05

Влияние пространственной дисперсии на плазмоны вдоль листов графена

© М.В. Давидович

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,
410012 Саратов, Россия
e-mail: davidovichmv@info.sgu.ru

Поступило в Редакцию 21 декабря 2023 г.
В окончательной редакции 21 декабря 2023 г.
Принято к публикации 21 декабря 2023 г.

С учетом пространственной дисперсии и тензорной проводимости графена получены дисперсионные уравнения плазмонов вдоль одиночных листов графена и двух листов, в том числе и расположенных на подложке. Предложен метод определения дисперсионного уравнения для произвольного числа листов и слоев. Для медленных плазмонов при большом расстоянии между листами уравнения распадаются на два для одиночных листов. При приведении тензора проводимости к диагональному виду уравнения упрощаются, а при движении плазмона вдоль одной из осей распадаются уравнения для E-плазмонов и H-плазмонов, совпадающие с известными уравнениями для скалярной проводимости. Рассмотрены и численно исследованы плазмоны вплоть до оптических частот, выявлено влияние пространственной дисперсии.

Ключевые слова: графен, многослойные структуры, плазмоны, проводимость Кубо–Гринвуда, метод функций Грина.

DOI: 10.61011/JTF.2024.03.57376.312-23

Введение

Поверхностные плазмоны (ПП) или плазмон-поляритоны вдоль одиночных листов графена исследовались в работах [1,2], а также и вдоль двух листов графена в работе [3], а затем в [4]. При этом графен был рассмотрен в пренебрежении пространственной дисперсией (ПД) как $2D$-материал со скалярной поверхностной проводимостью, что справедливо при не очень больших замедлениях (компонентах волновых векторов) и также при достаточно низких частотах. Обычно рассматривают ПП до THz-диапазона включительно. Однако в ИК, оптическом и особенно в УФ диапазонах ПД следует учитывать, и соответственно учитывать тензорную проводимость графена, зависящую от волнового вектора. В сильных полях следует учитывать нелинейные свойства графена и плазмон-поляритонов в нем [5]. По ПП в графене имеются обзоры [6–8], в которых графен описан скалярной проводимостью. В ряде работ рассмотрены многослойные структуры с графеном и метаповерхности [7–12]. Влияние слабой ПД на ПП в графене рассмотрено работе [13] на основе метода диадных функций Грина (ФГ) и интегралов типа Зоммерфельда. Показано, что ПД существенны выше THz-диапазона.

В настоящей работе мы обобщаем подход работы [13] на многослойные структуры с листами графена в нескольких плоскостях, рассматривая линейную проводимость графена как линейный отклик на касательное электрическое поле, и соответственно ищем линейные электромагнитные волны (ПП) вдоль поверхностей путем решения дисперсионных уравнений (ДУ). При этом ван-дер-ваальсовыми и другими взаимодействиями между листами графена и подложками мы пренебрегаем, т. е. используем модель проводимости „взвешенного“ графена в вакууме. При отсутствии подложек эта модель справедлива при расстояниях между листами графена, существенно превышающих характерный размер 0.335 nm, для бислоя графена и α-графита. В противном случае дисперсия в графене существенно изменяется [14,15]. Среди ПП важными являются медленные волны, затухающие от поверхностей, т. е. имеющие поверхностный характер. Кроме них возможны быстрые вытекающие (антиповерхностные по классификации работы [16]) волны, которые излучаются под углом вытекания к поверхности [17]. Диссипация приводит к смене недиссипативной поверхностной волны на диссипативную поверхностную вытекающую волну, причем строго на частоте отсечки, на которой волна идет со скоростью света и без диссипации, а вся ее энергии распространяется в вакууме. При этом втекающая волна выше отсечки становится вытекающей ниже нее [16,17]. В бесконечной волноведущей структуре поля таких волн нарастали бы при удалении от поверхности [16]. Проводимость графена комплексная, поэтому и ПП являются комплексными диссипативными. Для таких волн интересна возможность существования ветвей с обратными ПП, которые не определяются отрицательной аномальной дисперсией, т. е. наличием падающего участка на дисперсионной ветви $\omega = \omega(k')$: $\partial_k\omega(k') < 0$, где k' — какая-либо реальная часть из компонент (k_x, k_y) волнового вектора $k = k' - ik''$ [17]. Именно обратные ПП определяются отрицательным знаком величины $k'(\omega)k''(\omega)$, что эквивалентно движению энергии (затуханию) противоположно движению фазы.

Более сложный путь определения обратных ПП — определение вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$. Условие $\mathbf{Sk} < 0$ эквивалентно $\mathbf{k}'(\omega)\mathbf{k}''(\omega) < 0$. Интересны слабо затухающие вдоль движения по поверхности медленные поверхностные ПП. Их можно возбуждать лазерными пучками и электронными потоками, причем в последнем случае на взаимодействии ПП с пучком можно создавать усилители бегущей волны типа ЛБВ [18], начиная с THz-диапазона, где замедление ПП уже существенное. Дополнительное усиление в THz-диапазоне можно обеспечивать лазерной накачкой, создавая отрицательную дифференциальную проводимость графена путем облучения лазером с оптической частотой накачки [9,19]. Таким образом, исследуемые в работе структуры с ПП важны для ряда приложений. В частности, оптически активные (накачанные) структуры могут быть использованы как антенны (излучатели) вытекающих волн и элементы активных устройств генерации и усиления волн. В работах [7–12,19–28] и ряде других рассмотрены ПП в гетероструктурах и метаповерхностях с графеном, в том числе и в гиперболических метаматериалах и метаповерхностях [29–34]. Важным при этом является учет диссипации [35–42], поскольку она определяет максимальное замедление. Для графена наиболее строгий учет ПД требует интегрирования по всей зоне Бриллюэна [24]. Это, в частности, приводит к существенному изменению диэлектрической проницаемости (ДП) и дисперсии объемных ПП в многослойном графене [23,24], а также в метаматериалах на основе графена.

1. Постановка задачи и модель

Мы рассматриваем одиночный лист графена и двойной лист графена с расстоянием $d \gg 0.335\,\mathrm{nm}$ между ними. На меньшем расстоянии имеет место взаимодействие Ван-дер-Ваальса, зонная структура графена изменяется, возникает малая энергетическая щель, и бислой графена следует описывать поверхностной проводимостью, соответствующей измененной зонной структуре [14,15]. Для общности мы рассматриваем листы в бесконечной идеальной прозрачной среде с ДП ε, и тогда вакууму соответствует случай $\varepsilon = 1$. Другой рассматриваемый случай — листы расположены на подложке толщины d. Тонкую подложку толщины $d \ll \lambda/\sqrt{\varepsilon_d}$ можно приближенно учесть на основе двусторонних граничных условий, вводя поверхностную проводимость $\sigma_d = i\omega\varepsilon_0(\tilde{\varepsilon}-1)d = \sigma_d = ik_0 d\eta_0(\tilde{\varepsilon}-1)$, $\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$. Действительно, подложка описывается объемной плотностью тока поляризации $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon-1)[\mathbf{x}_0 E_x(\mathbf{r}) + \mathbf{y}_0 E_y(\mathbf{r}) + \mathbf{z}_0 E_z(\mathbf{r})]$. Пренебрегая компонентой $E_z(\mathbf{r})$ и усредняя, можно ввести поверхностную проводимость тонкого диэлектрического слоя $\sigma_d(\omega) = i\xi_d\eta_0$. Это позволяет упростить задачу, используя функцию Грина (ФГ) $G(\mathbf{r}) = (4\pi r)^{-1}\exp(-ik_0 r)$, $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Для однородных подложек и многослойных структур можно применить метод матриц переноса. Учет ПД требует использования матриц переноса четвертого порядка. В работе в общем случае многослойных структур с однородными слоями развит такой подход на основе матриц переноса четвертого порядка. Модель состоит в выражении поверхностной плотности тока каждого слоя через касательное электрическое поле $\mathbf{J}_n(\omega, \mathbf{k}) = \hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}_\tau(\omega, \mathbf{k}, z_n)$ и в сшивании полей на границах раздела. Волна предполагается плоской, структуры бесконечными по x, y, так что везде использованы спектральные амплитуды. ДУ принимают вид нелинейных трансцендентных уравнений, поиск корней которых выполняется итерационно и приводит к зависимостям $\mathbf{k} = \mathbf{f}(\omega)$.

2. Внутризонная проводимость графена

Кристаллическая структура графена определяется векторами трансляции $\mathbf{e}_1 = (\sqrt{3}a/2, -a/2)$, $\mathbf{e}_2 = (0, a)$ и соответствующими векторами обратной решетки $\mathbf{g}_1\big(4\pi/(\sqrt{3}a), \big)$, $\mathbf{g}_2 = \big(2\pi/(\sqrt{3}a), 2\pi/a\big)$. Зонная структура графена получена путем диагонализации гамильтониана в приближении сильной связи и приведена в ряде работ [43–51]. Тензорная динамическая поверхностная проводимость графена связывает поверхностную плотность тока $\mathbf{J}(\omega, \mathbf{k})$ с касательным (индекс τ) электрическим полем плоской волны $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}_\tau - ik_z z)$: $\mathbf{J}(\omega, \mathbf{k}) = \hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}_\tau(\omega, \mathbf{k})$. Она есть сумма внутризонной и межзонной частей: $\hat{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) = \hat{\sigma}^{\mathrm{intra}}(\omega, \mathbf{k}) + +\hat{\sigma}^{\mathrm{inter}}(\omega, \mathbf{k})$, $\mathbf{r}_\tau = x\mathbf{x}_0 + y\mathbf{y}_0$, $\mathbf{k} = k_x\mathbf{x}_0 + k_y\mathbf{y}_0$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ [1,43,44]. Здесь $\mathbf{E}_\tau(\omega, \mathbf{r}_\tau) = \mathbf{z}_0\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})\mathbf{z}_0$, $z = 0$ — касательное электрическое поле. Его можно также найти как $\mathbf{E}_\tau(\omega, \mathbf{r}) = \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) - \mathbf{z}_0(\mathbf{z}_0\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}))$. Зависимость от $\mathbf{k}$ означает пространственную дисперсию, а от частоты ω — частотную (временну́ю) дисперсию. При дифракции плоской волны $k_0^2 = \omega^2/c^2 = \mathbf{k}^2 + k_z^2$, и величина $k^2 = \mathbf{k}^2 \le k_0^2$ ограничена. При распространении ПП возникает задача о собственных значениях, при этом из-за диссипации ее решение имеет вид $\mathbf{k}(\omega) = \mathbf{n}' - - i\mathbf{n}'' = \mathbf{k}'(\omega) - i\mathbf{k}''(\omega)$, и можно ввести комплексный векторный показатель преломления $\mathbf{n}(\omega) = \mathbf{n}'(\omega) - i\mathbf{n}''(\omega) = \mathbf{k}(\omega)/k_0$, причем коэффициент замедления $n = |n'(\omega)|$ может быть как больше единицы (медленный ПП), так и меньше единицы (быстрый ПП). При этом на распространение ПП существенно (особенно в области больших замедлений) влияет диссипация $\mathbf{n}'' = \mathbf{k}''(\omega)/k_0$, которая может быть направлена как в сторону распространения ПП, так и противоположно [17,33,34]. При сильно замедленном ПП $n' \gg 1$, и роль ПП дисперсии существенная. Для определения внутризонной поверхностной проводимости будем использовать соотношение [51]:

$$\mathbf{J}(\omega,\mathbf{k})=2\,\frac{e}{(2\pi)^2}\int\limits_{BZ}\left(\mathbf{v}^+f^+_{FD}(\mathbf{q},\mathbf{E}_\tau)-\mathbf{v}^-f^-_{FD}(\mathbf{q},\mathbf{E}_\tau)\right)d^2\mathbf{q}. \tag{3}$$

