

03  
**Скейлинг изменения интенсивности течений под воздействием внешнего шума**

© Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова

Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,  
119192 Москва, Россия  
e-mail: jilenko@imec.msu.ru

Поступило в Редакцию 26 сентября 2023 г.  
В окончательной редакции 14 декабря 2023 г.  
Принято к публикации 24 декабря 2023 г.

Численно исследовано влияние шума на изменение интенсивности осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости в сферических слоях при вращении границ с равными угловыми скоростями. Шум вносился в течения за счет добавления случайных флуктуаций с нулевым средним значением к постоянной во времени средней скорости вращения внутренней сферы. Исследован отклик течений на внесение двух видов шума с отличающимися спектрами. Обнаружены степенные зависимости между возрастанием осредненных во времени параметров течений и увеличением амплитуды шума, качественно сохраняющие свой вид при изменении спектра шума, толщины сферического слоя и чисел Рейнольдса. Установлено, что шумы с одной и той же амплитудой, но с разными видами спектра, приводят к отличающимся более чем на порядок относительным изменениям осредненных во времени величин моментов сил трения, кинетической энергии течений и среднеквадратичных отклонений кинетической энергии.

**Ключевые слова:** шум, случайные флуктуации скорости вращения, сферическое течение Куэтта, управление течениями.

DOI: 10.61011/JTF.2024.02.57072.246-23

## Введение

Присутствие случайных во времени флуктуаций является типичным свойством большинства природных процессов и систем [1]. Такие флуктуации отличаются как видом спектра, так и широким диапазоном временных масштабов, изменяющихся от сезонных колебаний интенсивности солнечной радиации, поступающей в атмосферу Земли [2], до кратковременных осцилляций скорости вращения Земли [3]. Случайные флуктуации скорости вращения Земли интенсивно исследуются в настоящее время как с целью совершенствования моделей спутниковой навигации [4], так и в связи с изучением сейсмической активности [5]. Случайные флуктуации являются внешним шумом, воздействующим на крупномасштабные течения как в атмосфере, так и в жидком ядре Земли. Такие течения формируются в сферической геометрии с вращением, поэтому в настоящей работе рассматривается модельное сферическое течение Куэтта, вызываемое воздействием однонаправленного вращения сферических границ на вязкую несжимаемую жидкость, находящуюся между этими границами. Шум, добавляемый к течениям жидкости, может приводить к генерации колебаний и турбулентности [6,7], увеличению порога генерации магнитных полей [8]. Под влиянием шума возможно появление отличающихся между собой неустойчивых состояний [9,10], а также смещение положения предела устойчивости течений [11–13]. Два последних из перечисленных выше эффектов наблюдались в течениях во вращающихся сферических

слоях [10,11,13] в случае, когда „белый“ шум вносился путем добавления случайных флуктуаций скорости вращения с нулевым средним значением к постоянной во времени средней скорости вращения внутренней сферы. Такой же способ внесения различных видов шума в течения рассматривается в настоящей работе. Такие возмущения, вне зависимости от вида шума, симметричны относительно экватора и оси вращения. В связи с этим при расчетах течений с таким способом внесения шума использовалось осесимметричное приближение [11,13], допустимость использования которого рассматривается ниже.

Белый шум с равными амплитудами спектральных составляющих во всем используемом диапазоне частот, с одной стороны, и периодические колебания с единственной частотой, с другой, являются предельными случаями возмущений при моделировании неравномерности во времени вращения Земли. Численно показано, что во вращающихся сферических слоях и периодические колебания скорости вращения [14], и белый шум, добавляемые к постоянной во времени средней скорости вращения [11,13], приводят к генерации среднего течения. Для изучения эффектов, возникающих из-за неравномерности вращения Земли, используется не только белый шум, который характеризуется отсутствием временных корреляций, и его спектр можно представить как  $1/f^\alpha$ , где  $\alpha = 0$ , но и другие виды шума, с ненулевым временем корреляции:  $\alpha \neq 0$  [4]. При этом остается открытым вопрос о характере зависимости параметров течений от вида спектра и амплитуды подводимого к течению шума,

что и является целью исследования настоящей работы. В настоящей работе не ставилась цель исследовать такие хорошо изученные в случае периодических осцилляций скорости вращения одной из сферических границ при однонаправленном вращении явления, как неустойчивость течений [15] и/или инерционные волны [16]. Поэтому здесь рассматривается влияние шума на осредненные во времени параметры течений.

В настоящей работе численно на основе решения полной системы уравнений Навье–Стокса для изотермического течения вязкой несжимаемой жидкости исследуется зависимость моментов сил трения, средних величин кинетической энергии течений и флуктуаций последних от амплитуды шума. Исследуется отклик течений, развивающихся во вращающихся сферических слоях на два вида шума, отличающихся наклоном спектра. Показано, что при используемых в настоящей работе видах шума соотношениях размеров сферических границ и числах Рейнольдса зависимости относительных величин каждого из перечисленных выше параметров от амплитуды шума описываются качественно подобными степенными зависимостями.

