

Определение показателей преломления слоев фотонного кристалла из анодного оксида алюминия

© М.В. Пятнов,^{1,2} М.М. Соколов,² И.А. Киселев,² Р.Г. Бикбаев,^{1,2} П.С. Панкин,^{1,2} И.Р. Волкова,^{1,3}
В.А. Гуняков,¹ М.Н. Волочаев,¹ И.И. Рыжков,^{2,4} С.Я. Ветров,^{1,2} И.В. Тимофеев,^{1,2} В.Ф. Шабанов^{1,3}

¹ Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН — обособленное подразделение Федерального исследовательского центра Красноярский научный центр СО РАН,

660036 Красноярск, Россия

² Сибирский федеральный университет,

660041 Красноярск, Россия

³ Федеральный исследовательский центр „Красноярский научный центр СО РАН“,

660036 Красноярск, Россия

⁴ Институт вычислительного моделирования СО РАН,

660036 Красноярск, Россия

e-mail: MaksPyatnov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 31 августа 2023 г.

В окончательной редакции 29 октября 2023 г.

Принято к публикации 29 октября 2023 г.

Методом анодирования алюминиевой фольги изготовлены образцы фотонных кристаллов с различным количеством периодов структуры. Используя угловую зависимость спектров пропускания, данные просвечивающей электронной микроскопии и численное моделирование, определены показатели преломления слоев фотонных кристаллов. Определена структура образцов, толщина слоев и их пористость. Теория эффективной среды в приближениях Бруггемана, Максвелл-Гарнетта, Монека, Ландау-Лившица/Луенга, Лоренца-Лоренца, дель Рио-Циммермана-Дайва, а также комплексного показателя преломления применена для определения показателей преломления слоев. Все приближения показали близкие значения, что говорит о возможности их использования для описания гетерогенных диэлектрических сред.

Ключевые слова: фотонный кристалл, оксид алюминия, пористый материал, фотонная запрещенная зона, анодирование, эффективный показатель преломления.

DOI: 10.61011/JTF.2024.02.57083.218-23

Введение

Фотонные кристаллы (ФК) уже давно зарекомендовали себя в качестве элемента устройств микроэлектроники и оптоэлектроники [1]. Особенностью таких структур является периодическая модуляция показателя преломления в пространстве, что приводит к возникновению фотонных запрещенных зон, т.е. спектральных областей, в которых распространение фотонов через структуру запрещено в одном, в двух или во всех трех направлениях. ФК применяются в качестве волноводов, резонаторов, сенсоров и пр. [2].

Традиционными способами получения ФК являются: самосборка, травление, фотолитография, голографические методы и др. [3]. Другим широко используемым способом создания ФК является анодирование металлической фольги Al [4–7], Ti [8], Nb [9], Ta [10]. Пространственная модуляция показателя преломления при анодировании достигается за счет изменения пористости оксида вдоль нормали к поверхности пленки.

Метод позволяет получать анодный ФК с различными параметрами: пористостью, толщинами и количеством слоев, микроструктурой. Большая вариативность достигается благодаря тому, что процесс анодирования можно

точно контролировать, меняя характеристики тока или напряжения анодирования, температуру и концентрацию электролита, чистоту и вид используемых материалов, способ полировки образца (химический, механический). Все это позволяет получить ФК с определенным видом запрещенной зоны. По сравнению с другими указанными материалами преимущества анодного оксида алюминия заключаются в его механической, термической и химической стабильности [11–14].

Благодаря возможности гибкой настройки зонной структуры и сильной локализации света в образце на частотах собственных мод ФК из анодного оксида алюминия используются в качестве оптических фильтров [15–19], датчиков [20–23], лазеров и усилителей люминесценции [24,25].

В рамках настоящей работы нами были изготовлены несколько ФК из анодного оксида алюминия, содержащих различное количество периодов. Была проанализирована структура ФК и их спектральные свойства при нормальном и наклонном падении. Используя метод трансфер матрицы, были определены значения эффективных показателей преломления слоев ФК. С помощью анализа просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) изображений ФК была определена пори-

стость их слоев. Используя несколько различных приближений эффективной среды, были получены значения эффективных показателей преломления слоев ФК.