В нем знаками + и − обозначены величины для верхней (электронной) и нижней (дырочной) подзон, сопрягающихся в точках Дирака, двойка соответствует фактору g, использованы плотности распределения Ферми−Дирака $f^\pm_{FD}(\mathbf{q},\mathbf{E}_\xi)$, возмущенные плоской волной электрического поля. С графеном взаимодействует касательное электрическое поле $\mathbf{E}_\tau(\omega,\mathbf{k})$, которое связано с нормальной компонентой $E_z=\mathbf{z}_0\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k},k_z)=|\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k},k_z)|\sqrt{1-k^2/k_0^2}$, $k^2=\mathbf{k}^2$, $\mathbf{k}=x\mathbf{x}_0+y\mathbf{y}_0$ — двумерный волновой вектор в плоскости графена, $k_0^2=k^2+k_z^2$. В общем случае связь (3) с полем $\mathbf{E}_\tau(\omega,\mathbf{k})$ нелинейна [5]. В слабых полях возмущения малы, и, согласно модели Кубо, имеет место линейная связь компонент тока и поля. Выражения для возмущенных распределений ФД получают из приближения RTA (relaxation-time approximation), либо в приближении Бхатнагара−Гросса−Крука (BGK) решения кинетического уравнения. Последнее более предпочтительно, поскольку удовлетворяет сохранению заряда. В этом приближении $\hat{\sigma}^{\text{intra}}(\omega,\mathbf{k})=\hat{\sigma}^e(\omega,\mathbf{k})+\hat{\sigma}^h(\omega,\mathbf{k})$, и пространственно-временны́е спектральные функции имеют представления [51]:

$$\sigma^{e,h}_{xx}(\omega,\mathbf{k})=$$
$$=\frac{\tilde{\sigma}^{e,h}_{xx}(\omega,\mathbf{k})+k_y\left(\tilde{\sigma}^{e,h}_{xx}(\omega,\mathbf{k})d^{e,h}_y-\tilde{\sigma}^{e,h}_{yx}(\omega,\mathbf{k})d^{e,h}_x\right)}{1+k_xd^{e,h}_x+k_yd^{e,h}_y},$$

$$\sigma^{e,h}_{xy}(\omega,\mathbf{k})=$$
$$=\frac{\tilde{\sigma}^{e,h}_{xy}(\omega,\mathbf{k})+k_y\left(\tilde{\sigma}^{e,h}_{xy}(\omega,\mathbf{k})d^{e,h}_y-\tilde{\sigma}^{e,h}_{yy}(\omega,\mathbf{k})d^{e,h}_x\right)}{1+k_xd^{e,h}_x+k_yd^{e,h}_y},$$

$$\sigma^{e,h}_{yx}(\omega,\mathbf{k})=$$
$$=\frac{\tilde{\sigma}^{e,h}_{yx}(\omega,\mathbf{k})+k_x\left(\tilde{\sigma}^{e,h}_{yx}(\omega,\mathbf{k})d^{e,h}_x-\tilde{\sigma}^{e,h}_{xx}(\omega,\mathbf{k})d^{e,h}_y\right)}{1+k_xd^{e,h}_x+k_yd^{e,h}_y},$$

$$\sigma^{e,h}_{yy}(\omega,\mathbf{k})=$$
$$=\frac{\tilde{\sigma}^{e,h}_{yy}(\omega,\mathbf{k})+k_x\left(\tilde{\sigma}^{e,h}_{yy}(\omega,\mathbf{k})d^{e,h}_x-\tilde{\sigma}^{e,h}_{xy}(\omega,\mathbf{k})d^{e,h}_y\right)}{1+k_xd^{e,h}_x+k_yd^{e,h}_y}, \tag{4}$$

В эти соотношения входят компоненты тензоров $\tilde{\sigma}^{e,h}_{xx}$, векторов $\mathbf{d}^{e,h}$ и скаляров $F_{e,h}$, определяемые как [51]:

$$|\hat{\tilde{\sigma}}^{e,h}(\omega,\mathbf{k},\mu)=\frac{-ie^2}{8k_{\mathrm{B}}T\pi^2}$$
$$\times\int\limits_{BZ}\frac{\mathbf{v}^\pm(\mathbf{q})\otimes\mathbf{v}^\pm(\mathbf{q})d^2q}{\cosh^2\left(\frac{E^\pm(\mathbf{q})-\mu_c^\pm}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)\left(\omega-i\omega_c-\mathbf{k}\mathbf{v}^\pm(\mathbf{q})\right)},$$

$$\mathbf{d}^{e,h}(\omega,\mathbf{k},\mu)=\frac{-i\omega_c}{\omega F_{e,h}(\omega,\mathbf{k})}$$
$$\times\int\limits_{BZ}\frac{\mathbf{v}^\pm(\mathbf{q})d^2q}{\cosh^2\left(\frac{E^\pm(\mathbf{q})-\mu_c^\pm}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)\left(\omega-i\omega_c-\mathbf{k}\mathbf{v}^\pm(\mathbf{q})\right)},$$
$$F_{e,h}(\omega,\mathbf{k},\mu)=\int\limits_{BZ}\frac{d^2q}{\cosh^2\left(\frac{E^\pm(\mathbf{q})-\mu_c^\pm}{2k_{\mathrm{B}}T}\right)\left(\omega-i\omega_c-\mathbf{k}\mathbf{v}^\pm(\mathbf{q})\right)}, \tag{5}$$

где в интегралах используется интегрирование по верхней подзоне (зоны проводимости электронов) и по нижней подзоне (для дырок). В этих интегралах обозначены: $\mathbf{v}^\pm(\mathbf{q})=\hbar^{-1}\nabla_{\mathbf{q}}E^\pm(\mathbf{q})$ — скорости носителей заряда в подзонах, $\mathbf{q}=q_x\mathbf{x}_0+q_y\mathbf{y}_0$ — связанный с импульсом $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{q}$ двумерный вектор, ω_c — частота столкновений. Что касается последней, то она обычно считается малой и необходима для правильного вычисления интегралов (обхода полюсов). Однако реально в графене, особенно при допировании, электронно-дырочном рассеянии она может быть существенной, при этом зависимой от частоты (энергии фотона), температуры, и может быть разной в подзонах. Для компонент скоростей имеем

$$v^\pm_x(\mathbf{q})=\mp\frac{2\sqrt{3}v_F\gamma_0}{E^\pm(\mathbf{q})}\sin\left(\frac{3q_xa}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}q_ya}{2}\right),$$
$$v^\pm_y(\mathbf{q})=\mp\frac{v_F\gamma_0}{E^\pm(\mathbf{q})}\sin\left(\frac{\sqrt{3}q_ya}{2}\right)$$
$$\times\left[\cos\left(\frac{3q_xa}{2}\right)+2\cos\left(\frac{\sqrt{3}q_ya}{2}\right)\right].$$

В центре зоны Бриллюэна $v^\pm_x(0)=v^\pm_x(0)=0$, при этом $E^\pm(0)=\pm3\gamma_0$. В точке Дирака $\mathbf{K}'=2\pi(1,1/\sqrt{3})/(3a)$ (рис. 1) имеем $E^\pm(\mathbf{K})=0$, а для компонент скоростей получаем неопределенность 0/0. Это же имеет место в точке $\mathbf{K}=2\pi(1,-1/\sqrt{3})/(3a)$. Неопределенность раскрывается разложением энергии в окрестности точек Дирака [51] $E^\pm(\mathbf{q})=\pm\hbar v_F|\mathbf{q}-\mathbf{q}_F|$, где $v_F=\sqrt{3}\gamma_0a/(2\hbar)$ — скорость Ферми. Таким образом, $v_F\approx c/300$ — максимальная скорость носителей.

Численное вычисление интегралов (5) при итерационном определении корней ДУ требует больших вычислительных затрат. Интегралы (5) можно вычислять путем разложения по малому параметру $kv_F/(ck_0)$, малость которого достигается при замедлениях $n=k/k_0\ll c/v_F=300$. В этом случае соотношения (5) можно преобразовать. Например, для скалярных величин имеем

$$F_{e,h}(\omega,k_x,0,\mu)=\frac{1}{\omega-i\omega_c}\int\limits_{BZ}\frac{dq_xdq_y}{\cosh^2\left((E^\pm(\mathbf{q})-\mu)/(2k_{\mathrm{B}}T)\right)}$$
$$+\frac{1}{(\omega-i\omega_c)^2}\int\limits_{BZ}\frac{[k_xv^\pm_x(\mathbf{q})+k_yv^\pm_y(\mathbf{q})]dq_xdq_y}{\cosh^2\left((E^\pm(\mathbf{q})-\mu)/(2k_{\mathrm{B}}T)\right)}.$$

Для компонент тензоров в числителях возникают дополнительные множители $v^\pm_\alpha v^\pm_\beta$, а для компонент

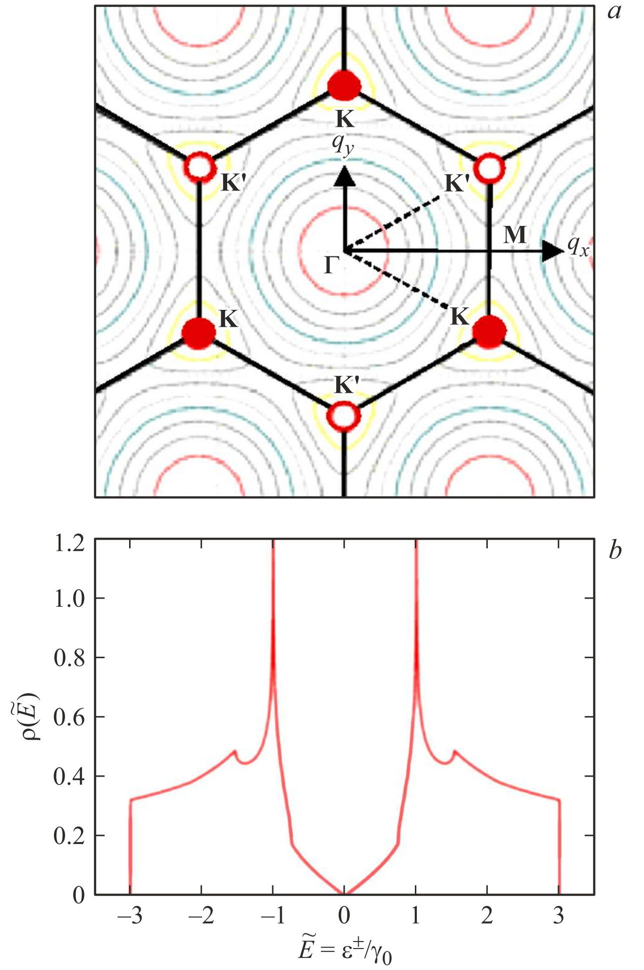

Рис. 1. Первая зона Бриллюэна, изоэнергетические линии и интегрирование по треугольникам (a) и плотность состояний в графене на элементарную ячейку в зависимости от нормированной энергии $\tilde{E} = \varepsilon^{\pm}(\mathbf{k})/\gamma_0$ при $\gamma_0' = 0$ (b).

векторов $v_\alpha^{\pm}$, $\alpha, \beta = x, y$. Более строгий подход требует численного интегрирования [24]. Часто интересуются движением ПП вдоль одной из осей координат, например, при $k_y = 0$. В этом случае соотношения упрощаются. Рассмотрим первую зону рис. 1. Будем интегрировать по верхнему прямоугольному треугольнику. Интеграл по первой переменной берется в пределах $0 \leq q_x \leq q_{0x} = 2\pi/(3a)$. Интеграл по второй переменной берется в пределах $0 \leq q_y \leq q_x q_{0y}/q_{0x} = q_x/(\sqrt{3})$. Взяв пределы $-q_x/(\sqrt{3}) \leq q_y \leq q_x/(\sqrt{3})$, получим интеграл по верхнему и нижнему прямоугольным треугольникам, т. е. по правому равностороннему треугольнику. Интеграл по левому такому треугольнику получается заменой знаков у переменных и у пределов, поэтому результат следует удвоить. Таким образом, результат интегрирования по двум треугольникам есть

$$\int\limits_{2\Delta} (dq_x dq_y) = 2 \int\limits_0^{2\pi/(3a)} dq_x \int\limits_{-q_x/\sqrt{3}}^{q_x/\sqrt{3}} (dq_y).$$

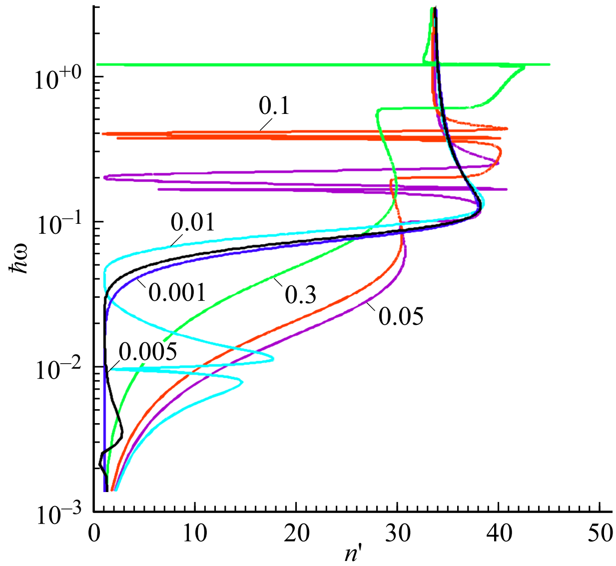

Рис. 2. Дисперсия Е-ПП (звисимость $\omega\hbar$, eV, от замедления $n' = k_x'/k_0$) с учетом ПД для разных значений химического потенциала μ_c (показан в eV), $\omega_c = 10^{12}$ GHz.