## 1. Численный метод и область исследования

Изотермические течения вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся сферическом слое описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности, которые в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{U} \times \text{rot } \mathbf{U} - \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} \right) - \nu \text{rot rot } \mathbf{U},$$

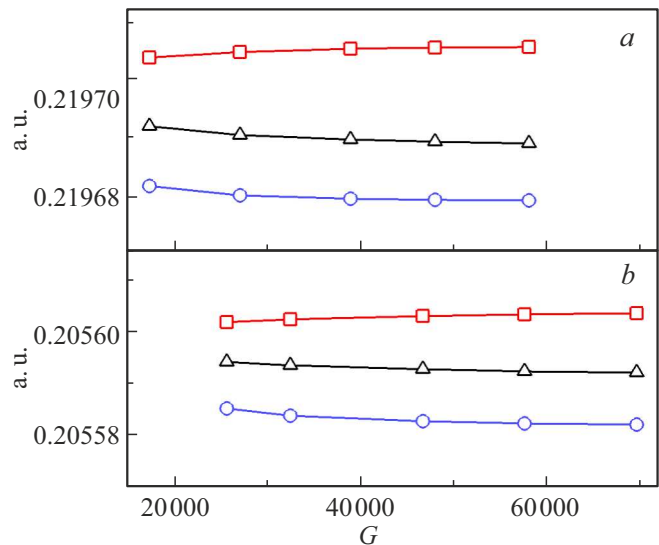
$$\text{div } \mathbf{U} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{U}$  — поле скорости,  $p$  — давление, оба параметра являются функциями времени и координат,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости в слое. Граничные условия прилипания и непротекания в сферической системе координат с радиальным ( $r$ ), полярным ( $\theta$ ) и азимутальным ( $\varphi$ ) направлениями имеют вид

$$u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t) r_k \sin \theta, \quad u_r(r = r_k) = 0,$$

$$u_\theta(r = r_k) = 0, \quad k = 1, 2,$$

где  $u_\varphi$ ,  $u_r$ ,  $u_\theta$  — соответственно азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — угловые скорости вращения, а  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы внутренней и внешней сфер соответственно (индекс 1 относится к внутренней сфере, 2 — к внешней). Численный метод решения основан на консервативной конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству и полуявной схеме Рунге–Кутты 3-го порядка точности для интегрирования по времени [17]. В схему интегрирования во времени



**Рис. 1.** Зависимость нормированных величин  $E_\varphi$  (красные квадратные символы, вертикальная ось слева),  $T$  (черные треугольные символы) и  $E_\psi$  (синие круглые символы) от количества узлов расчетной сетки  $G$  при  $\text{Re} = 4000$ ;  $a$  —  $\delta = 1$ ,  $b$  —  $\delta = 1.76$ .

включена оценка локальной погрешности и автоматического выбора шага по времени. При дискретизации по пространству сохраняются некоторые важные свойства уравнений Навье–Стокса, включая точное сохранение закона сохранения энергии нелинейными членами и членами градиента давления [17]. Алгоритм и особенности используемых в расчете конечно-разностных схем подробно исследованы в работе [17], а в частном случае трехмерной задачи в сферической системе координат с использованием неравномерных по  $\theta$  и  $r$  сеток — в работе [18].

Решалась система уравнений, описывающая нестационарные течения, формирующиеся под действием вращения границ с равными средними угловыми скоростями  $\Omega_0$ , симметричные относительно плоскости экватора и оси вращения. Рассматривались две конфигурации сферического слоя с относительной толщиной слоя  $\delta = 1$  и  $1.76$ , где  $\delta = (r_2 - r_1)/r_1$ . Слой  $\delta = 1$  позволяет проводить сравнение с результатами экспериментов. Например, в [11,13] получено хорошее соответствие расчетных и экспериментальных результатов по возрастанию  $u_\varphi$  с увеличением амплитуды белого шума. Слой  $\delta = 1.76$  ближе к известным на сегодняшний день данным о внутреннем строении Земли. В расчетах использовались равномерные по  $\theta$  и неравномерные по  $r$  сетки с соотношением наименьшего размера сетки (вблизи сферических границ) к наибольшему размеру, равным 0.5. Проведено параметрическое исследование, направленное на выбор количества узлов расчетной сетки при разных  $\delta$ . Сходимость результатов по мере увеличения количества узлов показана на рис. 1 на мере нормированных величин кинетической энергии те-

чения и момента сил трения, передаваемого на внешнюю сферу. Кинетическая энергия течений представлена в виде суммы азимутальной  $E_\varphi$  и меридиональной  $E_\psi$  составляющих, определяемых интегрированием соответствующих компонент скорости течения по всему объему сферического слоя:

$$E_\varphi = \int u_\varphi^2(r, \theta, t), \quad E_\psi = \int (u_r^2(r, \theta, t) + u_\theta^2(r, \theta, t)).$$

Далее компоненты кинетической энергии в отсутствие дополнительного шума будут обозначаться как  $E_{\varphi 0}$  и  $E_{\psi 0}$ , а при добавлении шума —  $E_{\varphi n}$  и  $E_{\psi n}$ . Для рассматриваемого вида течений выполняется условие  $E_\psi \ll E_\varphi$ . Момент сил трения  $M$  определяется как [19]:

$$M = \nu r_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right\} \sin^2 \theta d\theta d\varphi.$$