1. Образцы и методика эксперимента

Для получения ФК использовалась алюминиевая фольга чистоты 99.99% и толщиной 500 μm. Образцы обезжиривались в изопропиловом спирте, а затем в этаноле. Перед анодированием была проведена электрохимическая полировка алюминия в растворе хромового ангидрида (185 g/l) и ортофосфорной кислоты (1480 g/l) при T = 80°C и плотности тока j = 1.0 A/cm² до получения зеркальной поверхности. Процесс анодирования алюминиевой фольги осуществлялся в двухэлектродной электрохимической ячейке в 1.0 M растворе H₂SO₄ на участке, ограниченном уплотнительным кольцом. Площадь анодирования составляла S = 7.07 cm². Температура электролита во время анодирования поддерживалась на уровне 2 ± 1°C, при этом электролит перемешивался с помощью мешалки. Профиль тока задавался в виде прямоугольного сигнала [26]. Плотность тока переключалась с j₁ = 0.41 mA/cm² до j₂ = 2.27 mA/cm² в течение одной стадии. Временная продолжительность каждой стадии определялась временем протекания заряда величины Q. Заряд первой стадии Q₁ = 1.56 C. На каждой последующей стадии заряд снижался на 0.1%, с целью компенсации эффекта химического травления верхних пористых оксидных слоев в кислотном электролите [26]. Время первой стадии с силой тока I₁ = 2.9 mA составляло 538 s, второй с силой тока I₂ = 16.05 mA – 97 s. Рис. 1 показывает параметры тока, поддерживаемые для получения образца. В рамках одного цикла напряжение изменялось от 6.7 до 22 V.

Были выращены несколько образцов с различным количеством периодов N равным 20, 30, 50, 90. После анодирования пористые оксидные пленки неоднократно промывались в деионизованной воде и были высушены

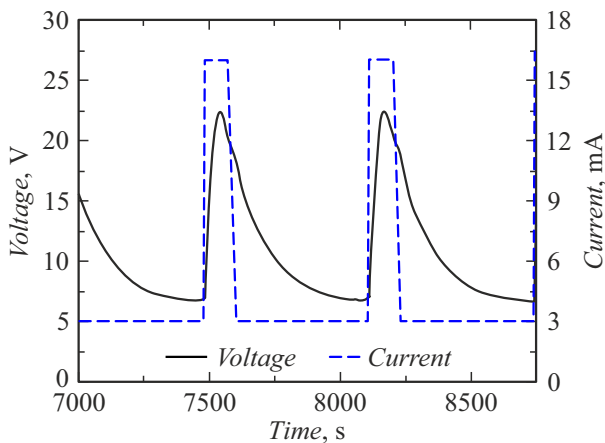


Рис. 1. Зависимость силы тока, подаваемого на образец, и зарегистрированного напряжения от времени в интервале от 7000 до 8750 s.

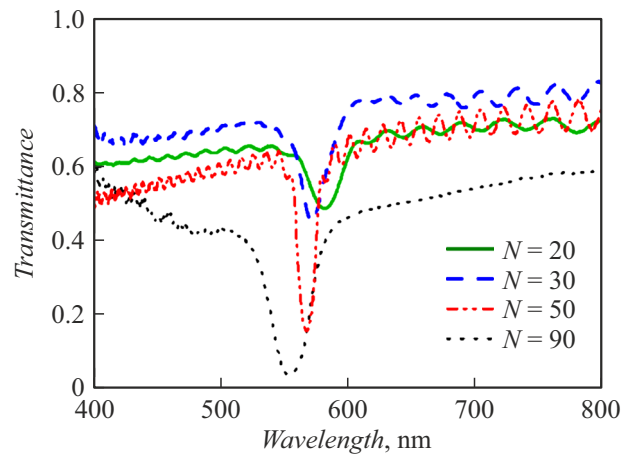


Рис. 2. Измеренные спектры пропускания ФК из анодного оксида алюминия с различным количеством периодов N.

на воздухе. Остаточный алюминиевый субстрат ставлялся в водном растворе хлорида меди (0.25 M) и соляной кислоты (5 vol.%).

Морфология ФК из пористого анодного оксида алюминия была исследована с помощью просвечивающего электронного микроскопа HT7700 (Hitachi). Спектральные свойства образцов были проанализированы с помощью спектрометра Ocean FX UV-VIS в диапазоне 500–800 nm при нормальном и угловом падении.

