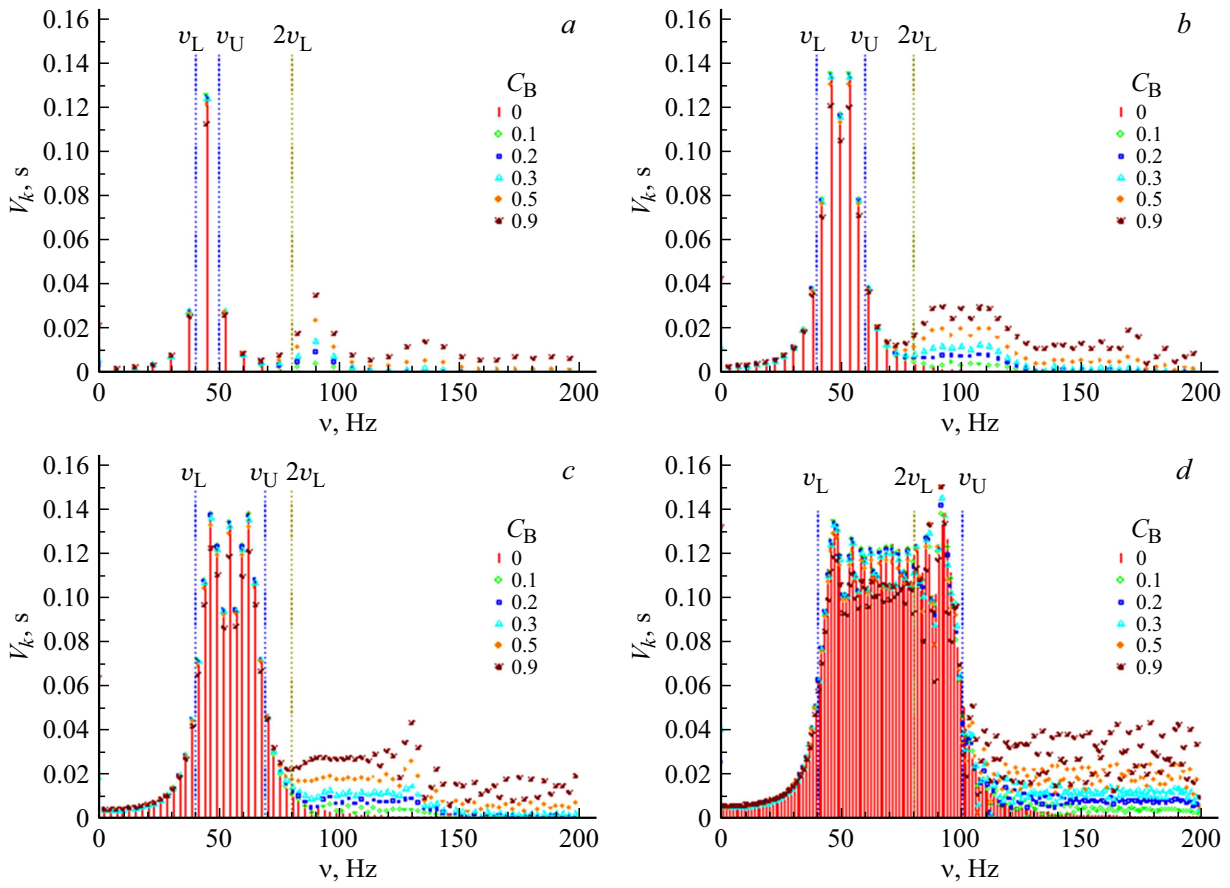


Рис. 3. Спектры автодинного сигнала при различной длительности анализируемого фрагмента сигнала и разных значениях коэффициента обратной связи C_B . Амплитуды гармоник спектра Фурье при $C_B = 0$ показаны столбиками, при других значениях C_B — символами. Спектры соответствуют одной и той же стадии движения отражателя, но рассчитаны для временных интервалов (t_1, t_2) разной продолжительности. Значение t_1 во всех случаях одинаково. Скорость движения отражателя в момент времени $t = t_1$ такова, что $\nu_1 \approx 40$ Hz. Значения t_2 выбраны так, чтобы число циклов колебаний сигнала на интервале (t_1, t_2) было целым, а ν_2 приблизительно равнялось 50 (a), 60 (b), 70 (c) и 100 Hz (d). Расчеты проводились при $a = 25 \mu\text{m/s}^2$ и $\lambda_0 = 0.65 \mu\text{m}$. В данном случае $\nu_L = \nu_1$, $\nu_U = \nu_2$.