Показанные на рис. 1 величины представляют собой нормированные на квадрат максимальной скорости течения компоненты кинетической энергии:  $E_\varphi^{norm} = E_{\varphi 0}/(\Omega_0 r_2)^2$ ,  $E_\psi^{norm} = E_{\psi 0}/(\Omega_0 r_2)^2$ , а также безразмерный момент сил трения  $M^{norm} = M/(\nu r_2^3 \Omega_0)$ . В соответствии с данными, представленными на рис. 1, в случае  $\delta = 1$  выбрано общее количество узлов  $4.8 \cdot 10^4$ , и в случае  $\delta = 1.76$  общее количество узлов —  $5.76 \cdot 10^4$ . Шаг по времени  $\Delta t$  во всех случаях выбирался постоянным:  $\Delta t = 6 \cdot 10^{-4}$  s, что обеспечивало 1178 и 2356 шагов по времени за один оборот сфер. Дополнительный шум вносился в течение на каждом шаге по времени в виде случайных флуктуаций скорости вращения внутренней сферы:  $\Omega(t) = \Omega_0 + N rn(j)$ . Здесь  $N$  — амплитуда шума и  $rn(j)$  — псевдослучайное число, величина которого изменяется на каждом шаге по времени. Эти числа друг за другом выбирались из заранее рассчитанной для выбранного вида спектра последовательности со стандартным нормальным распределением и средним нулевым значением. Номер числа соответствовал номеру шага по времени. В расчетах использовались два вида шумов с наклонами спектров  $\alpha = 0.1$  и  $1$ . Первый вид шума близок к белому, второй вид — хорошо изученный фликкер-шум. Способы получения шума с различными видами спектра можно найти, например, в [20]. Так же как и в [11,13], использовалась одна и та же последовательность случайных чисел во всех расчетах. В расчетах использовались размерные параметры, соответствующие условиям проведения экспериментов [10,11,13]:  $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s,  $r_2 = 0.15$  m,  $r_1 = 0.075$  m для  $\delta = 1$  и  $r_1 = 0.0544$  m для  $\delta = 1.76$ . В [13] показано, что относительные изменения скоростей течений под действием белого шума увеличиваются при снижении чисел Рейнольдса  $Re_k = \Omega_k r_k^2/\nu$ , определяемых для внутренней ( $k = 1$ ) и внешней ( $k = 2$ ) сфер. Поэтому расчеты проведены при средних угловых скоростях вращения границ  $\Omega_0 = 4.4444$  и  $8.8888$  1/s, что соответствует относительно небольшим числам

$Re_2 = 2000$  и  $4000$ , далее обозначенных как  $Re$  (числа  $Re_1$  в представлении результатов не используются). Последовательность этапов в численном эксперименте аналогична их последовательности в лабораторном эксперименте [13]. Сначала рассчитывались течения без внесения шума, начальными условиями для которых служило ступенчатое изменение угловых скоростей сфер от состояния покоя до выбранных значений. Момент окончания расчетов без шума определялся по достижению стационарности во времени всех параметров течений. В свою очередь, результаты расчета течений без шума выбирались в качестве начальных условий для расчетов с шумом. Продолжительность одного варианта расчета с шумом составляла 1120 s, отсчитываемых с момента начала внесения шума в сигнал стационарного вращения внутренней сферы, что составляло 792 и 1584 оборотов сфер. Осреднение по времени проводилось по результатам расчетов в последние 420 s, что составляло 297 и 594 оборотов сфер. Результаты расчетов представлены ниже в зависимости от относительной амплитуды шума  $N$ :

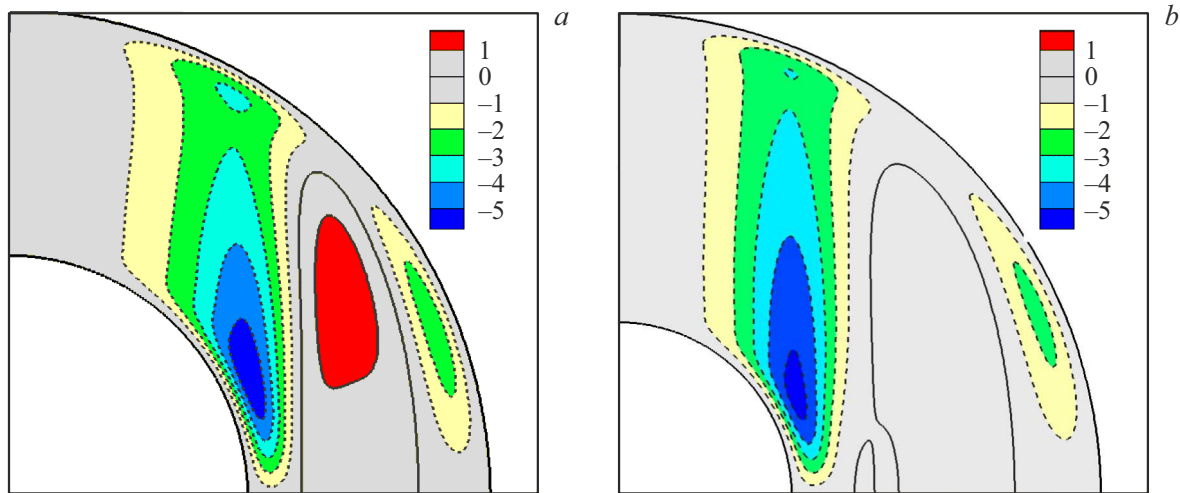
$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (\Omega(t_i) - \Omega_0)^2}, \quad N = \frac{\Delta}{\Omega_0}. \quad (1)$$

Здесь  $I$  — длина временной выборки. Амплитуда шума  $N$  варьировалась в пределах от 0.01 до 0.06.