2. Результаты и обсуждение

2.1. Угловые зависимости спектров пропускания

На рис. 2 показаны измеренные спектры пропускания полученных образцов с различным количеством периодов N при нормальном падении света. В спектрах наблюдается ярко выраженный провал, соответствующий фотонной запрещенной зоне. Увеличение количества периодов приводит не только к уменьшению коэффициента пропускания на длинах волн, соответствующих стоп-зоне, но и к сдвигу минимума пропускания в коротковолновую область [27]. Это явление обусловлено химическим травлением пористой структуры анодного ФК в кислотном электролите, что приводит к большей пористости образцов с большим N из-за большего времени, необходимого для их синтеза. С ростом пористости эффективный показатель преломления слоев ФК снижается [28], из-за чего происходит синий сдвиг фотонной запрещенной зоны [29]. При близости показателей преломления слоев ФК n₁ ≈ n₂ спектральное положение фотонной запрещенной зоны удовлетворяет закону Брэгга-Снелла [30]:

$$m\lambda = 2d\sqrt{n_{\text{eff}}^2 - n_{\text{air}}^2 \sin^2 \theta}, \tag{1}$$

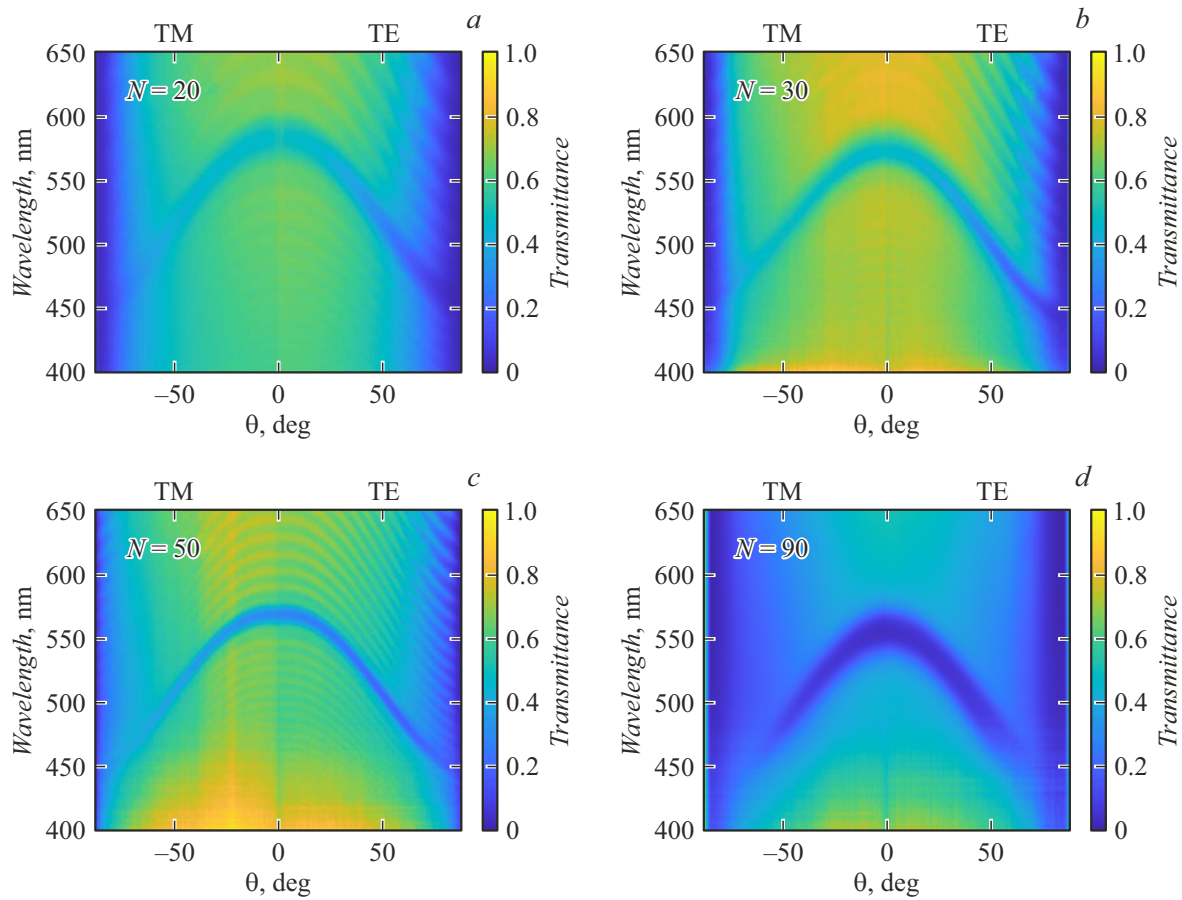


Рис. 3. Измеренные угловые зависимости спектров пропускания фотонных кристаллов из анодного оксида алюминия с различным количеством периодов N . Положительные значения углов соответствуют ТЕ линейной поляризации падающего света, отрицательные значения углов соответствуют ТМ линейной поляризации падающего света. $N = 20$ (a), 30 (b), 50 (c), 90 (d).