поскольку два других могут быть выражены через этот параметр и известные ν_C и T . Удобно выбрать в качестве такой независимой переменной ν_U . Однопараметрическое семейство кривых, на котором ищется решение задачи, представим функцией

$$g(\nu_U, \nu) = J_F(a_\lambda(\nu_U), \nu_L(\nu_U), \nu_U, \nu), \quad (18)$$

где ν_L и a_λ рассчитываются по формулам

$$\nu_L = 2\nu_C - \nu_U, \quad a_\lambda = \frac{\nu_U - \nu_C}{T}. \quad (19)$$

Диапазон частот \mathbf{W} может задаваться (и задавался в численных тестах, представленных ниже) как под-область некоторой области \mathbf{W}_0 $[\nu_{\text{inf}}, \nu_{\text{sup}}]$ с заданными границами так, чтобы в диапазон \mathbf{W} попадали все гармоники, удовлетворяющие условию

$$V_k^c \geq c_{LV} V_{\text{max}},$$

где V_{max} — значение наибольшего элемента множества $\{V_k^c\}$, а c_{LV} — задаваемый параметр, определяющий

предельный уровень значимости гармоник (в расчетных тестах к настоящей работе использовались значения c_{LV} в диапазоне от 0.05 до 0.3), и это условие удовлетворялось для граничных гармоник, попадающих в область \mathbf{W} . Частоты этих граничных гармоник, ν_l и ν_m ($\nu_l < \nu_m$) будем рассматривать в качестве границ диапазона \mathbf{W} . Математически поиск решения сводится к поиску значения ν_U , при котором достигается глобальный минимум функции

$$s(\nu_U) = 1 - \frac{\mathbf{g}(\nu_U)^T \mathbf{V}_W^c}{\|\mathbf{g}(\nu_U)\| \|\mathbf{V}_W^c\|}, \quad (20)$$

где \mathbf{V}_W^c и $\mathbf{g}(\nu_U)$ — вектор-столбец амплитуд гармоник экспериментального спектра V_k^c и вектор-столбец значений $g(\nu_U, \nu)$ соответственно,

$$\mathbf{V}_W^c = \begin{pmatrix} V_l^c \\ V_{l+1}^c \\ \vdots \\ V_m^c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(\nu_U) = \begin{pmatrix} g(\nu_U, \nu_l) \\ g(\nu_U, \nu_{l+1}) \\ \vdots \\ g(\nu_U, \nu_m) \end{pmatrix}.$$

Символ T в (20) обозначает транспонирование; $|\mathbf{V}_W^e|$ и $|\mathbf{g}|$ — длины векторов \mathbf{V}_W^e и \mathbf{g} , рассчитываемые как

$$|\mathbf{V}_W^e| = \sqrt{\mathbf{V}_W^{eT} \mathbf{V}_W^e}, \quad |\mathbf{g}| = \sqrt{\mathbf{g}^T \mathbf{g}}.$$

При идеальной аппроксимации (строгое равенство в (18)) векторы \mathbf{V}_U^e и $\mathbf{g}(v_U)$ параллельны и $s(v_U) = 0$. Вид экспериментального спектра позволяет задать область поиска искомого значения v_U относительно узкой, что дает возможность очень быстро находить решение.

3. Оценка точности методов

Одной из задач настоящей работы явилась оценка точности определения параметров движения отражателя при использовании двух представленных методов при различных степенях проявления эффекта обратной связи. В качестве основной характеристики точности метода рассматривалась относительная погрешность определения ускорения $\delta_{(a)}$, которая рассчитывалась как

$$\delta_{(a)} = \frac{|a_{\lambda(t)} - a_{\lambda(e)}|}{|a_{\lambda(t)}|} \cdot 100\%,$$

где $a_{\lambda(t)}$ — истинное значение параметра a_{λ} , а $a_{\lambda(e)}$ — значение a_{λ} , полученное с помощью рассматриваемого метода. Значения $a_{\lambda(e)}$ рассчитывались по формуле (19) с использованием найденной рассматриваемым методом оценки v_U . Так как точность оценки ускорения для обоих методов зависит от формы исходного спектра, а форма спектра в значительной степени определяется величиной параметра C_{aT} (рис. 2), для каждого из методов были получены зависимости максимального уровня $\delta_{(a)\max}$ погрешности $\delta_{(a)}$, достигаемого при заданном C_{aT} , от величины C_{aT} для случаев незашумленного и зашумленного сигнала. Для задания зашумленного сигнала использовалось следующее представление:

$$P(t) = P_p(t) + P_{\text{Noise}} \Delta_l,$$

где $P_p(t)$ — функция, описывающая регулярную составляющую сигнала, значения которой рассчитывались по формуле (9), P_{Noise} — параметр, характеризующий уровень шума, а Δ_l — гауссовская случайная переменная с нулевым средним и единичной дисперсией.