В силу симметрии зоны Бриллюэна (рис. 1) можно написать

$$\int\limits_{BZ} (dq_x dq_y) = 6 \int\limits_0^{2\pi/(3a)} dq_x \int\limits_{-q_x/\sqrt{3}}^{q_x/\sqrt{3}} (dq_y). \qquad (6)$$

Указанный результат можно получить заменой переменных, поворачивая систему координат на угол $\pi/3$. На основе такой формулы удобно выполнять численное интегрирование. Другой возможный путь интегрирования — по энергии и одной из компонент импульса. В чистом графене при нулевой температуре одноэлектронная плотность состояний на ячейку на уровне Ферми равна нулю, а график ее зависимости от энергии представлен на рис. 2 (см. [47]). Он получен путем вычисления спектрального интеграла по зоне Бриллюэна при конечном времени жизни квазичастиц (возбуждений) $\tau_l = 1/\omega$:

$$\rho_0(\omega\hbar) = -\frac{2\,\mathrm{Im}}{4\pi^2} \int\limits_{BZ} \sum_{l=\pm} \frac{dk_x dk_y}{\hbar\omega - \varepsilon^l(k_x, k_y) + i\hbar\omega_c}.$$

Найдем локальную плотность состояний в k-пространстве. Имеем [47,48]:

$$G(q_x) = \frac{g_s}{(2\pi/a)^2} \int\limits_{BZ} dq_x dq_y = \frac{4g_s}{(2\pi/a)^2} \int\limits_0^{k_x} dk_s'$$

$$\times \int\limits_0^{4\pi/(3\sqrt{3}a) - q_x/\sqrt{3}} dk_y' = \frac{4g_s q_x\left(4\pi/(3a) - q_x/2\right)}{(2\pi/a)^2\sqrt{3}},$$

или $G(q_x) = (\pi^{-2}3^{-1/2}/6) q_x a (8\pi - 3q_x a)$. Здесь мы взяли $g_s = 2$, перешли к интегралу по четверти зоны и учетверили результат. Полная плотность $\tilde{G} = 2/(3\sqrt{3})$. Поскольку размер ребра шестиугольника зоны есть $4\pi/(3\sqrt{3}a)$, а полная площадь зоны $8\pi^2/(3\sqrt{3}a^2)$, с учетом площади на одно состояние $(2\pi/a)^2$ и фактора $g_s = 2$ получаем тот же результат для $\tilde{G}$. Локальная плотность состояний равна

$$g(q_x) = (d/dq_x)G(q_x) = \frac{4g_x\big(4\pi/(3a) - q_x\big)}{(2\pi/a)^2\sqrt{3}}.$$

Здесь $0 < k_x < 2\pi/(3a)$. Аппроксимируя ρ на основе графика рис. 2, можем написать

$$g(q_x) = 2\int\limits_0^{\tilde{E}} \rho(\mathrm{E})d\mathrm{E}. \tag{7}$$

В (6) энергию отсчитываем от дна валентной зоны (уровня Ферми). Линейная аппроксимация позволяет вычислить интеграл и выразить энергию как корень квадратного уравнения явно через $g(q_x)$, т.е. получить функцию $\tilde{E} = \Phi(q_x)$. Т.е. можно считать независимыми переменными $\tilde{E}$ и q_y. Аналогично за независимые переменные можно взять $\tilde{E}$ и q_x. В этом случае

$$\int\limits_{BZ}(dq_x dq_y) = -\int\limits_{-3}^{3}(\,)\int\limits_{2\pi/(3a)}^{2\pi/(3a)}$$

$$\times \frac{d\tilde{E}dq_x}{4\sqrt{3}a\tilde{E}\sqrt{1 - Y^2(q_x, \tilde{E})}\sqrt{\cos^2(3q_x a/2) + \tilde{E}^2 - 1}},$$

$$Y(q_x, \tilde{E}) = \frac{-\cos(3q_x a/2) + \sqrt{\cos^2(3q_x a/2) + \tilde{E}^2 - 1}}{2},$$

$$q_y = \frac{2}{\sqrt{3}a}\arccos\big(Y(q_x, \tilde{E})\big). \tag{8}$$

При возведении w в квадрат число корней удваивается, поэтому в (8) взят один знак корня. Действительно, при $q_x = 0$, $w = 3$ получаем правильный результат $q_y = 0$. В точке $\mathbf{K}$ имеем $w = 0$, и соответственно $q_y = -2\pi/(3\sqrt{3}a)$. В точке $(0, 4\pi/(3\sqrt{3}a))$ опять $w = 0$ и $q_y = 4\pi/(3\sqrt{3}a)$. Следует отметить, что плотность состояний при ненулевых химических потенциалах и для эпитаксиального графена может существенно отличаться, поэтому интегрирование (6) предпочтительнее, чем (8).

3. Межзонная проводимость графена

Межзонная проводимость связана с поглощением (или испусканием) носителем кванта энергии $2\hbar\omega$ и переходом его симметрично в другую подзону. Например, электрон в валентной зоне с энергией $-\hbar\omega$ (относительно УФ) переходит в зону проводимости с энергией $\hbar\omega$. Межзонная проводимость определяется выражением [1]

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\mathrm{inter}}(\omega) = \frac{-ie^2\hbar}{S}\sum_{\mathbf{q},l\neq l'}\frac{f_{FD}(E_{\mathbf{q}l}) - f_{FD}(E_{\mathbf{q}l'})}{E_{\mathbf{q}l} - E_{\mathbf{q}l'} - \hbar(\omega - i\omega_c)}$$

$$\times \frac{\langle \mathbf{q}, l|\hat{v}_\alpha|\mathbf{q}, l'\rangle\langle \mathbf{q}, l'|\hat{v}_\beta|\mathbf{q}, l\rangle}{E_{\mathbf{q}l} - E_{\mathbf{q}l'}}. \tag{9}$$

Здесь $f_{FD}(E_{\mathbf{q}l})$ — распределение ФД, $\hat{v}_\alpha = V\hat{\sigma}_\alpha$ — оператор скорости, $\psi = |\mathbf{q}, l\rangle$ — волновая функция, $\hat{\sigma}_\alpha$ — матрица Паули, $l = 1, 2$ соответствует нижней (дырочной) и верхней (электронной) подзонам (т.е. $l = 2$ — зона проводимости электронов), $\alpha, \beta = x, y$, $E_{\mathbf{q}l} = (-1)^l\hbar v_F q$, $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$, $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}) = v_F\hat{\sigma}_\alpha\hat{p}_\alpha$, $S = \sqrt{3}a_0^2/4 = a^2/(4\sqrt{3}) = 0.0524\,\mathrm{nm}^2$. Результат (9) соответствует нормальному падению волны $\mathbf{k} = 0$.

В работе [43] на основе метода температурных ФГ получено представление проводимости $\sigma_{\alpha,\beta}(\omega, \mathbf{k}) = i\sigma_0\big(S_{\alpha\beta}^{\mathrm{intra}}(\omega, \mathbf{k}) + S_{\alpha\beta}^{\mathrm{inter}}(\omega, \mathbf{k})\big)$ (знак мнимой единицы изменен) в виде

$$S_{\alpha\beta}^{\mathrm{intra}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{l=1,2}$$

$$\times \int \frac{v^\alpha v^\beta\big[f_{FD}\big(\varepsilon_l(\mathbf{p}_-)\big) - f_{FD}\big(\varepsilon_l(\mathbf{p}_+)\big)\big]}{[\varepsilon_l(\mathbf{p}_+) - \varepsilon_l(\mathbf{p}_-)][\omega - \varepsilon_l(\mathbf{p}_+) + \varepsilon_l(\mathbf{p}_-)]}\,d^2p,$$

$$S_{\alpha\beta}^{\mathrm{inter}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{8\omega}{\pi^2}$$

$$\times \int \frac{v_{12}^\alpha v_{21}^\beta\big[f_{FD}\big(\varepsilon_1(\mathbf{p}_-)\big) - f_{FD}\big(\varepsilon_2(\mathbf{p}_+)\big)\big]}{[\varepsilon_2(\mathbf{p}_+) - \varepsilon_1(\mathbf{p}_-)]\{\omega^2 - [\varepsilon_2(\mathbf{p}_+) - \varepsilon_1(\mathbf{p}_-)]^2\}}\,d^2p.$$

В нем $l = 1, 2$ соответствует зоне проводимости электронов и валентной зоне соответственно, т.е. $\varepsilon_1(\mathbf{p}) = \varepsilon^+(\mathbf{p})$, $\varepsilon_2(\mathbf{p}) = \varepsilon^-(\mathbf{p})$, $\varepsilon_l(\mathbf{p}_\pm) = \varepsilon_l(\mathbf{p}) \pm \mathbf{p}_k\omega/2$, где $\mathbf{p}_k = \hbar\mathbf{k}$ — импульс фотона, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{q}$, v^α — матричный элемент оператора скорости носителей между состояниями в одной зоне, v_{12}^α — матричный элемент оператора скорости носителей между состояниями в различных зонах. Далее результат в [43] получен для дисперсии $\varepsilon_1(\mathbf{p}_+) = v_F|\mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{k}/2|$. Для сильной ПД $\omega\hbar \ll kv_F$ и $\omega\hbar \ll k_{\mathrm{B}}T$ найдено $\sigma_\perp^{\mathrm{inter}} = \sigma_\parallel^{\mathrm{inter}}$ и

$$S_{\alpha\beta}^{\mathrm{inter}}(\omega, k) = -i\delta_{\alpha\beta}\,\frac{2\omega}{\pi}$$

$$\times \begin{cases} \frac{\hbar}{4k_{\mathrm{B}}Tkv_F}\ln\big(4k_{\mathrm{B}}T/(\hbar kv_F)\big), & \omega \ll kv_F \ll k_{\mathrm{B}}T/\hbar, \\ (kv_{\mathrm{F}})^{-1}, & \omega \ll T \ll kv_F. \end{cases}$$

Фактически суммирование в (9) есть интегрирование по двум подзонам. В пределе $k \to 0$ и при учете основного линейного вклада в дисперсию $E^\pm(\mathbf{q}) \approx \pm\hbar v_F|\mathbf{q} - \mathbf{q}_F|$

в окрестности точек Дирака (или $E^{\pm}(\mathbf{q}') = \pm\hbar v_F q'$) интегралы типа (6) сводятся к выражениям

$$\sigma^{\text{intra}}(\omega, \omega_c, \mu_c, T) = \frac{ie^2}{\pi\hbar^2(\omega - i\omega_c)} \times \int_0^\infty \big(\partial_\varepsilon f_{FD}(\varepsilon) - \partial_\varepsilon f_{FD}(-\varepsilon)\big)\varepsilon d\varepsilon, \tag{10}$$

$$\sigma^{\text{inter}}(\omega, \omega_c, k, \mu_c, T) = \frac{-ie^2(\omega - i\omega_c)}{\pi\hbar^2} \times \int_0^\infty \left[\frac{f_{FD}(-\varepsilon + k\hbar v_F/2)}{(\omega - i\omega_c - kv_F/2)^2 - \frac{4\varepsilon^2}{\hbar^2}} - \frac{f_{FD}(\varepsilon - k\hbar v_F/2)}{(\omega - i\omega_c + kv_F/2)^2 - \frac{4\varepsilon^2}{\hbar^2}}\right] d\varepsilon, \tag{11}$$

в которых $f_{FD}(\varepsilon) = [\exp\big((\varepsilon - \mu_c)/(k_{\text{B}}T)\big) + 1]^{-1}$ — равновесная функция ФД. В работах [2,44,51] эти интегралы приведены при $k = 0$ в (11), т.е. без учета ПД. Интеграл (10) при температуре порядка комнатной и ниже с хорошей точностью вычисляется в виде [2,44]

$$\sigma^{\text{intra}}(\omega, \omega_c, \mu_c, T) = \frac{k_{\text{B}}T(e^2/\hbar)\varphi(\mu_c, T)}{\pi\hbar\omega_c(1 + i\omega/\omega_c)} = \frac{4\sigma_0 k_{\text{B}}T\varphi(\mu_c, T)}{\pi\hbar\omega_c(1 + i\omega/\omega_c)}, \tag{12}$$

$$\varphi(\mu_c, T) = \ln\left(2\cosh\left(\frac{\mu}{2k_{\text{B}}T}\right)\right). \tag{13}$$

Что касается интеграла (11), то при $k_{\text{B}}T \ll \mu_c$, $k_{\text{B}}T \ll \hbar\omega$, $k = 0$ в работе [44] он вычислен

$$\sigma^{\text{inter}}(\omega, \omega_c, \mu_c, T) \approx \frac{-i\sigma_0}{\pi} \ln\left(\frac{2|\mu_c| - (\omega - i\omega_c)\hbar}{2|\mu_c| + (\omega - i\omega_c)\hbar}\right). \tag{14}$$

В этом случае в интеграле (11) можно заменить все функции f_{FD} единицами при нижнем пределе $|\mu_c|$ интеграла, откуда и получаем формулу (14). При $\mu_c = 0$ из (14) следует $\sigma^{\text{inter}} = \sigma_0 = e^2/(4\hbar)$, а из (24) — $\sigma^{\text{intra}} = 0$. Безразмерный квант проводимость графена $\xi_0 = \sigma_0\eta_0 = \pi\alpha_0 = 0.0229$ можно выразить через постоянную тонкой структуры $\alpha_0 = 1/137$. Указанные формулы верны до частот, удовлетворяющих условию $\hbar\omega < 3\,\text{eV}$. Выше в УФ происходит сначала фотоионизация атомов углерода с разрывом π-связей, а затем и других связей, и тогда для проводимости следует использовать плазменную квантовую модель $2D$-электронного газа.