где λ — длина волны центра запрещенной зоны, m — порядок зоны, d — период структуры, θ — угол падения, n_{eff} — эффективный показатель преломления ФК, n_{air} — показатель преломления окружающей среды.

Эффективный показатель преломления ФК и показатели преломления n_1 и n_2 слоев связаны друг с другом и толщинами слоев d_1 и d_2 как:

$$n_{\text{eff}}^2 = \frac{d_1}{d_1 + d_2} n_1^2 + \frac{d_2}{d_1 + d_2} n_2^2. \quad (2)$$

Соотношение (1) является частным случаем более общей формулы, выражающей закон Брэгга-Снелла [31]:

$$\frac{\lambda}{2} m = d_1 \sqrt{n_1^2 - n_{\text{air}}^2 \sin^2 \theta} + d_2 \sqrt{n_2^2 - n_{\text{air}}^2 \sin^2 \theta}. \quad (3)$$

Ширина запрещенной зоны $\Delta\lambda$ и λ связаны с показателями преломления слоев ФК n_1 и n_2 соотношением [32]:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{4}{\pi m} \frac{|n_1 - n_2|}{n_1 + n_2}. \quad (4)$$

На рис. 3 показана измеренная угловая зависимость спектра пропускания изготовленных образцов ФК с

Таблица 1. Толщины слоев d_1 и d_2 , их показатели преломления n_1, n_2 , найденные из угловых зависимостей спектров пропускания по соотношениям (3) и (4) и эффективные показатели преломления ФК n_{eff} , согласно (2), для образцов с различным количеством периодов N

N	d_1 , nm	d_2 , nm	n_1	n_2	n_{eff}
20	83	89	1.65	1.73	1.69
30	114	68	1.59	1.52	1.56
50	86	94	1.54	1.60	1.57
90	107	59	1.54	1.46	1.51

разным количеством периодов структуры. Используя соотношения (3) и (4), были вычислены величины периодов ФК и их эффективные показатели преломления (табл. 1). Полученные значения n_{eff} близки к известным из литературы [27,33].

Рис. 4 показывает рассчитанную методом трансфер-матрицы угловую зависимость спектров пропускания образца с $N = 50$ и параметрами, соответствующими табл. 1 (3 строка). Мнимая часть показателей прелом-

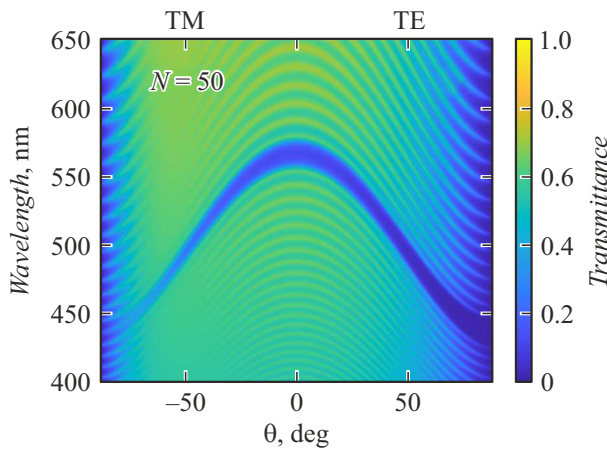


Рис. 4. Рассчитанная угловая зависимость спектров пропускания образца с $N = 50$. Параметры ФК: $d_1 = 86 \text{ nm}$, $n_1 = 1.54 + 0.018i$, $d_2 = 94 \text{ nm}$, $n_2 = 1.6 + 0.018i$.

ления была взята в виде $0.018i$ для обоих слоев. При моделировании не учитывалась дисперсия материалов ФК и неоднородность образца. Необходимо отметить, что с течением времени наблюдается деградация образцов, что выражается в уменьшении величины пропускания в центре стоп-зоны, но не изменении ее положения. Рассчитанный спектр дает качественное согласие с измеренным, ср. с рис. 3, с.