## 2. Результаты

Рассматриваемые в настоящей работе течения вязкой несжимаемой жидкости вызваны вращением границ сферического слоя в одном и том же направлении с равными средними угловыми скоростями. При указанных выше числах  $Re$  течения со стационарным вращением устойчивы, и их структура симметрична относительно плоскости экватора и оси вращения. Как в отсутствие дополнительно вносимого шума, так и при его наличии, такие течения не являются твердотельными, поскольку все три компоненты скорости ненулевые. Как показано сначала аналитически в [21], а позднее и численно в [22], при стационарном вращении границ слоя с большими скоростями в течении формируется цилиндрический стюартсоновский слой, параллельный оси вращения и касающийся на экваторе внутренней сферы, в котором сосредоточено движение жидкости в меридиональной плоскости — меридиональная циркуляция. Как отмечалось выше, в настоящей работе расчеты проведены при невысоких числах  $Re$ , и стюартсоновский слой на границе между циркуляциями противоположного направления еще не сформирован. Однако в меридиональной плоскости хорошо заметны линии функции тока  $\Psi$ :

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \Psi(r = r_1) = 0,$$



**Рис. 2.** Уровни функции тока  $\Psi$  ( $10^{-10} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ ) в меридиональной плоскости осесимметричного стационарного течения (пунктиром обозначены отрицательные значения уровня); *a* —  $\delta = 1$ ,  $\text{Re}_1 = 1000$ ,  $\text{Re}_2 = 4000$ ; *b* —  $\delta = 1.76$ ,  $\text{Re}_1 = 525$ ,  $\text{Re}_2 = 4000$ .

практически параллельные оси вращения и разделяющие вихри противоположного направления (рис. 2). Структуры течения показаны при  $N = 0$ , при различных  $\delta$  они качественно подобны по положению максимумов и направлению линий функции тока.

При внесении случайных флуктуаций скорости вращения все компоненты скорости течения становятся случайными во времени. Из представленных выше граничных условий следует, что структура передаваемых в течение возмущений симметрична относительно плоскости экватора, и в каждый момент времени не зависит от азимутального угла. Необходимо определить, сохраняется ли при такой структуре возмущений осевая симметрия течения. С этой целью проведены тестовые трехмерные расчеты одного из вариантов течений. Степень несимметричности относительно оси вращения определялась следующей величиной [17]:

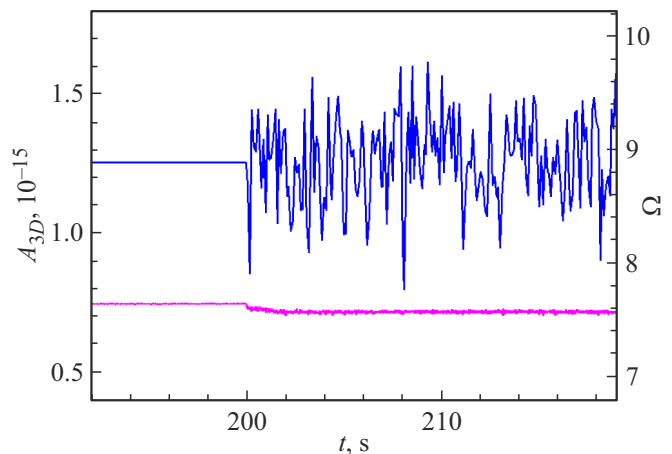
$$A_{3D}(t) = \frac{1}{V} \sum_{\beta} \int_V (u_{\beta}(r_i, \theta_j, \varphi_k, t) - u_{\beta av}^{\varphi}(r_i, \theta_j, t))^2 dv_{ijk},$$

$$\beta = r, \theta, \varphi,$$

$$u_{\beta av}^{\varphi}(r_i, \theta_j, t) = \frac{1}{K} \sum_1^K u_{\beta}(r_i, \theta_j, \varphi_k, t).$$

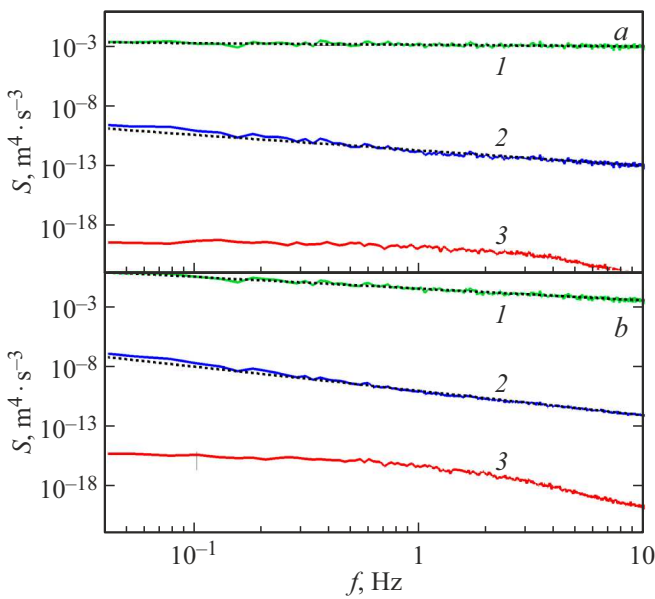
Здесь  $u_{\beta}(r_i, \theta_j, \varphi_k, t)$  и  $u_{\beta av}^{\varphi}(r_i, \theta_j, t)$  — одна из компонент скорости и ее осредненное по углу  $\varphi$  значение,  $K$  — количество узлов в азимутальном направлении,  $V$  — объем сферического слоя. Если течение симметрично относительно оси вращения, то величина  $A_{3D}(t)$  близка к нулю.