Формула (14) не точна уже при комнатной температуре при малых электрохимических потенциалах и малых частотах даже при $k = 0$. Самый действенный способ состоит в численном вычислении интеграла (11). Поскольку дисперсионное уравнение (ДУ) для ПП следует решать итерационно, численное вычисление интегралов неудобно, и желательно иметь аналитические выражения с учетом ПД. Введем для дальнейшего безразмерные химический потенциал $\alpha = \mu_c/(k_{\text{B}}T)$ и комплексную частоту $\beta = \hbar(\omega - i\omega_c)/(2k_{\text{B}}T)$. Если $\alpha \sim 1$ или больше, то $\varphi(\mu_c, T) \approx \alpha/2$. В работе [51] на основе формул (4) и (5) в первом приближении получен вид тензорной проводимости графена с учетом ПД для внутризонной проводимости:

$$\sigma_{xx}(\omega, \omega_c, \mathbf{k}) = \sigma^{\text{intra}}\left[1 + \frac{v_F^2}{4(\omega - i\omega_c)^2}\left(3 - \frac{2i}{\omega/\omega_c}\right)k_x^2 + \frac{v_F^2}{4(\omega - i\omega_c)^2}\,k_y^2\right] + \sigma^{\text{inter}}(k), \tag{15}$$

$$\sigma_{xy}(\omega, \omega_c, \mathbf{k}) = \sigma_{\text{intra}}\left[\frac{v_F^2}{2(\omega - i\omega_c)^2}\,k_x k_y\right], \tag{16}$$

$$\sigma_{yy}(\omega, \omega_c, \mathbf{k}) = \sigma^{\text{intra}}\left[1 + \frac{v_F^2}{4(\omega - i\omega_c)^2}\left(3 - \frac{2i}{\omega/\omega_c}\right)k_y^2 + \frac{v_F^2}{4(\omega - i\omega_c)^2}\,k_x^2\right] + \sigma^{\text{inter}}(k). \tag{17}$$

Зависимость от частоты у скалярных величин для краткости опущена. Формулы верны при относительно малых $\mathbf{k}$, соответствующих замедлениям существенно меньшим 300, т.е. добавки к единицам в квадратных скобках малы. Эти добавки для (15) при $\omega_c = 0$ можно представить в виде $\delta\sigma^{\text{intra}} = (3/4)(n_x/300)^2 + (n_y/300)^2/4 \ll 1$. Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k_0$ — векторный коэффициент замедлений. Формула (15) определена с недостатком, и следующий член должен быть $(\delta\sigma^{\text{intra}})^2$. Согласно (15)–(17), ПД увеличивает компоненты внутризонной проводимости, что приводит к ограничению замедления медленного Е-ПП и к некоторому увеличению замедления Н-ПП. ПД для межзонной проводимости в [51] не рассматривалась. Вычислим (11) разложением по малому параметру kv_F/β, учитывая только линейный член:

$$\sigma^{\text{inter}}(\beta, \alpha, k) = \sigma^{\text{inter}}(\beta, \alpha, 0) + \sigma^{(1)}(\beta, \alpha)kv_F/(\omega - i\omega_c).$$

Считаем $k\hbar v_F/2 \ll \mu_c$, т.е. $\alpha \gg kv_F/\omega$. Это позволяет полагать в функциях ФД $k = 0$. Однако мы учтем и эти линейные члены. При использованной линейной дисперсии правые части в (15) и (17) изотропны. Межзонная проводимость при дисперсии $E^{\pm}(\mathbf{q}') = \pm\hbar v_F q'$ также изотропна. В приближении малой ПД интеграл (11) можно преобразовать, используя $f_{FD}(\pm\varepsilon \mp k\hbar v_F/2) \approx f_{FD}(\pm\varepsilon) \mp k\hbar v_F/2\partial_\varepsilon f_{FD}(\pm\varepsilon)$ и соотношения

$$\int_0^\infty \frac{f_{FD}(\pm\varepsilon)}{\hbar^2(\omega - i\omega_c \mp kv_F/2)^2 - 4\varepsilon^2}\,d\varepsilon = \frac{1}{4\hbar}\int_0^\infty \frac{f_{FD}(\pm\varepsilon)}{\hbar(\omega - i\omega_c \mp kv_F/2) - 2\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{1}{4\hbar}\int_0^\infty \frac{f_{FD}(\pm\varepsilon)}{\hbar(\omega - i\omega_c \mp kv_F) + 2\varepsilon}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon},$$

$$\int_0^\infty \frac{f_{FD}(\pm\varepsilon)}{\omega - i\omega_c \mp kv_F/2 - 2\varepsilon/\hbar}\,\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \approx \int_0^\infty \frac{f_{FD}(\pm\varepsilon)}{(\omega - i\omega_c - 2\varepsilon/\hbar)}$$

$$\times \left[1 \pm \frac{kv_F/2}{(\omega - i\omega_c - 2\varepsilon/\hbar)}\right]\frac{d\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Логарифмические особенности в нуле у совокупности интегралов устраняются. Рассмотрим сначала член $\sigma_{\text{inter}}(\omega,\omega_c,0) = -ie^2(\omega - i\omega_c)(I_- - I_+)/(\pi\hbar^2)$, представленный формулой (11) при $k = 0$. Считаем $\mu_c > 0$. Поскольку $\exp\big(-(\varepsilon+\mu_c)/(k_BT)\big) < 1$, в первом интеграле можно выполнить разложение по малому параметру и оставить один член:

$$I_- = \frac{\hbar^2}{4}\int_0^\infty \frac{1 - \exp\big(-(\varepsilon+\mu_c)/(k_BT)\big)}{[\hbar(\omega - i\omega_c)/2]^2 - \varepsilon^2}\,d\varepsilon$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{[\hbar(\omega - i\omega_c)/2]^2 - \varepsilon^2}$$

$$- \frac{\hbar^2}{4}\int_0^\infty \frac{\exp\big(-(\varepsilon+\mu_c)/(k_BT)\big)}{[\hbar(\omega - i\omega_c)/2]^2 - \varepsilon^2}\,d\varepsilon.$$

Первый интеграл справа равен $i\pi/[\hbar(\omega - i\omega_c)]$, т.е. его вклад в проводимость есть σ_0. Во втором делаем замену $x = (\varepsilon + \mu_c)/(k_BT)$ и интегрируем по частям:

$$\frac{\hbar^2}{4k_BT}\int_\alpha^\infty \frac{\exp(-x)}{\beta^2 - (x+\alpha)^2}\,dx = \frac{\hbar^2}{4k_BT}$$

$$\times\left[\frac{\exp(-\alpha)}{\beta^2 - 4\alpha^2} + \int_\alpha^\infty \frac{2\exp(-x)}{[\beta^2 - (x+\alpha)]^2}\,x\,dx\right].$$

При отбрасывании интеграла справа эта формула уже имеет хорошую точность, если $\mu_c \geq k_BT$. Дальнейшее уточнение сводиться к интегрированию по частям. Повторное интегрирование дает

$$\frac{\hbar^2\exp(-\alpha)}{4k_BT(\beta^2 - 4\alpha^2)}\left(1 + \frac{2\alpha}{\beta^2 - 4\alpha^2}\right) + \int_\alpha^\infty \frac{2\exp(-x)}{[\beta^2 - (x+\alpha)^2]^2}$$

$$\times\left(1 + \frac{2x^2}{[\beta^2 - (x+\alpha)^2]^2}\right)dx,$$

$$\int_\alpha^\infty \frac{2\exp(-x)}{[\beta^2 - (x+\alpha)^2]^2}\,x\,dx = \frac{2\alpha\exp(-\alpha)}{[\beta^2 - 4\alpha^2]^2}$$

$$+ \int_\alpha^\infty \frac{2\exp(-x)}{[\beta^2 - (x+\alpha)^2]^2}\left(1 + \frac{2x^2}{[\beta^2 - (x+\alpha)^2]^2}\right)dx,$$

где вклад от интеграла справа имеет вид

$$\frac{2\exp(-\alpha)}{(\beta^2 - 4\alpha^2)^2}\left[1 + \frac{2\alpha^2}{(\beta^2 - 4\alpha^2)^2}\right]$$

и может быть отброшен вместе с оставшимся интегралом как малый. Мы его учтем. Таким образом:

$$I_-(\alpha,\beta) \approx -\frac{\hbar^2}{4k_BT}\left[\frac{\exp(-\alpha)}{\beta^2 - 4\alpha^2}\left(1 + \frac{2(\alpha+1)}{\beta^2 - 4\alpha^2} + \frac{4\alpha^2}{(\beta^2 - 4\alpha^2)^2}\right) - \frac{i\pi}{2\beta}\right]. \quad (18)$$

Для второго интеграла разбиваем область интегрирования на две: $0 < \varepsilon < 2\mu_c$ и $2\mu_c < \varepsilon < \infty$, делая замену $x = (\varepsilon - \mu_c)/(k_BT)$. В результате имеем

$$I_+ = \frac{\hbar^2}{4k_BT}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dx}{[\beta^2 - (x+\alpha)^2]\big(1 + \exp(x)\big)}$$

$$+ \frac{\hbar^2}{4k_BT}\int_\alpha^\infty \frac{\exp(-x) - \exp(-2x) - \exp(-3x) - \ldots}{\beta^2 - (x+\alpha)^2}\,dx. \quad (19)$$

Опуская промежуточные вычисления, приведем окончательный результат:

$$\sigma^{\text{inter}}(\omega,\omega_c,0) = \sigma_0 + \frac{i\sigma_0}{\pi}\left[\frac{4\beta\exp(-\alpha)}{\beta^2 - 4\alpha^2}\left(1 + \frac{3\alpha+1}{\beta^2 - 4\alpha^2} + \frac{2\alpha^2}{(\beta^2 - 4\alpha^2)^2} - \frac{\exp(-2\alpha)}{4}\right) + \frac{1}{1+\exp(\alpha/2)}\right.$$

$$\left.\times\ln\left(\frac{\beta^2 + \alpha\beta - 2\alpha^2}{\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2}\right) + \frac{1}{1+\exp(-\alpha/2)}\ln\left(\frac{\beta - \alpha}{\beta + \alpha}\right)\right]. \quad (20)$$

Эта формула имеет существенно лучшую точность, чем (14). При малой температуре $k_BT \ll \mu_c$ величины α и β большие, причем $\alpha/\beta = 2\mu_c/\hbar(\omega - i\omega_c)$, и в зависимости от частоты это отношение может быть как большим, так и малым. Имеем $\sigma^{\text{inter}}(\omega,\omega_c,0) \approx \sigma_0$ при больших частотах ($\omega \gg 2\mu_c/\hbar$). При малых частотах (но при $k_BT \ll \hbar\omega \ll 2\mu$) имеем $\sigma^{\text{inter}}(\omega,\omega_c,0) = -2i\sigma_0\beta/(\pi\alpha)$, т.е. эта часть проводимости мала по модулю и является индуктивной. При этом реальная часть за счет межзонных переходов может быть малой отрицательной. Эффект накачки с инверсией населенности но на высоких оптических частотах рассмотрен в работах [9–12,20–22]. Теперь $\sigma^{\text{inter}}(\beta,\alpha,k) = \sigma^{\text{inter}}(\beta,\alpha,0) + \sigma^{(1)}(\beta,\alpha)kv_F/(\omega - i\omega_c)$, при этом величина $\sigma^{(1)}(\beta,\alpha) = \sigma_1^{(1)}(\beta,\alpha) + \sigma_2^{(1)}(\beta,\alpha)$ разбивается на две части: в первую часть входит линейный член разложения функций ФД в числителе, а во второй — соответствующий член разложения знаменателей. Первый вычисляется просто и равен

$$\sigma_1^{(1)}(\beta,\alpha) = -\frac{ie^2\beta^2}{\pi\hbar(\beta^2 - \alpha^2)}.$$

Второй имеет вид

$$\sigma_2^{(1)}(\beta,\alpha)=\frac{4i\sigma_0(\hbar\omega-i\hbar\omega_c)^3}{\pi}$$
$$\times\int_0^\infty\frac{f_{FD}(-\varepsilon)+f_{FD}(\varepsilon)}{(\hbar\omega-i\hbar\omega_c-2\varepsilon)^2(\hbar\omega-i\hbar\omega_c+2\varepsilon)^2}\,d\varepsilon. \quad (21)$$