2.2. Данные ПЭМ

В процессе роста кристалла происходит ветвление пор (рис. 5). По данным ПЭМ изображений полученный образец имеет слоистую структуру, высокопористые слои чередуются с низкопористыми, за счет чего создается периодическая модуляция показателя преломления. Известно, что напряжение, а не плотность тока, является параметром управления структурой при циклическом анодировании [27].

Определение толщин слоев и вычисление пористости ФК было выполнено путем графического анализа данных с помощью открытого программного обеспечения ImageJ [33]. Его принцип работы основан на анализе контраста оттенков серого цвета на изображении. Отношение количества пикселей, цвет которых лежит внутри определенного интервала к общему количеству пикселей изображения, дает искомую пористость. Используя ПЭМ изображения ФК с $N = 50$ были получены значения толщин d_1 и d_2 и пористостей f слоев, которые оказались равны $d_1 = (95 \pm 10) \text{ nm}$, $f_1 = (26 \pm 5)\%$ для высокопористого слоя и $d_2 = (110 \pm 10) \text{ nm}$, $f_2 = (36 \pm 5)\%$ для низкопористого. Отметим, что значение периода структуры $d = d_1 + d_2 = (205 \pm 10) \text{ nm}$ оказалось больше значения, полученного из угловой зависимости спектров пропускания $d = 180 \text{ nm}$. Причина этого может заключаться в значительном искривлении пор по мере роста кристалла

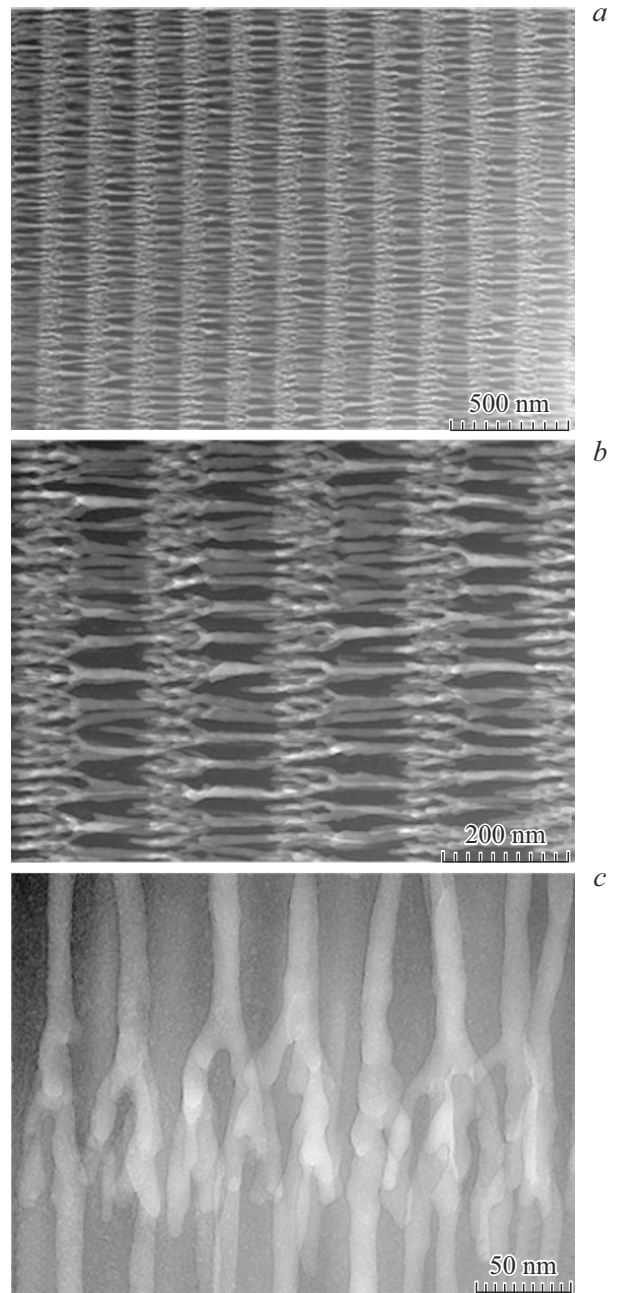


Рис. 5. ПЭМ изображения поперечного сечения ФК с количеством периодов $N = 50$ (a). Изображения образца с низким (a) средним (b) и высоким (c) увеличением. Поры и оксид алюминия показаны светло-серым и темно-серым цветами соответственно.

в процессе анодирования, а также в величине погрешности электронного микроскопа, которая составляет около 10%.