Если течение несимметрично относительно оси вращения, например, после потери устойчивости течением, вызванным вращением только внутренней



**Рис. 3.** Результаты трехмерного расчета при  $\text{Re} = 4000$ ,  $\delta = 1$ ,  $N = 0.04$ , количество узлов расчетной сетки  $G = 1.152 \cdot 10^6$ . Представлены зависимости от времени  $t$  величин  $\Omega_1(t)$  (сверху, вертикальная ось справа) и  $A_{3D}(t)$  (снизу, вертикальная ось слева).

сферы, то величина  $A_{3D}(t)$  находится в диапазоне  $10^{-4} < A_{3D}(t) < 10^{-3}$  [17]. На рис. 3 показана величина  $A_{3D}(t)$  для рассматриваемого здесь течения при отсутствии и наличии случайных флуктуаций скорости вращения ( $N = 0.04$ ). При используемых размерах расчетной сетки и шага по времени в случае стационарного вращения сфер  $A_{3D}(t) < 10^{-15}$ , что доказывает осесимметричность такого течения. При внесении дополнительного шума среднее значение этой величины практически не изменяется, что свидетельствует о сохранении симметрии течения относительно оси вращения. Таким образом, принятое в настоящей и более ранних работах [11,13] допущение об осесимметричности рассматриваемых видов



**Рис. 4.** Спектры угловой скорости сферы (1),  $E_{\varphi n}$  (2) и  $E_{\psi n}$  (3);  $a - \alpha = 0.1$ ,  $b - \alpha = 1$ ,  $N = 0.02$ ,  $\delta = 1$ ,  $Re_1 = 1000$ ,  $Re_2 = 4000$ . Штрихпунктирными прямыми показана аппроксимация наклона спектров.

течений при наличии шума малой амплитуды является совершенно оправданным.

На рис. 4 представлены спектры угловой скорости вращения и компонент кинетической энергии течения при одних и тех же числах  $\delta$ ,  $Re$  и  $N$ , но при различных  $\alpha$ . Виды спектров  $E_{\psi n}$  и  $E_{\varphi n}$  существенно различаются: первые практически не зависят от величины  $\alpha$  и в диапазоне частот менее 1 Hz представляют собой белый шум, тогда как угол наклона спектра  $E_{\varphi n} \alpha_\varphi$  зависит от  $\alpha$ : при  $\alpha = 0.1$   $\alpha_\varphi = 1.12$  и при  $\alpha = 1$   $\alpha_\varphi = 1.97$ . Таким образом, наклон спектров  $E_{\varphi n}$  больше наклона спектра подводимого к течению извне шума. При  $\delta = 1$  ( $\alpha_\varphi - \alpha$ )  $\sim 1$ , и такое соотношение сохраняется при всех используемых в нашей работе числах  $Re$  и значениях  $N$ . Необходимо отметить, что вопросы трансформации спектра шума при его распространении в различных средах изучаются уже в течение длительного времени [23]. Наблюдаемое в наших расчетах затухание амплитуды спектра  $E_{\psi n}$  на высоких частотах соответствует результатам [24], в которых наблюдалась передача энергии от высоких частот к низким при вращательных колебаниях с двумя частотами в сферическом слое, а также более быстрое затухание амплитуды колебаний на высоких частотах по сравнению с низкими частотами по мере удаления от источника шума.

Обнаружено, что под действием шума не только кинетическая энергия течений может увеличиваться [10,11], но может меняться и момент сил трения, передаваемый на границы слоя. Рассмотрим величины относительного изменения момента сил трения  $T$ , передаваемого на внешнюю сферу  $T = (M_n - M_0)/M_0$ , где  $M_0$  и  $M_n$  —

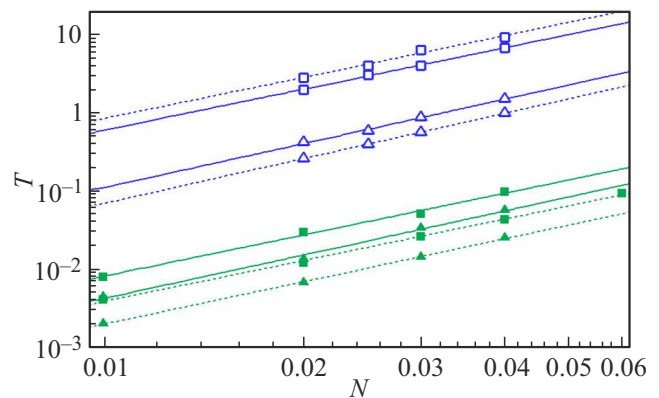
соответственно моменты сил трения без шума и с шумом (рис. 5). Вне зависимости от рассматриваемых в настоящей работе значений наклона спектра  $\alpha$ , относительной толщины слоя  $\delta$  и чисел  $Re$ , все полученные результаты могут быть представлены в виде  $T \sim N^\tau$ , где  $\tau = 1.81 \pm 0.06$ . При одних и тех же амплитудах шума  $N$  величины  $T$ , соответствующие  $\alpha = 1$  (светлые символы на рис. 5), на два порядка превышают величины  $T$ , соответствующие  $\alpha = 0.1$  (темные символы на рис. 5). В то же время при одних и тех же амплитудах шума  $N$  величины  $T$  сильно зависят от толщины слоя  $\delta$  и очень слабо от числа  $Re$ .