При использовании метода МН1 уровень плато определялся усреднением по пяти гармоникам.

4. Результаты и обсуждение

На рис. 3 показаны спектры фрагментов разной длительности незашумленных автодинных сигналов, рассчитанных в соответствии с (2) и (3) при разных значениях коэффициента обратной связи C_B в диапазоне от 0 до 0.9, соответствующих режимам очень слабой и слабой обратной связи. Во всех случаях рассматриваемые фрагменты отвечают условию (15), в силу чего

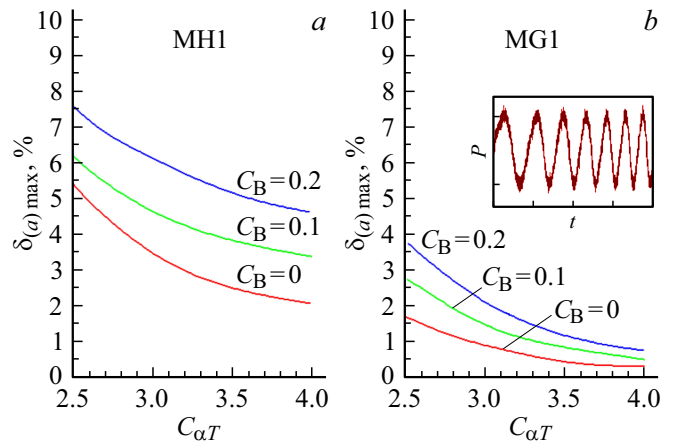


Рис. 4. Уровень максимальной относительной погрешности определения ускорения отражателя методами МН1 (а) и МГ1 (б) по фрагментам зашумленного ($P_{\text{Noise}} = 0.1$) автодинного сигнала при значениях параметра обратной связи C_B 0, 0.1 и 0.2.

спектры, соответствующие $C_B = 0$ (амплитуды гармоник для этого случая показаны столбиками), являются почти идеально симметричными и в полной мере подходят для применения приближения (12). Спектры для $C_B = 0.1$ и $C_B = 0.2$ заметно отличаются от спектров для случая $C_B = 0$ лишь небольшим подъемом амплитуд гармоник в области $\nu \geq 2\nu_L$. Причем в случаях, показанных на рис. 3, а–с, изменения почти не затрагивают основную часть спектра сигнала, поскольку в этих случаях основная часть спектра лежит за пределами области $\nu \geq 2\nu_L$. В случае, представленном на рис. 3, d, край основной части спектра попадает в область $\nu \geq 2\nu_L$, но как при $C_B = 0.1$, так и при $C_B = 0.2$ изменения спектра на этом краю являются не очень значительными. Такой характер изменений спектра, обусловленных эффектом обратной связи, при $C_B \leq 0.2$, позволяет ожидать, что точность оценок параметров движения при использовании обоих рассматриваемых спектральных методов будет не сильно хуже, чем в случае $C_B = 0$. Результаты численных экспериментов подтвердили оправданность этих ожиданий. На рис. 4 представлены полученные оценки максимального уровня погрешности определения ускорения методами МН1 (а) и МГ1 (б) по спектрам сигнала с уровнем шумов $P_{\text{Noise}} = 0.1$ (вид сигнала при такой степени зашумленности показан на вставке рис. 4, б) при $C_B = 0.1$ и 0.2. Данные оценки получены в результате обработки спектров более 6800 фрагментов сигналов в случае метода МГ1 и более 4700 фрагментов в случае метода МН1 при значениях ускорения 25 и $50 \mu\text{m/s}^2$ ($\lambda_0 = 0.65 \mu\text{m}$) и начальных скоростей $v(t_1)$ в диапазоне от 5.6 до $40 \mu\text{m/s}$. Как видно из рис. 4, погрешность определения ускорения для обоих методов уменьшается с увеличением C_{aT} . При этом при любом заданном C_{aT} в области применимости метода МН1 ($C_{aT} > 2.5$), точность МГ1 оказалась значительно более высокой, чем точность МН1. При расчетах методом