Удобно представить (21) в виде

$$I=\frac{2\pi\sigma_2^{(1)}(\beta,\alpha)}{i\sigma_0(\hbar\omega-i\hbar\omega_c)^2}=\int_0^\infty\frac{f_{FD}(-\varepsilon)+f_{FD}(\varepsilon)}{\varepsilon}$$
$$\times\left[\frac{1}{(\hbar\omega-i\hbar\omega_c-2\varepsilon)^2}-\frac{1}{(\hbar\omega-i\hbar\omega_c+2\varepsilon)^2}\right]d\varepsilon.$$

Очевидно, теперь

$$I=-8\pi i(k_{\mathrm{B}}T)^2\sigma_2^{(1)}(\beta,\alpha)/(\sigma_0\beta^2)$$

и

$$I(\beta,\alpha,T)=I_1^+(\beta,\alpha,T)-I_1^-(\beta,\alpha,T),$$

где $I_1^+(\beta,\alpha,T)=I_1^-(-\beta,\alpha,T)$. Хотя интегралы $I_1^\pm$ имеют логарифмическую особенность в нуле, эта особенность в полном интеграле устраняется. Интеграл вычисляется в предположении $k_{\mathrm{B}}T\ll\mu_c$, что обычно выполняется при комнатной температуре. Для вычисления интеграла разбиваем интервал интегрирования на два: $(0,2\mu_c)$, $(2\mu_c,\infty)$, обозначаем $\Omega=\hbar\omega-i\hbar\omega_c$ и используем тождество

$$\frac{1}{\varepsilon(2\varepsilon\pm\Omega)^2}=\frac{1}{\varepsilon\Omega^2}-\frac{4\varepsilon\pm4\Omega}{(2\varepsilon\pm\Omega)^2\Omega^2}.$$

Из него следует разбиение на простые дроби:

$$\frac{1}{\varepsilon(2\varepsilon-\Omega)^2}-\frac{1}{\varepsilon(2\varepsilon+\Omega)^2}=\frac{2}{(2\varepsilon-\Omega)^2\Omega}-\frac{2}{(2\varepsilon-\Omega)\Omega^2}$$
$$+\frac{2}{(2\varepsilon+\Omega)\Omega^2}+\frac{2}{(2\varepsilon+\Omega)^2\Omega}.$$

Для второго интервала сумма функций ФД с большой точностью равна единице, поэтому результат для него имеет вид

$$-\frac{1}{\Omega^2}\ln\frac{4\mu_c+\Omega}{4\mu_c-\Omega}+\frac{1}{\Omega}\,\frac{8\mu_c}{16\mu_c^2-\Omega^2}$$
$$=-\frac{1}{(2k_{\mathrm{B}}T\beta)^2}\ln\frac{2\alpha+\beta}{2\alpha-\beta}+\frac{1}{(k_{\mathrm{B}}T)^2\beta}\,\frac{\alpha}{4\alpha^2-\beta^2}.$$

При больших частотах он мал. Первый интеграл вычисляем по теореме о среднем значении, взяв для суммы функций ФД значение в средней точке $\varepsilon=\mu_c$:

$$\tilde{\varphi}(\alpha)\int_0^{2\mu_c}\left(\frac{\varepsilon+\Omega}{(\varepsilon+\Omega/2)^2\Omega^2}-\frac{\varepsilon-\Omega}{(\varepsilon-\Omega/2)^2\Omega^2}\right)d\varepsilon.$$

Здесь $\tilde{\varphi}(\alpha)=1/2+1/\big(1+\exp(-2\alpha)\big)\approx3/2$ — значение суммы функций ФД в средней точке. Результат имеет вид

$$\tilde{\varphi}(\alpha)\left(\frac{1}{(2k_{\mathrm{B}}T)^2\beta^2}\ln\left(\frac{\beta+2\alpha}{\beta-2\alpha}\right)-\frac{\alpha}{(k_{\mathrm{B}}T)^2(4\alpha^2-\beta^2)\beta}\right).$$

При больших частотах он также мал. Таким образом, получаем значение интеграла

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\tilde{\varphi}(\alpha)-1}{(k_{\mathrm{B}}T)^2}\left(\frac{1}{4\beta^2}\ln\left(\frac{\beta+2\alpha}{\beta-2\alpha}\right)-\frac{\alpha/\beta}{4\alpha^2-\beta^2}\right)$$

и имеем окончательный результат

$$\sigma^{(1)}(\beta,\alpha)=-\frac{4i\sigma_0\beta^2}{\pi(\beta^2-\alpha^2)}+\frac{i\sigma_0\big(\tilde{\varphi}(\alpha)-1\big)}{\pi}$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\beta+2\alpha}{\beta-2\alpha}\right)-\frac{2\alpha\beta}{4\alpha^2-\beta^2}\right). \quad (22)$$

При больших частотах $\beta\gg\alpha$ вклад ПД в проводимость индуктивный: $\sigma^{(1)}(\beta,\alpha)=-4i\sigma_0/\pi$. Максимальный вклад от ПД в проводимость будет при $\beta\approx2\alpha$. Полагая $\beta=2\alpha-i\beta''$ и считая α и β' большими величинами, а β'' малой, получаем

$$\sigma^{(1)}(\beta,\alpha)=-\frac{16i\sigma_0\alpha^2}{3\pi}+\frac{i\sigma_0}{4\pi}\ln\left(\frac{4\alpha}{\beta''}\right)-\sigma_0\left(\frac{1}{8}+\frac{\alpha}{\pi\beta''}\right).$$

При малых потерях эта часть проводимости может иметь большую отрицательную действительную часть, что свидетельствует о возникновении неравновесности за счет межзонных переходов. Ее мнимая часть может быть как емкостной, так и индуктивной. Последний случай соответствует весьма малым потерям. Вклад ПД в проводимость имеет вид $2\hbar kv_Fk_{\mathrm{B}}T\sigma^{(1)}(\beta,\alpha)/\beta$.

4. Дисперсионное уравнение на основе метода Функций Грина

Вектор-потенциал, создаваемых плотностями тока двух листов графена на тонкой подложке, имеет вид

$$\mathbf{A}(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[G(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}',0)\mathbf{J}_1(\boldsymbol{\rho}')+G(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}',d)$$
$$\times\mathbf{J}_2(\boldsymbol{\rho}')+G(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}',d/2)\mathbf{J}_d(\boldsymbol{\rho}')\Big]dx'dy'. \quad (23)$$

Мы обозначили двумерный вектор $\boldsymbol{\rho}=\mathbf{x}_0x+\mathbf{y}_0y$. Определяя электрическое поле

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=(ik_0)^{-1}\eta_0(\nabla\otimes\nabla+\hat{I}k_0)\mathbf{A}(\mathbf{r}),$$

налагаем граничные условия:

$$
\begin{aligned}
J_{1x}(x, y) &= \sigma_{xx}E_x(x, y, 0) + \sigma_{xy}E_y(x, y, 0),\\
J_{1y}(x, y) &= \sigma_{xy}E_x(x, y, 0) + \sigma_{yy}E_y(x, y, 0),\\
J_{2x}(x, y) &= \sigma_{xx}E_x(x, y, d) + \sigma_{xy}E_y(x, y, d),\\
J_{2y}(x, y) &= \sigma_{xy}E_x(x, y, d) + \sigma_{yy}E_y(x, y, d),\\
J_{dx}(x, y) &= \sigma_d E_x(x, y, d/2),\\
J_{dy}(x, y) &= \sigma_d E_y(x, y, d/2). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Здесь $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.73\,\Omega$, мы считаем проводимость графеновых листов одинаковой и тензорной, листы расположенными при $z = 0$ (первый) и $z = d$ (второй), а скалярную поверхностную проводимость подложки $\sigma_d = i\omega\varepsilon_0(\varepsilon-1)d$ — расположенной при $z = d/2$. Тензорный дифференциальный оператор имеет компоненты $(\nabla\otimes\nabla)_{kl} = \partial_k\partial_l$, $k, l = x, y, z$. Компоненты полей выражаем через тензорную ФГ полностью электрического типа $\hat{G}^{ee}(\mathbf{r}) = (-ik_0\hat{I} + ik_0^{-1}\nabla\otimes\nabla)\eta_0 G(\mathbf{r})$. Далее от всех координатных соотношений в поперечных координатах переходим к их пространственным преобразованиям Фурье, что позволяет получить алгебраические соотношения. Имеем

$$
\hat{G}^{ee}(\mathbf{r}) = \frac{\eta_0}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(k_x, k_y)
\times \exp(-ik_x x - ik_y y - ik_z|z|)dk_x dk_y, \qquad (25)
$$

$$
\hat{g}(k_x, k_y) = -\frac{1}{2k_0k_z}\begin{bmatrix} k_0^2 - k_x^2 & -k_xk_y \\ -k_xk_y & k_0^2 - k_y^2 \end{bmatrix}. \qquad (26)
$$

Здесь $k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$. Если ПП медленный, то следует брать $\kappa_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_0^2} = ik_z$. Поэтому удобно ввести функцию $\psi = \exp(-\kappa_z d/2)$. Компоненты полей будем обозначать $E_{nx}(k_x, k_y)$, $E_{ny}(k_x, k_y)$, где $n = 1, 2$ соответствуют листам графена, а $n = 3$ — подложке. Можно получить систему шести алгебраических уравнений относительно компонент электрического поля или шести компонент плотностей поверхностного тока. Удобнее записать их через компоненты плотности поверхностного тока. Кроме того, удобно ввести безразмерные (нормированные) проводимости: $\hat{\xi} = \hat{\sigma}\eta_0$, $\xi_d = \sigma_d\eta_0$. Первому уравнению в (3) соответствует уравнение

$$
\begin{aligned}
&[1 - \xi_{xx}g_{xx}(\mathbf{k}) - \xi_{xy}g_{xy}(\mathbf{k})]\,j_{1x}(\mathbf{k})\\
&- [\xi_{xx}g_{xy}(\mathbf{k}) + \xi_{xy}g_{yy}(\mathbf{k})]\,j_{1y}(\mathbf{k})\\
&- \psi^2[\xi_{xx}g_{xx}(\mathbf{k}) + \xi_{xy}g_{xy}(\mathbf{k})]\,j_{2x}(\mathbf{k})\\
&- \psi^2[\xi_{xx}g_{xy}(\mathbf{k}) + \xi_{xy}g_{yy}(\mathbf{k})]\,j_{2y}(\mathbf{k})\\
&- \psi[\xi_{xx}g_{xx}(\mathbf{k}) + \xi_{xy}g_{xy}(\mathbf{k})]\,j_{dx}(\mathbf{k})\\
&- \psi[\xi_{xx}g_{xy}(\mathbf{k}) + \xi_{xy}g_{yy}(\mathbf{k})]\,j_{dy}(\mathbf{k}) = 0. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

Чтобы получить второе уравнение, надо сделать замены $x \leftrightarrow y$. Чтобы получить третье уравнение, надо в первом сделать замены $1 \leftrightarrow 2$. Четвертое уравнение можно получить соответствующими заменами из первого или из второго. Для получения его из второго уравнения делаем в нем замену $1 \leftrightarrow 2$. Пятое уравнение имеет вид

$$
\begin{aligned}
&-2\xi_d\psi g_{xx}(\mathbf{k})\,j_{1x}(\mathbf{k}) - 2\xi_d\psi g_{xy}(\mathbf{k})\,j_{1y}(\mathbf{k})\\
&- 2\xi_d\psi g_{xx}(\mathbf{k})\,j_{2x}(\mathbf{k}) - 2\xi_d\psi g_{xy}(\mathbf{k})\,j_{2y}(\mathbf{k})\\
&+ j_{dx}(\mathbf{k})[1 - \xi_d g_{xx}(\mathbf{k})] - j_{dy}(\mathbf{k})\xi_d g_{xy}(\mathbf{k}) = 0. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Шестое уравнение получается из пятого заменой $x \leftrightarrow y$. Здесь $\mathbf{k} = \mathbf{x}_0k_x + \mathbf{y}_0k_y$. ДУ свободных волн (ПП) получается приравниванием нулю определителя полученной системы линейных однородных уравнений. Оно довольно громоздкое. Упрощение получается для медленных ПП и больших d, когда ψ^2 по сравнению с можно пренебречь. В этом случае получаем ДУ в виде равенства нулю определителя четвертого порядка. Строгий учет однородной подложки требует применения метода сшивания. Для скалярной проводимости оно выполняется достаточно просто [3]. Для тензорной проводимости графена удобно использовать матрицы переноса четвертого порядка. Такие матрицы в оптике известны как матрицы Берремана [52]. При сшивании компонент четырех векторов $u = (E_x, \eta_0H_y, -E_y, \eta_0H_x)$ нормированная матрица для графена имеет вид

$$
\hat{T}_\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_{xy} & 1 & -\xi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \xi_{xx} & 0 & -\xi_{xy} & 1 \end{bmatrix} \qquad (29)
$$

а матрица для подложки образуется как

$$
\hat{T}(d) = \begin{bmatrix} \hat{a}^e(d) + \hat{a}^h(d) & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{a}^e(d) + \hat{a}^h(d) \end{bmatrix}. \qquad (30)
$$