В том случае, когда спектр случайных флуктуаций соответствует спектру белого шума, увеличение его интенсивности приводит к повышению средних значений кинетической энергии в течениях, вызванных вращением как только внутренней сферы, так и сонаправленным вращением сферических границ [11,13]. При этом увеличение средних значений  $E_{\varphi n}$  могло сопровождаться как увеличением, так и уменьшением среднеквадратичных отклонений  $E_{\varphi n}$ . Нормированные среднеквадратичные отклонения  $E_{\varphi n}$  и  $E_{\psi n}$  определяются следующим образом:

$$\frac{rms(E_{\varphi n})}{(\Omega_0 r_1)^2} = \frac{1}{(\Omega_0 r_1)^2} \sqrt{\frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (E_{\varphi n}(t_i) - E_{\varphi n av})^2},$$

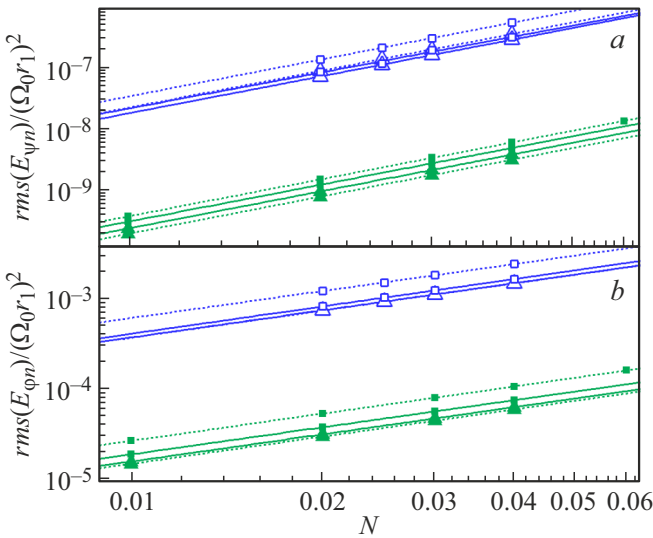
$$\frac{rms(E_{\psi n})}{(\Omega_0 r_1)^2} = \frac{1}{(\Omega_0 r_1)^2} \sqrt{\frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^I (E_{\psi n}(t_i) - E_{\psi n av})^2}.$$

Здесь  $E_{\varphi n}(t_i)$ ,  $E_{\psi n}(t_i)$  — мгновенные значения, а  $E_{\varphi n av}$ ,  $E_{\psi n av}$  — осредненные во времени величины соответствующих компонент кинетической энергии. Результаты расчетов показывают, что зависимость величин  $rms(E_{\psi n})/(\Omega_0 r_1)^2$  (рис. 6, a) и  $rms(E_{\varphi n})/(\Omega_0 r_1)^2$  (рис. 6, b) от амплитуды шума  $N$



**Рис. 5.** Зависимость осредненных во времени величин  $T$  от  $N$ : светлые (синие) символы —  $\alpha = 1$ , темные (зеленые) символы —  $\alpha = 0.1$ , квадратные символы —  $\delta = 1$ , треугольные —  $\delta = 1.76$ , сплошные линии — аппроксимация зависимости  $T$  от  $N$  при  $Re_2 = 4000$ , прерывистые линии — при  $Re_2 = 2000$ .





**Рис. 6.** Нормированные величины среднеквадратичных отклонений  $E_{\psi n}$  (a) и  $E_{\varphi n}$  (b) в зависимости от  $N$ . Светлые (синие) символы —  $\alpha = 1$ , темные (зеленые) символы —  $\alpha = 0.1$ , квадратные символы —  $\delta = 1$ , треугольные —  $\delta = 1.76$ , сплошные линии — аппроксимация зависимостей изменения  $rms(E_{\psi n})$  и  $rms(E_{\varphi n})$  от  $N$  при  $Re_2 = 4000$ , прерывистые линии — при  $Re_2 = 2000$ .

при всех рассматриваемых значениях  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $Re$  может быть представлена в виде

$$rms(E_{\psi n})/(\Omega_0 r_1)^2 \sim N^\beta, \quad \beta = 2 \pm 0.002,$$

$$rms(E_{\varphi n})/(\Omega_0 r_1)^2 \sim N^\gamma, \quad \gamma = 1 \pm 0.006.$$

Необходимо отметить, что при одних и тех же амплитудах шума и величинах  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $Re$ ,  $rms(E_{\varphi n})/(\Omega_0 r_1)^2 \gg rms(E_{\psi n})/(\Omega_0 r_1)^2$ , и отличия составляют не менее трех порядков. При одних и тех же значениях  $\alpha$  результаты слабо зависят от  $\delta$  (всегда больше в случае  $\delta = 1$ ). При  $\delta = 1.76$  результаты практически не зависят от чисел  $Re$ . При одних и тех же амплитудах шума нормированные среднеквадратичные отклонения обеих компонент кинетической энергии течения в случае  $\alpha = 1$  (светлые символы на рис. 6) при прочих равных условиях более чем на порядок превышают аналогичные значения, полученные в случае  $\alpha = 0.1$  (темные символы на рис. 6). Качественно похожие результаты наблюдаются и для зависимостей, описывающих относительное изменение осредненных во времени величин меридиональной  $(E_{\psi n_{av}} - E_{\psi 0})/E_{\psi 0}$  (рис. 7, a) и азимутальной  $(E_{\varphi n_{av}} - E_{\varphi 0})/E_{\varphi 0}$  (рис. 7, b) компонент кинетической энергии течения от амплитуды шума  $N$ . Так же как и для рассмотренных выше параметров течения (рис. 5, 6), величины  $(E_{\psi n_{av}} - E_{\psi 0})/E_{\psi 0}$  и  $(E_{\varphi n_{av}} - E_{\varphi 0})/E_{\varphi 0}$  при увеличении амплитуды шума сильно зависят от  $\alpha$ : в случае  $\alpha = 1$  (светлые символы на рис. 7) результаты на 2 порядка и более превышают результаты, полученные при  $\alpha = 0.1$  (темные символы на рис. 7). Так же как и нормированные средне-