Существуют различные методы описания оптических свойств фотонных кристаллов на основе приближения эффективной среды [34], среди которых подход Бругемана (5) [35], Максвелл-Гарнетта (6) [36,37], Ландау-Лившица/Луенга (7) [38], Монеке (8) [39,40], Лоренца-Лоренца (9) [41], дель Рио-Циммермана-

Таблица 2. Сравнение эффективных показателей преломления n_1 и n_2 слоев ФК для различных методов эффективной среды

Метод эффективной среды	n_1	n_2
Бруггеман	1.56	1.48
Максвелл Гарнетт	1.57	1.49
Ландау–Лившиц /Луенг	1.56	1.48
Монке	1.56	1.48
Лоренц–Лоренц	1.53	1.44
dRZW	1.52	1.44
Комплексный показатель преломления	1.57	1.49

Дайва dRZW (10) [42], метод комплексного показателя преломления (11). Каждая из теорий описывает эффективную диэлектрическую проницаемость гетерогенной двухкомпонентной среды, содержащей включения различной формы и объемной доли компонентов.

Используя полученные значения пористости для образца, содержащего $N = 50$ периодов, были рассчитаны значения эффективных показателей преломления слоев ФК (табл. 2). В качестве показателей преломления материалов сред были взяты $n_m = 1.77$ для Al_2O_3 и $n_p = 1$ для воздуха.

$$f \left(\frac{n_p^2 - n^2}{n_p^2 + 2n^2} \right) + (1 - f) \left(\frac{n_m^2 - n^2}{n_m^2 + 2n^2} \right) = 0, \quad (5)$$

$$n = n_m \sqrt{\frac{f}{\frac{1-f}{3} + \frac{n_m^2}{(n_p^2 - n_m^2)}}}, \quad (6)$$

$$n = (fn_p^{2/3} + (1-f)n_m^{2/3})^{3/2}, \quad (7)$$

$$n = \sqrt{\frac{(2fn_p^2 + (1-f)n_m^2)^2 + (n_p n_m)^2}{(1+f)n_p^2 + (2-f)n_m^2}}, \quad (8)$$

$$n = \sqrt{\frac{2 \left(f \frac{(n_p^2 - 1)}{n_p^2 + 2} + (1-f) \frac{(n_m^2 - 1)}{n_m^2 + 2} \right) + 1}{1 - \left(f \frac{(n_p^2 - 1)}{n_p^2 + 2} + (1-f) \frac{(n_m^2 - 1)}{n_m^2 + 2} \right)}}, \quad (9)$$

$$n = n_m \frac{1 + f \left(\sqrt{\frac{n_p}{n_m}} - 1 \right)}{1 + f \left(\sqrt{\frac{n_p}{n_m}} + 1 \right)}, \quad (10)$$

$$n = fn_p + (1-f)n_m. \quad (11)$$

Все использованные подходы дают близкие значения, отличающиеся во втором знаке, что в целом говорит о хорошей применимости метода эффективной среды при рассмотрении диэлектрических гетерогенных сред, к которым относятся ФК из анодного оксида алюминия. В то же время следует отметить, что каждая из формул эффективной среды имеет свои ограничения применимости. Так формула Максвелл–Гарнетта выводится в допущении малой концентрации одного из компонентов

нанокомпозита. Формула Бруггемана, напротив, предполагает близкие концентрации компонентов. Обе упомянутые формулы выводятся в приближении неограниченного в пространстве композита, поэтому их применение к тонким слоям фотонного кристалла вносит дополнительную погрешность, связанную с тем, что сфера Лоренца, окружающая точку с искомым показателем преломления, выходит за пределы однородного слоя. Наибольшее отклонение наблюдается у метода dRZW, который базируется на теореме взаимности Келлера для эффективной проводимости композитного материала [43].