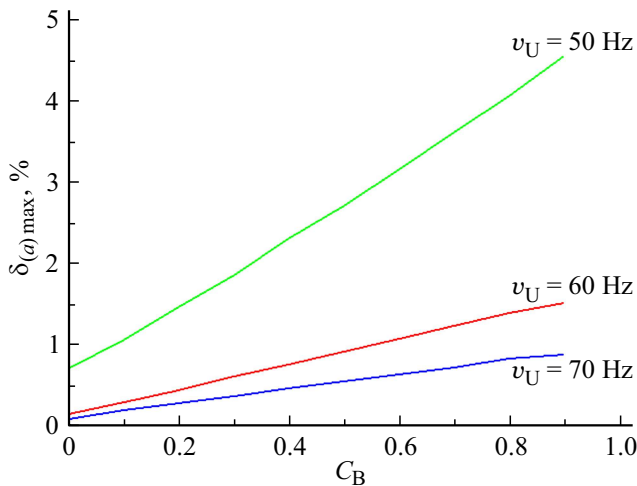


Рис. 5. Оценки относительной погрешности определения ускорения отражателя методом MG1 с $\nu_{\text{sup}} = \nu_{\text{BL}}$.

MG1 в указанном диапазоне использовались следующие значения вычислительных параметров, определяющих диапазон подгонки \mathbf{W} : $\nu_{\text{inf}} = 0$, $\nu_{\text{sup}} = 200$ Hz, $c_{LV} = 0.2$. В отличие от МН1 метод MG1 применим для анализа фрагментов сигнала, для которых значение C_{aT} попадает в диапазон от 1 до 2.3. Однако, как показали вычисления, для достижения хорошей точности в диапазоне $1 < C_{aT} < 1.8$, значение c_{LV} следует уменьшить. Для этого поддиапазона нами использовалось значение $c_{LV} = 0.1$, что обеспечило уровень точности, показанный на рис. 4, *b*. Расчеты показали, что не существует значений c_{LV} , при которых высокая точность оценок достигалась бы во всей рассматриваемой области $1 < C_{aT} < 4$, т.е. изменение c_{LV} при переходе от одного поддиапазона к другому является неизбежным. Заметим, что при скоростях $v(t_1)$, близких к заданной нижней границе, и выбранных значениях ускорения условие (11) сильно нарушается, но и при таких начальных скоростях полученные оценки ускорения оказались вполне адекватными. Таким образом, численный эксперимент показал применимость методов МН1 и MG1 при малых значениях C ($C_B \leq 0.2$), причем даже в более общих условиях, чем те, что определены соотношением (11).

Как показали вычисления, характер изменения спектров фрагментов сигнала с увеличением C_B позволяет успешно использовать метод MG1 и при $0.2 < C_B \leq 0.9$. Как уже было отмечено, основные изменения в спектрах с повышением уровня обратной связи происходят в области $\nu \geq 2\nu_L$. Такой характер изменений можно объяснить, исходя из того факта, что при гармоническом исходном (соответствующем $C_B = 0$) сигнале (см. рис. 1, *b* для равномерного движения отражателя) увеличение C_B практически не нарушает периодичности сигнала, т.е. приводит к появлению только таких значимых гармоник, частота которых кратна частоте исходного сигнала. При ускоренном движении, как это видно из рис. 3, с увеличением

C_B область локализации гармоник сигнала, связанных с эффектом обратной связи, начинает охватывать также небольшую переходную область, прилегающую к области $\nu \geq 2\nu_L$. Обозначим нижнюю границу этого диапазона ν_{BL} . В примерах на рис. 3 ν_{BL} составляет приблизительно 75 Hz, тогда как $2\nu_L = 80$ Hz. В области $\nu < \nu_{\text{BL}}$ форма спектра при увеличении C_B остается приблизительно такой же, как при $C_B = 0$. Это позволяет использовать для оценки ускорения в ситуациях, когда $\nu_U < 2\nu_L$ (как на рис. 3, *a–c*), метод MG1 с $\nu_{\text{sup}} = \nu_{\text{BL}}$, т.е. задавая область подгонки \mathbf{W} за пределами области $\nu > \nu_{\text{BL}}$. Кривые зависимости погрешности определения ускорения $\delta_{(a)}$ от C_B для интервалов движения отражателя, которым соответствуют спектры, представленные на рис. 3, *a* ($\nu_U = 50$ Hz), *b* ($\nu_U = 60$ Hz) и *c* ($\nu_U = 70$ Hz), при таком варианте расчета приведены на рис. 5. Данные, представленные на этом рисунке, получены для незашумленных сигналов. В расчетах с уровнем шумов $P_{\text{Noise}} = 0.1$ погрешность δ_a увеличивалась приблизительно на 0.5% в случаях $\nu_U = 60$ и 70 Hz и на 0.5–1% в случае $\nu_U = 50$ Hz.