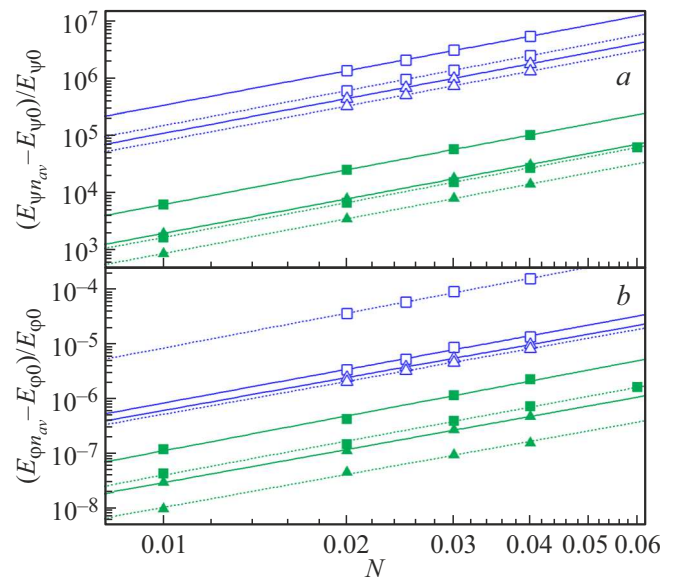
квадратичные отклонения (рис. 6), и  $(E_{\psi n_{av}} - E_{\psi 0})/E_{\psi 0}$  и  $(E_{\varphi n_{av}} - E_{\varphi 0})/E_{\varphi 0}$  при одном и том же уровне шума немного выше для  $\delta = 1$ , чем для  $\delta = 1.76$ . Зависимости и  $(E_{\psi n_{av}} - E_{\psi 0})/E_{\psi 0}$  и  $(E_{\varphi n_{av}} - E_{\varphi 0})/E_{\varphi 0}$  от амплитуды шума при рассматриваемых значениях  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $Re$  качественно подобны (рис. 7):

$$(E_{\psi n_{av}} - E_{\psi 0})/E_{\psi 0} \sim N^\lambda, \quad \lambda = 2 \pm 0.001,$$

$$(E_{\varphi n_{av}} - E_{\varphi 0})/E_{\varphi 0} \sim N^\mu, \quad \mu = 2.05 \pm 0.05,$$

но по абсолютной величине относительное изменение меридиональной компоненты  $(E_{\psi n_{av}} - E_{\psi 0})/E_{\psi 0}$  под влиянием шума существенно, на несколько порядков, превышает относительное изменение азимутальной компоненты  $(E_{\varphi n_{av}} - E_{\varphi 0})/E_{\varphi 0}$ . Такой же результат наблюдался ранее в [14] в случае использования белого шума с  $\alpha = 0$ .

Представленные результаты — квадратичная зависимость от уровня шума независимо от вида его спектра, более высокий рост всех компонент при  $\delta = 1$ , существенные отличия в изменении меридиональной и азимутальной компонент кинетической энергии — могут быть получены из следующей приближенной немного расширенной по сравнению с [13] модели. При рассматриваемых параметрах течений ( $Re = 4000$ ,  $\delta = 1$ ) без добавления дополнительного шума отношение  $E_{\psi 0}/E_{\varphi 0}$  порядка  $10^{-12}$ , что позволяет предположить, что отношение средних величин меридиональной и азимутальной скоростей равно  $u_\psi/u_\varphi = \varepsilon = 10^{-6}$ . Азимутальная компонента кинетической энергии может



**Рис. 7.** Относительное изменение осредненных во времени величин меридиональной (a) и азимутальной (b) компонент кинетической энергии течений при возрастании  $N$ . Светлые (синие) символы —  $\alpha = 1$ , темные (зеленые) символы —  $\alpha = 0.1$ , квадратные символы —  $\delta = 1$ , треугольные —  $\delta = 1.76$ , сплошные линии — аппроксимация зависимостей относительного изменения компонент кинетической энергии от  $N$  при  $Re_2 = 4000$ , прерывистые линии — при  $Re_2 = 2000$ .