В ней $\hat{0}$ — нулевая двумерная матрица, и обозначены двумерные матрицы

$$
\hat{a}^{e,h}(d) = \begin{bmatrix} \cos(\tilde{d}_z d) & i\rho_{e,h}\sin(\tilde{k}_z d) \\ iy_{e,h}\sin(\tilde{k}_z d) & \cos(\tilde{k}_z d) \end{bmatrix}.
$$

В них $\rho_{e,h} = y_{e,h}^{-1} = Z_{e,h}/\eta_0$, $\rho_e = \tilde{k}_e/(k_0\varepsilon)$, $\rho_h = k_0/\tilde{k}_e$ — нормированные волновые сопротивления E-волн и H-волн, $\tilde{k}_z = \sqrt{k_0^2\varepsilon - k_x^2 - k_y^2}$. ДУ получается методом, изложенным в [17], при этом используется условие либо втекания волны (для медленного поверхностного ПП), либо вытекания волны (для быстрого антиповерхностного ПП). Такое ДУ имеет вид равного нулю определителя четвертого порядка. Его можно свести к определителю второго порядка [17]. Далее для упрощения мы рассматриваем листы графена в бесконечном диэлектрике. Этот случай получается заменой $k_0 \to k_0\sqrt{\varepsilon}$ во всех соотношениях, при этом

$k_z \to \tilde{k}_z$, а $\mathbf{J}_d$ следует опустить. В этом случае ДУ принимает вид

$$\det\begin{bmatrix} \hat{I}-\hat{A}(\mathbf{k}) & -\psi^2(k)\hat{A}(\mathbf{k}) \\ -\psi^2(k)\hat{A}(\mathbf{k}) & \hat{I}-\hat{A}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} = 0, \tag{31}$$

$$\hat{A}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \xi_{xx}g_{xx}+\xi_{xy}g_{xy} & \xi_{xx}g_{xy}+\xi_{xy}g_{yy} \\ \xi_{yy}g_{xy}+\xi_{xy}g_{xx} & \xi_{yy}g_{yy}+\xi_{xy}g_{xy} \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Определитель блочной матрицы в (31) равен $\det^2\big(\hat{I}-\hat{A}(\mathbf{k})\big)-\psi^4(k)\det^2\big(\hat{A}(\mathbf{k})\big)$. Запишем матрицу (32) в виде $A_{11}=a(\mathbf{k})$, $A_{12}=b(\mathbf{k})$, $A_{21}=c(\mathbf{k})$, $A_{22}=d(\mathbf{k})$. Тогда имеем ДУ

$$\big[\big(1-a(\mathbf{k})\big)\big(1-d(\mathbf{k})\big)-b(\mathbf{k})c(\mathbf{k})\big]^2 - \psi^4(k)\big(a(\mathbf{k})c(\mathbf{k})-b(\mathbf{k})c(\mathbf{k})\big)=0. \tag{33}$$

Если нас интересуют очень медленные ПП, то при достаточно большом расстоянии d между листами $|\psi^4(k)|=|\exp(-2\kappa_z d)|\ll 1$, и ДУ распадается на два одинаковых уравнения:

$$\big(1-a(\mathbf{k})\big)\big(1-d(\mathbf{k})\big)-b(\mathbf{k})c(\mathbf{k})=0. \tag{34}$$

Они становятся различными при $b(\mathbf{k})$=0 или $c(\mathbf{k})$=0:

$$1-a(\mathbf{k})=0, \tag{35}$$

$$1-c(\mathbf{k})=0. \tag{36}$$

Рассмотрим возможность их получения. Пусть плазмон идет вдоль одной из осей. Тогда $g_{xy}=0$. Пусть это для определенности ось x. Тогда $k_y=0$, $g_{xx}=\sqrt{k_0^2-k_x^2}/(2k_0)$, $g_{yy}=k_0/\big(2\sqrt{k_0^2-k_x^2}\big)$, при этом $b(\mathbf{k})=\xi_{xy}g_{yy}$, $c(\mathbf{k})=\xi_{xy}g_{xx}$, поэтому из ДУ (34) имеем $\big(1-\xi_{xx}(\mathbf{k})g_x(\mathbf{k})\big)\big(1-\xi_{yy}(\mathbf{k})g_{yy}(\mathbf{k})\big)^2+\xi_{xy}^2(\mathbf{k})/4=0$. Это уравнение распадается на (35) и (36), если тензор проводимости приведен к главным осям, т.е. $\xi_{xy}=0$. Получаем $1-\xi_{xx}(\mathbf{k})g_{xx}(\mathbf{k})=0$, $1-\xi_{yy}(\mathbf{k})g_{yy}(\mathbf{k})=0$ или $\xi_{xx}(\mathbf{k})k_z(k)=2k_0$ и $\xi_{yy}(\mathbf{k})k_0^2=2k_0k_z(k)$. Возводя их в квадрат, имеем $k_x^2=k_0^2-4k_0^2/\xi_{xx}^2(\mathbf{k})$, $k_x^2=k_0^2-\xi_{xx}^2(\mathbf{k})/4k_0^2$. Извлекая квадратные корни, получаем два решения

$$k_x=\pm k_0\sqrt{1-4/\xi_{xx}^2(\omega,\mathbf{k},T,\mu_c)}, \tag{37}$$

$$k_x=\pm k_0\sqrt{1-\xi_{yy}^2(\omega,\mathbf{k},T,\mu_c)/4}. \tag{38}$$

На самом деле это неявные уравнения. Корни с разными знаками дают волны двух направлений. Здесь мы обозначили зависимость проводимости от всех параметров, включая и химический потенциал μ_c. Обозначаем нормированные комплексные компоненты как $\xi_{xx}=\xi'_{xx}+i\xi''_{xx}$, $\xi_{yy}=\xi'_{yy}+i\xi''_{yy}$. Уравнение (37) принимает вид

$$k_x=\pm k_0 \times\sqrt{\frac{4(\xi'^2_{xx}-\xi''^2_{xx})}{(\xi'^2_{xx}-\xi''^2_{xx})^2+4(\xi'_{xx}\xi''_{xx})^2}+\frac{8i\xi'_{xx}\xi''_{xx}}{(\xi'^2_{xx}-\xi''^2_{xx})^2+4(\xi'_{xx}\xi''_{xx})^2}}.$$

Из него видно, что для существования медленного Е-ПП должно быть $\xi'^2_{xx}<\xi''^2_{xx}$. Для очень медленного плазмона необходимо $\xi'^2_{xx}\ll\xi''^2_{xx}\ll 1$, и тогда

$$k_x\approx\pm k_0\sqrt{1+4/\xi''^2_{xx}}\left(1+\frac{4i\xi'_{xx}/\xi''_{xx}-8(\xi'_{xx}/\xi''_{xx})^2}{\xi''^2_{xx}+4}\right). \tag{39}$$

Знаки $\pm$ соответствуют волнам двух противоположных направлений. Для медленного Н-ПП должно быть $\xi'_{yy}\ll|\xi''_{yy}|$, $|\xi''_{yy}|\gg 1$. В этом случае

$$k_x=\pm k_0\sqrt{1+(\xi''^2_{yy}-\xi'^2_{yy}-2i\xi'_{yy}\xi''_{yy})/4} \approx\pm k_0\big(1+(\xi''^2_{yy}-\xi'^2_{yy}-2i\xi'_{yy}\xi''_{yy})/8\big). \tag{40}$$

На низких частотах этот ПП почти не замедленный. Более сильное замедление возможно в области $\beta\approx 2\alpha$ при учете ПД. Из ДУ (39) следует, что ПП обратный, если компонента проводимости емкостная, т.е. $\xi''_{xx}>0$, и прямой, если она индуктивная. Из ДУ (40) следует, что ПП обратный, если $\xi''_{yy}<0$, т.е. компонента проводимости индуктивная, и прямой — если она емкостная. Рассмотрим ДУ для связанных ПП. Пусть опять $k_y=0$. Обозначим $X=\sqrt{k_0^2-k_x^2}/k_0=\sqrt{1-n^2}$. Как нетрудно видеть, $X^2-2BX+C=0$, откуда $\sqrt{1-n^2}=B\pm\sqrt{B^2-C}$, и, возводя в квадрат, имеем ДУ для замедления

$$n^2=1-\Big(B(n)\pm\sqrt{B^2(n)-C(n)}\Big)^2. \tag{41}$$

В нем

$$B=1/\xi_{xx}+\xi_{yy}-\xi_{xy}^2/(4\xi_{xx})\pm\psi^2(k)\sqrt{\xi_{yy}/\xi_{xx}-\xi_{xy}^2/\xi_{xx}^2}/2,$$

$$C=\xi_{yy}/\xi_{xx}.$$

Знаки следует брать независимо. При возведении в квадрат могли получиться лишние корни, что следует учитывать при извлечении корня из (41). При $\psi=0$ и $\xi_{xy}=0$ из (41) естественно следует (37) и (38). ДУ (41) неявное, в силу зависимости проводимости от ПД и частоты. Для таких уравнений в работе [53] предложен метод итерации с коррекцией шага итерации, основанный на выполнении принципа сжимающих отображений.

Для произвольных многослойных плоскослоистых структур общий метод построения ДУ состоит в сшивании полей на границах при удовлетворении полей в слоях волновым уравнениям. Для однородных диэлектрических слоев это уравнения Гельмгольца. Поля в них можно представить как совокупность Е-волн и Н-волн. На границах раздела могут находиться графеновые листы, которые обеспечивают разрыв компонент магнитного поля. При учете ПД листы описываются матрицей четвертого порядка $\hat{T}_{\sigma n}$ типа (29). Слой также описываем матрицей четвертого порядка $\hat{T}(d_n)$ типа (30). Алгоритм состоит в вычислении полной матрицы структуры в виде произведения матриц $\hat{T}(d_n)\hat{T}_{\sigma n}$ наложении условий излучения.

5. Численные результаты и выводы

Сначала получим приближенные аналитические решения ДУ. Ищем корни уравнений (37), (38) и (41). Мы всегда вправе выбрать ось x вдоль распространения ПП. ДУ (37) и (38) имеют место, только если она совпадает с кристаллической осью графена. Тогда эти уравнения удобно записать в виде

$$n = k_x/k_0 = \pm\sqrt{1 - 4/\xi_{xx}^2(\omega, n, T, \mu_c)},$$

$$n = k_x/k_0 = \pm\sqrt{1 - \xi_{yy}^2(\omega, n, T, \mu_c)/4},$$

при этом σ_{xy}=0 и

$$\xi_{xx}(\omega, \omega_c, \mathbf{k}) = \xi^{\text{intra}}(\omega, \omega_c)\left[1 + 3(n/600)^2 \times \left(1 - \frac{2i\omega_c}{3\omega}\right)\right] + \xi^{\text{inter}}(k), \quad (42)$$

$$\xi_{yy}(\omega, \omega_c, \mathbf{k}) = \xi^{\text{intra}}(\omega, \omega_c)\left[1 + (n/600)^2\right] + \xi^{\text{inter}}(k). \quad (43)$$

В этих формулах замедление $n < 300$. При $n = 300$ увеличение проводимости достигает 75%, что уже не является малой величиной и лежит за пределами точности этих формул. Реально их для хорошей точности следует брать верхнюю границу $n = 100$. При комнатной температуре и $\mu_e \geq 0.1\,\text{eV}$ весьма точным является значение $\xi^{\text{intra}} = -i\xi_0\alpha/(\pi\beta)$. При $\omega \gg \omega_c$ оно имеет малую действительную часть, т.е. в этом случае при $n' < 100$ левые части (42) и (43) — малые мнимые отрицательные и уменьшающиеся с ростом частоты, поэтому основной вклад на высоких частотах дает $\xi^{\text{inter}}(k)$. На оптических и УФ частотах, согласно формуле (14) и приведенных ее уточнений, $\xi^{\text{inter}}(k) \approx \xi_0 \ll 1$, и при нормальном падении плоской волны ($k_z = k_0$, $k_x = 0$), графен прозрачен, а его коэффициент прохождения $T = 1/(1 + \xi_0/2) = 0.9887$ близок к единице.