Заключение

Таким образом, проведенный анализ и представленные данные показывают, что оба рассматриваемых спектральных метода определения параметров движения отражателя по сигналу лазерного автодина могут быть успешно использованы в условиях существенной модуляции частоты излучения, обусловленной прохождением предметной волны через резонатор лазерного диода, метод МН1 — при уровнях обратной связи $C_B \leq 0.2$, метод MG1 — при уровнях обратной связи $C_B \leq 0.9$. При применении второго метода в режимах с $C_B > 0.2$ для достижения хорошей точности анализируемые фрагменты сигнала должны выбираться достаточно короткими, чтобы основная часть спектра сигнала приходилась на частоты, меньшие удвоенной нижней характеристической граничной частоты ν_L . Это позволяет минимизировать влияния внешней обратной связи на форму спектра в его основной части, по которой определяются параметры движения.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] С.Х. Пайн, В.В. Калугин, Е.С. Кочурина. Известия вуз. Электроника, **28** (4), 452 (2023). DOI: 10.24151/1561-5405-2023-28-4-452-460
- [2] F. Levinzon. *Piezoelectric Accelerometers with Integral Electronics* (Springer International Publishing, NY., 2015)
- [3] В.И. Бусурин, В.В. Коробков, К.А. Коробков, Н.А. Кошеварова. Измерительная техника, **11**, 34 (2020). DOI: 10.32446/0368-1025it.2020-11-34-41

- [4] E.B. Cooper, E.R. Post, S. Griffith, J. Levitan, S.R. Manalis, M.A. Schmidt. *Appl. Phys. Lett.*, **76** (22), 3316 (2000). DOI: 10.1063/1.126637
- [5] H.J. von Martens, A. Täubner, W. Wabinski, A. Link, H.J. Schlaak. *Measurement*, **28** (1), 3 (2000). DOI: 10.1016/S0263-2241(00)00003-8
- [6] A. Umeda, M. Onoe, K. Sakata, T. Fukushima, K. Kanari, H. Iio, T. Kobayashi. *Sensors and Actuators A: Physical*, **114** (1), 93 (2004). DOI: 10.1016/j.sna.2004.03.011
- [7] И.А. Бунин, Е.Н. Калиш, Д.А. Носов, М.Г. Смирнов, Ю.Ф. Стусь. *Автометрия*, **46** (5), 90 (2010).
- [8] Л.Ф. Витушкин, О.А. Орлов, А. Джермак, Д. Д'Агостино. *Измерительная техника*, **3**, 3 (2012).
- [9] А.П. Кузнецов, С.А. Колесников, А.А. Голубев, К.Л. Губский, С.В. Дудин, А.В. Канцырев, В.И. Туртиков, А.В. Уткин, В.В. Якушев. *Приборы и техника эксперимента*, **3**, 116 (2011).
- [10] D. Guo, H. Jiang, L. Shi, M. Wang. *IEEE Photon. J.*, **10** (1), 6800609 (2018). DOI: 10.1109/JPHOT.2018.2792447
- [11] Y.J. Du, T.T. Yang, D.D. Gong, Y.C. Wang, X.Y. Sun, F. Qin, G. Dai. *Sensors*, **18** (7), 2055 (2018). DOI: 10.3390/s18072055
- [12] Е.А. Мокров, А.А. Папко. *Нано- и микросистемная техника*, **1**, 3 (2002).
- [13] Д.А. Усанов, А.В. Скрипаль, Е.О. Кашавцев, С.Ю. Добдин. *ЖТФ*, **83** (7), 156 (2013).
- [14] О.И. Чанилов, Д.А. Усанов, А.В. Скрипаль, А.С. Камышанский. *Письма в ЖТФ*, **31** (21), 9 (2005).
- [15] Д.А. Усанов, А.В. Скрипаль. *Полупроводниковые лазерные автодины для измерения параметров движения при микро- и наносмещениях* (Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 2014)
- [16] А.В. Скрипаль, С.Ю. Добдин, А.В. Джафаров, К.А. Садчикова, И.А. Чернецова. *Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Физика*, **19** (4), 279 (2019). DOI: 10.18500/1817-3020-2019-19-4-279-287
- [17] R. Lang, K. Kobayashi. *IEEE J. Quantum Electron*, **16** (3), 347 (1980). DOI: 10.1109/JQE.1980.1070479
- [18] G. Giuliani, M. Norgia, S. Donati, T. Bosch. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, **4** (6), 283 (2002). DOI: 10.1088/1464-4258/4/6/371