Заключение

Таким образом, был изготовлен ряд образцов фотонных кристаллов из оксида алюминия с использованием прямоугольного профиля временной динамики анодного тока. Изучено влияние количества периодов структуры на спектральные свойства образцов. Используя угловую зависимость спектров пропускания ФК и ПЭМ изготовленных образцов, были определены их структура, толщины слоев и пористость. Для нахождения показателей преломления слоев кристалла была использована теория эффективной среды в приближениях Бруггемана, Максвелл–Гарнетта, Монке, Ландау–Лившица/Луенга, Лоренца–Лоренца, dRZW. Методом матрицы переноса произведено численное моделирование спектров пропускания ФК. Перечисленные приближения показали близкие значения, что говорит о возможности их использования для описания гетерогенных диэлектрических сред.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности № 22-22-20078, <https://rscf.ru/project/22-22-20078/>.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] J.D. Joannopoulos, P.R. Villeneuve, Sh. Fan. Solid State Commun., **102** (2-3), 165 (1997). DOI: 10.1016/S0038-1098(96)00716-8
- [2] X. Lv, B. Zhong, Y. Huang, Z. Xing, H. Wang, W. Guo, X. Chang, Z. Zhang. Chin. J. Mech. Eng., **36**, 39 (2023). DOI: 10.1186/s10033-023-00836-2
- [3] А.А. Елисеев, А.В. Лукашин. *Функциональные наноматериалы* (Физматлит, М., 2010)
- [4] C.S. Law, S.Y. Lim, A.D. Abell, N.H. Voelcker, A. Santos. Nanomaterials, **8** (10), 788 (2018). DOI: 10.3390/nano8100788