Для получения ДУ в случае двух листов графена на обеих сторонах подложки удобно воспользоваться симметрией. ПП в такой структуре может быть симметричным и антисимметричным. Симметрию можно вводить относительно любой их компонент поля. Обычно для Е-ПП берут единственную поперечную магнитную компоненту. Мы будем классифицировать по магнитной и электрической стенке в центре подложки, что удобнее. Рассмотрим другой вывод ДУ (41). Для магнитной стенки проводимость равна нулю. Е-волна подложки имеет нормированную проводимость $y^e = k_0\varepsilon/\sqrt{k_0^2\varepsilon - k_x^2}$. Трансформируя ее к плоскости графена, имеем $y_{in} + \xi_{xx} = iy^e \tan\left(\sqrt{k_0^2\varepsilon - k_x^2}d/2\right) + \xi_{xx}$. К ней мы добавили саму проводимость графена. Для получения ДУ полагаем $y_{in} + \xi_{xx} = -y_0^e = -k_0/\sqrt{k_0^2 - k_x^2}$, т.е. приравниваем ее проводимости вакуума со знаком минус в соответствии с приведенным выше замечанием. Рассмотрим частотную область, где Е-ПП сильно замедленный ($n'^2 \gg n''^2$) при индуктивной проводимости $\xi_{xx} = \xi'_{xx} - i\xi''_{xx}$, $\xi''_{xx} > 0$, при не слишком большой ДП $\varepsilon \sim 1$ и при слабой диссипации: $\xi'_{xx} \ll \xi''_{xx}$. Для толстой подложки полагаем

$$\tan\left(\sqrt{k_0^2\varepsilon - k_x^2}d/2\right) = -i\tanh(x) = -i(1 - \delta),$$

$$x = \sqrt{n^2 - \varepsilon}k_0 d/2 \approx n'k_0 d/2 \gg 1, \ \ \delta = 2e^{-2x} \ll 1.$$

Имеем ДУ

$$n \approx \frac{\varepsilon + 1 + (\varepsilon^2 - 1)/2n^2}{\xi''_{xx} + i\xi'_{xx}}(1 - \delta) \quad (44)$$

и его приближенное решение $n \approx (2 + \varepsilon)(1/\xi''_{xx} - i\xi'_{xx}/\xi''^2_{xx})$ с замедлением $n' \approx (2 + \varepsilon)/\xi''_{xx} \gg 1$, поскольку $\xi''_{xx} \ll 1$. ДУ (44) и его решение получены в пренебрежении членами второго порядка малости. Оценим максимальное замедление при $\varepsilon = 3$, $\alpha = \sqrt{2}\beta'$ и при нулевом k. Имеем $n \approx 80$. Подставляя его в (44), видим, что поправка мала и равна $5/(4n^2) \approx 2 \cdot 10^{-4}$. Реально оно может быть несколько меньше за счет влияния потерь. Вычисляя поправку на ПД, видим, что она тоже мала. Решение можно уточнить, подставив его в (44). Из (44) видно, что при емкостной проводимости ПП — обратный. Проводимость может стать емкостной на высоких частотах из-за межзонного вклада. При отсутствии проводящего листа метод приводит к ДУ Ценнека $n = \sqrt{\varepsilon/(1 + \varepsilon)}$. Другой предельный случай весьма малой толщины подложки, когда $x \ll 1$ и $\tanh(x) = x$, сводится к ДУ

$$\sqrt{n^2 - 1} = \frac{\xi''_{xx} - k_x\varepsilon d/2 - i\xi'_{xx}}{\xi'^2_{xx} + (\xi''_{xx} - k_0\varepsilon d/2)^2}. \quad (45)$$

Если на какой-то частоте выполнено условие резонанса $\xi''_{xx}(\omega, \omega_c) = k_0\varepsilon d/2$, то $n = -i\sqrt{1/\xi'_{xx} - 1}$, т.е. Е-ПП — сильно диссипативный. Если есть расстройка δ: $\xi''_{xx} - k_0\varepsilon d/2 = \delta\xi'_{xx}$, то при $\delta^2 \gg 1$ получаем замедленный Е-ПП $n \approx 1/(\xi'_{xx}\delta) - i/(\xi'_{xx}\delta^3)$ при условии, что $\xi'_{xx}\delta < 1$, причем замедление зависит от d. Для характерных частот должно выполняться $k_0\varepsilon d/2 \sim 0.02$, т.е. при $d = 2\,\text{nm}$, $\varepsilon = 3$ имеем длины волн $\lambda \sim 830\,\text{nm}$. Ниже частоты перехода Е-ПП прямой, а выше — обратный. Здесь имеет место аналогия с ПП в тонкой металлической пленке [17]. Для электрической стенки следует заменить тангенс на минус котангенс. Для толстой подложки это практически не изменяет ДУ. Для тонкой подложки замедление ПП мало. В этом случае имеем ДУ

$$\sqrt{n^2 - 1} = \frac{(\varepsilon - n^2)k_0 d/2}{\varepsilon + i\xi_{xx}(\varepsilon - n^2)k_0 d/2},$$

и $n' \approx 1$ с $n'' \ll 1$. Подставляя эти оценки в ДУ, имеем уточнение

$$n^2 = 1 + \left[(1 - 1/\varepsilon)k_0 d/2 - i\xi_{xx}(1 - 1/\varepsilon)^2(k_0 d)^2/4\right]^2, \quad (46)$$

т.е. максимально и весьма малое возможное замедление $n' = 1 + k_0 d/4$ будет при большой ДП. Оба случая реализуются при трансформации проводимости от правого до левого листа графена. В этом случае полученное ДУ совпадает с (41), при этом преобразованием тангенса к тангенсу половинного аргумента оно преобразуется к квадратному уравнению, оба корня которого и дают два ДУ для электрической и магнитной стенок. Для металлической пленки $\varepsilon \approx -\varepsilon'$, поэтому замедление тем больше, чем меньше d. Отсутствие листов графена приводит к ДУ [17] $n = \sqrt{\varepsilon^2\theta^2 - \varepsilon}/\sqrt{\varepsilon^2\theta^2 - 1}$, $\theta = k_0 d\sqrt{n^2 - \varepsilon}/2$, которое при $\xi_{xx} = 0$ совпадает с (45). В металлической пленке максимальное замедление достигается при $\mathrm{Re}(\varepsilon^2\theta^2) = 1$ и примерно равно $n' = \sqrt{1/(k_0^2 d^2 \varepsilon'\varepsilon'') - \varepsilon'^2/(4\varepsilon'')}$, при этом $\varepsilon' = \omega_F^2/(\omega^2 + \omega_c^2) - \varepsilon_L$, $\varepsilon'' = \omega_F^2\omega_c/(\omega^3 + \omega\omega_c^2)$, $\varepsilon_L \sim 10$, $\omega \gg \omega_c$. Для ПП в графеновых листах на проводящей подложке должно быть $|\varepsilon|k_0 d/2 \ll |\xi''_{xx}|$ в области, где $\xi'_{xx} \ll |\xi''_{xx}|$.

Если рассмотреть несимметричную структуру с одним графеновым листом, то, трансформируя от проводимости вакуума $y_0^e = i/\sqrt{n^2-1}$ до листа и приравнивая далее проводимости вакуума с отрицательным знаком, получаем для Е-ПП

$$y^e\,\frac{y_0^e + y^e\tanh\left(d\sqrt{n^2-\varepsilon}\right)}{y^e + y_0^e\tanh\left(d\sqrt{n^2-\varepsilon}\right)} + \xi_{xx} = -y_0^e,$$

где $y^e = i\varepsilon/\sqrt{n^2-\varepsilon}$. Для медленного ПП при индуктивной проводимости и большой толщине подложки заменяем гиперболический тангенс на $1-\delta$ и получаем в первом порядке малости по δ и при $n'^2 \gg \varepsilon$ следующее ДУ:

$$n = \frac{\varepsilon + 1}{\xi''_{xx}(1 + i\xi'_{xx}/\xi''_{xx}) + \frac{\varepsilon}{n}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\delta - \frac{\varepsilon^2+1}{2n^3}} \approx \frac{\varepsilon+1}{\xi''_{xx}}(1 - i\xi'_{xx}/\xi''_{xx}).$$

В случае весьма малой толщины подложки ДУ можно записать в виде

$$\sqrt{n^2-1} = \left(\frac{1+\varepsilon}{2} - n^2\frac{1+\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)k_0 d + \xi''_{xx}(1 + i\xi'_{xx}/\xi''_{xx}) \times \left[\frac{n^2-1}{2} + \frac{n^2-\varepsilon}{2\varepsilon}\sqrt{n^2-1}k_0 d\right].$$

Полагая $d = 0$, получаем

$$\sqrt{n^2-1} = (2/\xi''_{xx})(1 - i\xi'_{xx}/\xi''_{xx}),$$

что соответствует (37). Для Н-ПП на тонкой подложке ДУ мало отличается от (38). Для электрически толстой подложки наиболее просто получить ДУ в приближении $\delta = 0$, т.е. для графена на диэлектрическом полупространстве. В этом случае оно имеет вид $y^h + \xi_{yy} = -y_0^h$, или

$$n^2 = \varepsilon - (\varepsilon - 1 + \xi_{yy}^2)^2/(4\xi_{yy}^2).$$

Если проводимость сильно реактивная, то

$$n^2 \approx \varepsilon + (\varepsilon - 1 - |\xi_{yy}^2|)^2/(4|\xi_{yy}^2|),$$

и ПП медленный при $\varepsilon > 1 + |\xi_{yy}^2|$. При $\varepsilon = 1$ получаем ДУ (38). При замедление большое:

$$n = \pm(\varepsilon-1)/\sqrt{\xi''^2_{yy} - \xi'^2_{yy}}\left(1 - i\xi'_{yy}\xi''_{yy}/(\xi''^2_{yy} - \xi'^2_{yy})\right)/2.$$

В области малых потерь $n' \approx \pm(\varepsilon-1)/(2\xi''_{yy})$, т.е. использование толстой подложки с большой ДП может привести к медленному Н-ПП. При $\varepsilon = 3$, $\alpha = \beta'$ имеем $\xi''_{yy} = \xi_0\alpha/(\pi\beta') = 0.007$, $n' = 143$. При таком замедлении влияние ПД еще мало. Однако изменение параметров может привести к увеличению ξ''_{yy}, т.е. к ограничению замедления, как и для Е-ПП. Для Н-ПП на очень тонкой подложке ДУ мало отличается от (38), т.е. $n \approx 1$. Эффект тонкой подложки можно рассмотреть, вводя ее нормированную поверхностную проводимость $\xi_d = ik_0 d(\varepsilon-1)$. Это работает, если $k_0 d\sqrt{\varepsilon} \ll 1$. В этом случае $\xi_d + \xi_{yy} = -y_0^h$, т.е. емкостная проводимость подложки уменьшает индуктивную проводимость листа и замедление.

Зависимости нормированной проводимости от замедления, вычисленные по разным формулам, приведены в таблице. На рис. 2 и 3 приведены результаты итерационного вычисления дисперсии Е-ПП (37) при разных значениях химического потенциала вплоть до

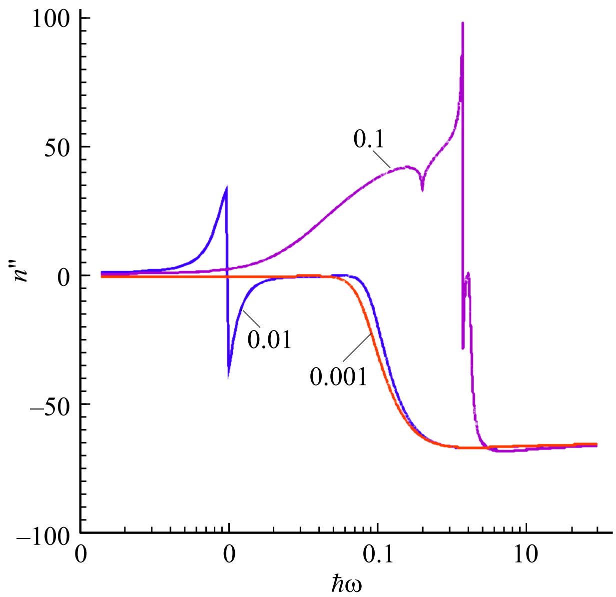

Рис. 3. Зависимость потерь $n'' = k''_x/k_0$ от $\omega\hbar$ (eV) для Е-плазмона при разных значениях химического потенциала (eV), $\omega_c = 10^{12}$ GHz.