- [5] G. Shang, D. Bi, V.S. Gorelik, G. Fei, L. Zhang. *Mat. Tod. Comm.*, **34**, 105052 (2023). DOI: 10.1016/j.mtcomm.2022.105052
- [6] G.D. Sulka, K. Hnida. *Nanotechnology*, **23**, 075303 (2012).
- [7] S.E. Kushnir, T.Y. Pchelyakova, K.S. Napolskii. *J. Mater. Chem. C*, **6**, 12192 (2018). DOI: 10.1039/C8TC04246B
- [8] P. Roy, S. Berger, P. Schmuki. *Angewandte Chemie International Edition*, **50** (13), 2904 (2011). DOI: 10.1002/anie.201001374
- [9] A. Mozalev, R.M. Vázquez, C. Bittencourt, D. Cossement, F. Gispert-Guirado, E. Llobet, H. Habazaki. *J. Mater. Chem. C*, **2**, 4847 (2014). DOI: 10.1039/C4TC00349G
- [10] I. Sieber, H. Hildebrand, A. Friedrich, P. Schmuki. *J. Electroceram.*, **16** (1), 35 (2006). DOI: 10.1007/s10832-006-4351-7
- [11] K.V. Chernyakova, E.N. Muratova, I.A. Vrublevsky, N.V. Lushpa. *J. Phys.: Conf. Ser.*, **2086**, 012025 (2021). DOI: 10.1088/1742-6596/2086/1/012025
- [12] Y. Suzuki, K. Kawahara, T. Kikuchi, R.O. Suzuki, S. Natsui. *J. Electrochem. Soc.*, **166**, C261 (2019). DOI: 10.1149/2.0221912jes
- [13] T. Shimizu, K. Matsuura, H. Furue, K. Matsuzak. *J. Eur. Ceram. Soc.*, **33** (15–16), 3429 (2013). DOI: 10.1016/j.jeurceramsoc.2013.07.001
- [14] M. Sarraf, B. Nasiri-Fabrizi, A. Dabbagh, W.J. Basirun, N.L. Sukiman. *Ceram. Int.*, **46** (6), 7306 (2020). DOI: 10.1016/j.ceramint.2019.11.227
- [15] G.L. Shang, G.T. Fei, Y. Zhang, P. Yan, S.H. Xu, H.M. Ouyang, L. De Zhang. *Sci. Rep.*, **4** (1), 3601 (2014). DOI: 10.1038/srep03601
- [16] A. Santos, C.S. Law, D.W.C. Lei, T. Pereira, D. Losic. *Nanoscale*, **8** (43), 18360 (2016).
- [17] C.S. Law, Sukarno, A. Santos. *Nanoscale*, **9** (22), 7541 (2017). DOI: 10.1039/C7NR02115A
- [18] G. Macias, J. Ferre-Borrull, J. Pallares, L.F. Marsal. *Nanoscale Res. Lett.*, **9** (1), 315 (2014). DOI: 10.1186/1556-276X-9-315
- [19] A.R. Gómez, L.K. Acosta, J. Ferré-Borrull, A. Santos, L.F. Marsal. *ACS Appl. Nano Mat.*, **6** (7), 5274 (2023). DOI: 10.1021/acsanm.2c05356
- [20] Y. Li, C. Yan, X. Chen, Y. Lei, B.-C. Ye. *Sensor, Actuat. B-Chem.*, **350**, 130835 (2022). DOI: 10.1016/j.snb.2021.130835
- [21] I. Garrido-Cano, L. Pla, S. Santiago-Felipe, S. Simon, B. Ortega, B. Bermejo, A. Lluch, J.M. Cejalvo, P. Eroles, R. Martinez-Manez. *ACS Sens.*, **6** (3), 1022 (2021). DOI: 10.1021/acssensors.0c02222
- [22] U. Malinovskis, A. Dutovs, R. Poplausks, D. Jevdokimovs, O. Graniel, M. Bechelany, I. Muiznieks, D. Erts, J. Prikulis. *Coatings*, **11** (7), 756 (2021). DOI: 10.3390/coatings11070756
- [23] M. Ashurov, V. Gorelik, K. Napolskii, S. Klimonsky. *Phot. Sens.*, **10**, 147 (2020). <https://doi.org/10.1007/s13320-019-0569-2>
- [24] H. Masuda, M. Yamada, F. Matsumoto, S. Yokoyama, S. Mashiko, M. Nakao, K. Nishio. *Adv. Mater.*, **18** (2), 213 (2006). DOI: 10.1002/adma.200401940
- [25] W. Yang, B. Wang, A. Sun, J. Liu, G. Xu. *Mater. Lett.*, **178**, 197 (2016). DOI: 10.1016/j.matlet.2016.05.001
- [26] L. Yisen, C. Yi, L. Zhiyuan, H. Xing, L. Yi. *Electr. Comm.*, **13**, 1336 (2011). DOI: 10.1016/j.elecom.2011.08.008
- [27] S.E. Kushnir, K.S. Napolskii. *Mat. Des.*, **144**, 140–150 (2018). DOI: 10.1016/j.matdes.2018.02.012
- [28] T.C. Choy. *Effective Medium Theory: Principles and Applications* (Clarendon Press, Oxford, 1999)
- [29] A. Santos, V.S. Balderrama, M. Alba, P. Formentín, J. Ferre-Borrull, J. Pallarés, L.F. Marsal. *Adv. Mater.*, **24** (8), 1050 (2012). DOI: 10.1002/adma.201104490
- [30] В.С. Горелик, М.М. Яшин, Д. Би, Г. Тао Феи. *Опт. и спектр.*, **124**, 171 (2018). DOI: 10.21883/OS.2018.02.45519.177-17
- [31] А. Ярив, П. Юх. *Оптические волны в кристаллах*, пер. с англ. (Мир, М., 1987)
- [32] A. Hierro-Rodriguez, P. Rocha-Rodrigues, F. Valdés-Bango, J.M. Alameda, P.A.S. Jorge, J.L. Santos, J.P. Araujo, J.M. Teixeira, A. Guerreiro. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **48**, 455105 (2015). DOI: 10.1088/0022-3727/48/45/455105
- [33] Электронный ресурс. Режим доступа: <https://imagej.nih.gov/ij/index.html>
- [34] Л.А. Апресян, Д.В. Власов, Д.А. Задорин, В.И. Красовский. *ЖТФ*, **87**, 10 (2017). DOI: 10.21883/JTF.2017.01.44011.1841
- [35] D.A. Bruggeman. *Ann. Phys.*, **24**, 636 (1935).
- [36] J.C. Maxwell-Garnett. *Phil. Trans. R Soc. Lond.*, **203**, 385 (1904).
- [37] S.Ya. Vetrov, A.Yu. Avdeeva, M.V. Pyatnov, I.V. Timofeev. *Комп. опт.*, **44** (3), 319 (2020). DOI: 10.18287/2412-6179-CO-637
- [38] J. Monecke. *J. Phys: Condens. Matter*, **6**, 907 (1994). DOI: 10.1088/0953-8984/6/4/010
- [39] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред* (Физматлит, М., 2005)
- [40] H. Looyenga. *Physica*, **31** (3), 401 (1965). DOI: 10.1016/0031-8914(65)90045-5
- [41] B. Ersfeld, B. Felderhof. *Phys. Rev. E*, **57**, 1118 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevE.57.1118
- [42] D. Estrada-Wiese, J.A. del Rio. *Rev. Mex. Fis.*, **64**, 72 (2018). DOI: 10.31349/RevMexFis.64.72
- [43] J.A. del Rio, R.W. Zimmerman, R.A. Dawe. *Sol. St. Comm.*, **106**, 183 (1998). DOI: 10.1016/S0038-1098(98)00051-9