Зависимость проводимости ξ_{xx} от замедления n': по формулам (15), (20) и (22); на основе формулы (15) при численном вычислении интеграла (11); на основе вычисления интегралов (5) и (11). $\omega_c = 10^{12}$ Hz, $n'' = n'$

Замедление n'	$\alpha = 5, \beta' = 5$					
	(15), (20)		(15), (11)		(5), (11)	
	ξ'_{xx}	ξ''_{xx}	ξ'_{xx}	ξ''_{xx}	ξ'_{xx}	ξ'_{xx}
1	0.022580	−0.027792	0.02286	−0.027706	0.02891	−0.027678
10	0.022567	−0.027679	0.02528	−0.028094	0.02552	−0.027819
100	0.021202	−0.027681	0.02809	−0.050388	0.02864	−0.048015
$\alpha = 5, \beta' = 10$						
1	0.0478122	11.26550	0.085391	11.302668	0.085382	11.30263
10	0.0478190	11.26551	0.492861	11.634970	0.025527	11.63484
100	0.0485013	11.26552	11.42283	10.409300	0.028646	10.40812
$\alpha = 10, \beta' = 5$						
1	0.028555	−0.017617	0.028902	−0.017858	0.028382	−0.017809
10	0.028531	−0.017618	0.028613	−0.018908	0.030873	−0.018418
100	0.026191	−0.017764	0.025701	−0.477282	0.026671	−0.043502

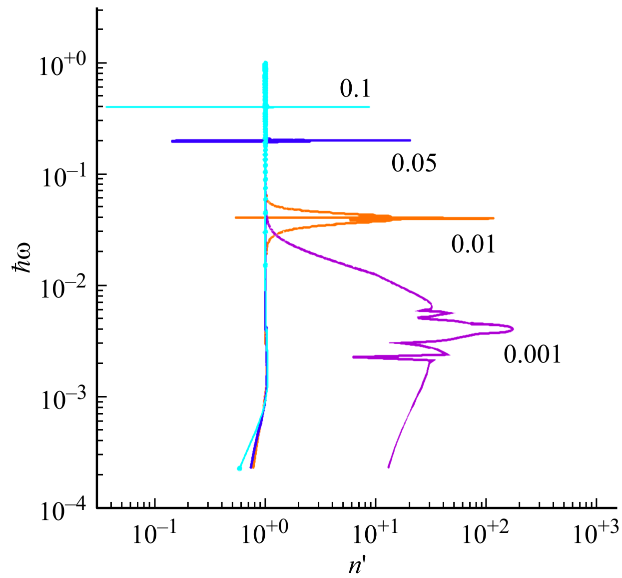

Рис. 4. Дисперсия Н-плазмона (зависимость $\omega\hbar$, eV, от замедления) при разных значениях химического потенциала (показаны в eV), $\omega_c = 10^{12}$ GHz.

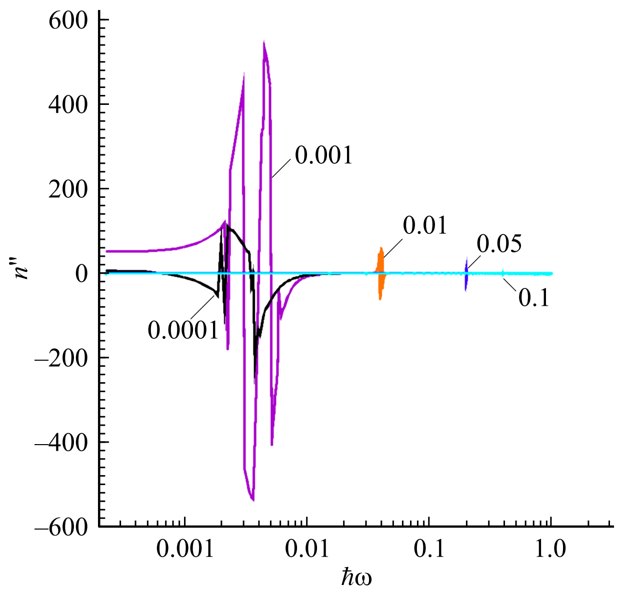

Рис. 5. Потери $n'' = k''_x/k_0$ Н-плазмона в зависимости от $\omega\hbar$ (eV) при разных значениях химического потенциала (eV), $\omega_c = 10^{12}$ GHz.

оптического диапазона, а на рис. 4, 5 — аналогичные результаты для Н-ПП (38). Все рисунки построены так, что $\mathrm{Re}(n) = n' > 0$ (за положительное направление везде взято направление движения фазы), поэтому отрицательные потери $n'' = -\mathrm{Im}(n)$ означают обратный ПП. На рис. 3 и 5 потери меняют знак на спектральных линиях, причем возможно несколько таких смен (рис. 5). Итерации для всех результатов сходятся достаточно хорошо, так что не пришлось применять специальных методов улучшения сходимости [53]. Следует отметить, что для диссипативных плазмонов спадающий участок дисперсионной характеристики (отрицательная групповая скорость) не означает, что ПП обратный. Как на спадающем, так и на возрастающем участках дисперсионных кривых возможен переход от прямого ПП к обратному. Н-ПП не взаимодействует с электронными пучками в направлении движения, поэтому для ТГЦ электроники перспективны Е-ПП [18]. В оптическом и ближнем УФ диапазонах Е-ПП сильно диссипативные, что связано с почти действительной проводимостью, но замедленные. Медленный плазмон является квантовой квазичастицей с достаточно большим импульсом $p = \hbar k_0 n'$ по сравнению с импульсом фотона. Поэтому для ПП более вероятно наблюдение эффекта Комптона рассеяния на нем электрона. Приведенные формулы работают до энергий фотонов $\hbar\omega = \gamma_0 = 2.8\,\mathrm{eV}$, когда происходит разрыв π-связей. Выше можно использовать модель проводимости $2D$-плазмы. Увеличение замедления ПП связано со снижением потерь. В этом плане использование криогенных температур для графена нецелесообразно. Более перспективным является использование оптической накачки [9–12].

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания (№ FSRR-2023-0008).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] S. Mikhailov, K. Ziegler. Phys. Rev. Lett., **99**, 016803 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.016803
[2] G.W. Hanson. J. Appl. Phys., **103**, 064302 (2008). DOI: 10.1063/1.2891452
[3] G.W. Hanson. J. Appl. Phys., **104**, 084314 (2008). DOI: 10.1063/1.3005881
[4] П.И. Буслаев, И.В. Иорш, И.В. Шадривов, П.А. Белов, Ю.С. Кившарь. Письма в ЖЭТФ, **97** (9), 619 (2013). DOI: 10.7868/S0370274X1309008
[5] K.J.A. Ooi, D.T.H. Tan. Proceed. Royal Society A, **473**, 20170433 (2017). DOI: 10.1098/rspa.2017.0433
[6] Yu.V. Bludov, A. Ferreira, N.M.R. Peres, M.I. Vasilevskiy. Intern. J. Modern Phys. B, **27** (10), 1341001 (2013). DOI: 10.1142/S0217979213410014
[7] X. Luo, T. Qiu, W. Lum, Z. Ni. Mater. Sci. Eng. R., **MSR-434**, 1 (2013). DOI: 10.1016/j.mser.2013.09.001
[8] M. Jablan, M. Soljačić, H. Buljan. Proc. IEEE, **101** (7), 1689 (2013). DOI: 10.1109/JPROC.2013.2260115
[9] V. Ryzhii, A.A. Dubinov, T. Otsuji, V. Mitin, M.S. Shur. J. Appl. Phys., **107**, 054505 (2010). DOI: 10.1063/1.3327212
[10] V. Ryzhii, I. Khmyrova, M. Ryzhii, A. Satou. Int. J. High Speed Electron. Systems, **17** (03), 521 (2007). DOI: 10.1142/S0129156407004710
[11] V. Ryzhii, A. Satou, T. Otsuji. J. Appl. Phys., **101**, 024509 (2007). DOI: 10.1063/1.2426904
[12] V. Ryzhii. Jpn. J. Appl. Phys., **45** (35), L923 (2006). DOI: 10.1143/JJAP.45.L923
[13] G.W. Hanson. IEEE Trans. Antennas Propag., **56** (3), 747 (2008). DOI: 10.1109/TAP.2008.917005
[14] Г.О. Абдуллаев, З.З. Алисултанов. ФТТ, **61** (3), 618 (2019). DOI: 10.21883/FTT.2019.03.47260.289
[15] J. Nilsson, A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres. Phys. Rev. Lett., **97**, 266801 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.266801
[16] Л.А. Вайнштейн. *Электромагнитные волны* (Радио и связь, М., 1988)
[17] М.В. Давидович. Квантовая электроника, **47** (6), 567 (2017). DOI: 10.1070/QEL16272
[18] M.V. Davidovich. Proc. SPIE, **11066**, 1106614 (2019). DOI: 10.1117/12.2521234
[19] V. Ryzhii, A.A. Dubinov, T. Otsuji, V. Mitin, M.S. Shur. J. Appl. Phys., **107**, 054505 (2010). DOI: 10.1063/1.3327212
[20] V. Ryzhii, I. Khmyrova, M. Ryzhii, A. Satou. Int. J. High Speed Electron. Systems, **17** (03), 521 (2007). DOI: 10.1142/S0129156407004710
[21] V. Ryzhii, A. Satou, T. Otsuji. J. Appl. Phys., **101**, 024509 (2007). DOI: 10.1063/1.2426904
[22] V. Ryzhii. Jpn. J. Appl. Phys., **45** (35), L923 (2006). DOI: 10.1143/JJAP.45.L923
[23] E.H. Hwang, S. Das Sarma. Phys. Rev. B, **75**, 205418 (2007); **80**, 205405 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevB.75.205418
[24] V. Despoja, D. Novko, K. Dekanic, M. Sunjić, L. Marusić. Phys. Rev. B, **87**, 075447 (2013).
[25] M.A.K. Othman, C. Guclu, F. Capolino. AP-S, **2013**, 484 (2013).
[26] M. Othman, C. Guclu, F. Capolino. Opt. Express, **21** (6), 7614 (2013). DOI: 10.1364/OE.21.007614
[27] M. Jablan, M. Soljačić, H. Buljan. Proc. IEEE, **101** (7), 1689 (2013). DOI: 10.1109/JPROC.2013.2260115
[28] J.S. Gomez-Diaz, M. Tymchenko, A. Alú. Opt. Mater. Express, **5**, 2313 (2015). DOI: 10.1364/OME.5.002313
[29] J.S. Gomez-Diaz, A. Alu. *Graphene-Based Hyperbolic Metasurfaces,* 2016 10th Europ. Conf. Antennas and Propagation (EuCAP) (Davos, Switzerland, 2016), p. 1–4. DOI: 10.1109/EuCAP.2016.7481165
[30] J.S. Gomez-Diaz, M. Tymchenko, A. Alú. Phys. Rev. Lett., **114**, 233901 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.233901
[31] D. Correas-Serrano, J.S. Gomez-Diaz, M. Tymchenko, A. Alú. Opt. Express, **23** (23), 29434 (2015). DOI: 10.1364/OE.23.029434
[32] Z. Guo, H. Jiang, H. Chen. J. Appl. Phys., **127**, 071101 (2020). DOI: 10.1063/1.5128679
[33] М.В. Давидович. Комп. опт., **45** (1), 48 (2021). DOI: 10.18287/2412-6179-CO-673
[34] М.В. Давидович. УФН, **189** (12), 1250 (2019). DOI: 10.3367/UFNr.2019.08.038643
[35] Ф. Платцман, П. Вольф. *Волны и взаимодействия в плазме твердого тела* (Мир, М., 1975)
[36] V.N. Konopsky, E.V. Alieva. Phys. Rev. Lett., **97**, 253904 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.253904
[37] P. Berini. Adv. Opt. Phot., **1** (3), 484 (2009). DOI: 10.1364/AOP.1.000484
[38] Y. Wang, E.W. Plummer, K. Kempa. Adv. Phys., **60** (5), 799 (2011). DOI: 10.1080/00018732.2011.621320
[39] A. Norrman, T. Setälä, A.T. Friberg. Opt. Lett., **38** (7), 1119 (2013). DOI: 10.1364/OL.38.001119
[40] A.A. Orlov, A.K. Krylova, S.V. Zhukovsky, V.E. Babicheva, P.A. Belov. Phys. Rev., **A90**, 013812 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevA.90.013812
[41] A. Delfan, I. Degli-Eredi, J.E. Sipe. J. Opt. Soc. Am. B, **32**, 1615 (2015). DOI: 10.1364/JOSAB.32.001615

[42] F. Chiadini, V. Fiumara, A. Scaglione, A. Lakhtakia. J. Opt. Soc. Am., **B33** (6), 1197 (2016). DOI: 10.1364/JOSAB.33.001197
[43] L.A. Falkovsky, A.A. Varlamov. Eur. Phys. J. B, **56**, 281 (2007). DOI: 10.1140/epjb/e2007-00142-3
[44] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte. Phys. Rev. Lett., **96**, 256802 (2006).
[45] P.R. Wallace. Phys. Rev., **71**, 622 (1947).
[46] K. Ziegler. Phys. Rev. Lett., **97**, 266802 (2006).
[47] S. Das Sarma, S. Adam, E.H. Hwang, E. Rossi. Rev. Mod. Phys., **83**, 407 (2011).
[48] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. Rev. Mod. Phys., **81** (1), 109 (2009).
[49] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte. Phys. Rev. B, **75**, 165407 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevB.75.165407
[50] T. Stauber, N.M.R. Peres, A.K. Geim. Phys. Rev. B, **78**, 085432 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevB.78.085432
[51] G. Lovat, G.W. Hanson, R. Araneo, P. Burghignoli. Phys. Rev. B, **87**, 115429 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevB.87.115429
[52] D.W. Berreman. J. Opt. Soc. Am., **62** (4), 502 (1972).
[53] М.В. Давидович, А.К. Кобец, К.А. Саяпин. Физика волновых процессов и радиотехнические системы, **24** (3), 18 (2021). DOI: 10.18469/1810-3189.2021.24.3.18