быть представлена в виде  $E_{\varphi 0} \sim (\Omega_0 L)^2$ , где  $L$  — линейный размер слоя,  $L = r_2 - r_1$ . Тогда меридиональная компонента может быть определена как  $E_{\psi 0} \sim (\varepsilon \Omega_0 L)^2$ . Обе компоненты кинетической энергии течений увеличиваются под действием шума, и этот рост приближенно может быть выражен с использованием определяемой в разд. 1 величины  $\Delta$  (1)  $E_{\varphi n av} \sim (\Omega_0 L + F \Delta L)^2$ ,  $E_{\psi n av} \sim (\varepsilon \Omega_0 L + F \Delta L)^2$ , где  $F$  — коэффициент, учитывающий вид спектра подводимого шума, остальные коэффициенты для упрощения не учитываем. Тогда

$$\begin{aligned} (E_{\varphi n av} - E_{\varphi 0})/E_{\varphi 0} &= (E_{\varphi n av}/E_{\varphi 0}) - 1 \\ &= 2F\Delta/\Omega_0 + F^2\Delta^2/\Omega_0^2 = 2FN + F^2N^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (E_{\psi n av} - E_{\psi 0})/E_{\psi 0} &= (E_{\psi n av}/E_{\psi 0}) - 1 = ((\varepsilon^2\Omega_0^2 + 2F\varepsilon\Omega_0\Delta \\ &+ F^2\Delta^2)/(\varepsilon^2\Omega_0^2)) - 1 = 2FN/\varepsilon + F^2N^2/\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $\varepsilon \ll N$ , из этой модели мы получаем более быстрый рост под действием шума меридиональной компоненты по сравнению с азимутальной. При одних и тех же амплитудах шума  $N$  и прочих равных параметрах всегда выполняется условие  $(E_{\psi n av} - E_{\psi 0})/E_{\psi 0} \gg (E_{\varphi n av} - E_{\varphi 0})/E_{\varphi 0}$ .

В обоих случаях присутствует квадратичная зависимость от амплитуды шума, независимо от вида его спектра (независимо от величины  $F$ ). Изменение величины  $F$  при одних и тех же  $N$  приводит к изменению обеих компонент кинетической энергии, но качественный вид зависимости от  $N$  при этом не изменяется. С другой стороны, увеличение  $F$  при одних и тех же величинах амплитуды шума  $N$  приводит к увеличению обеих компонент кинетической энергии. Таким образом, рассматриваемая выше упрощенная аналитическая модель соответствует полученным численно закономерностям.

Результаты проведенного численного исследования по влиянию вида спектра дополнительно вносимого шума на изменение свойств течений вязкой несжимаемой жидкости достаточно трудно сопоставить с экспериментом вследствие сложностей получения экспериментальных данных при  $N = 0$ . Косвенным подтверждением полученных численных данных могут являться результаты экспериментов [25]. Согласно этим результатам, сокращение в низкочастотной части спектра шума участка с  $\alpha = 0$  (т.е. удаление вида спектра от белого шума) при одних и тех же амплитудах шума приводит к повышению осредненных во времени величин как флуктуаций скорости течения, так и средних величин скорости течения. Качественно экспериментальные результаты [25] полностью соответствуют численным результатам: при увеличении наклона спектра, т.е. по мере удаления вида спектра от белого шума, при одних и тех же амплитудах шума наблюдается более высокое относительное возрастание осредненных во времени параметров течения.

## Заключение

Представлены результаты численного исследования влияния шума в виде случайных во времени широкополосных флуктуаций скорости вращения с нулевым средним значением, добавляемых к постоянной средней скорости вращения, на изменение свойств течений вязкой несжимаемой жидкости в сферическом слое. Расчеты проведены для двух относительных толщин слоя  $\delta = 1$  и 1.76 при числах Рейнольдса, вычисленных по параметрам внешней границы слоя  $Re = 2000$  и 4000. Рассматривались два вида шума с различными наклонами спектра  $1/f^\alpha$ :  $\alpha = 0.1$  и 1. При всех используемых в работе амплитудах шума  $N$  и числах  $Re$  наклон спектра азимутальной компоненты кинетической энергии течения на единицу меньше наклона спектра подводимого шума, тогда как низкочастотная часть спектра меридиональной компоненты кинетической энергии представляет собой белый шум. Показано, что как при использовании белого шума ( $\alpha = 0$ ) [13], так и при  $\alpha = 0.1$  и 1 увеличение амплитуды шума  $N$  ведет к увеличению осредненных во времени величин азимутальной и меридиональной компонент кинетической энергии течений. Установлено, что при всех используемых в работе видах спектра шума, соотношениях размеров сферических границ и числах Рейнольдса, при одних и тех же амплитудах шума относительное увеличение меридиональной компоненты кинетической энергии течения на несколько порядков выше относительного увеличения азимутальной компоненты. Ранее такое же соотношение между увеличением различных компонент кинетической энергии было обнаружено в [11,13] в случае использования белого шума ( $\alpha = 0$ ). Противоположное соотношение наблюдается для среднеквадратичных отклонений компонент кинетической энергии. При используемых в работе видах спектра шума, соотношениях размеров сферических границ и числах Рейнольдса, увеличение среднеквадратичных отклонений азимутальной компоненты кинетической энергии на несколько порядков выше увеличения среднеквадратичных отклонений меридиональной компоненты при одних и тех же амплитудах шума.

Показано, что относительные величины таких параметров течений, как моменты сил трения на внешней сфере, флуктуации и средние величины азимутальной и меридиональной компонент кинетической энергии зависят от амплитуды шума  $N$  как степенные функции  $N^n$  ( $n$  — это один из показателей степени:  $\tau, \gamma, \lambda$  или  $\mu$ ). Все значения  $n$  находятся в диапазоне от 1 до 2, и полученный скейлинг не зависит от используемых в работе чисел  $\delta$ , Рейнольдса и  $\alpha$ . Показано, что отклик течений на воздействие шума определяется видом спектра этого шума: при одних и тех же амплитудах шума относительное увеличение параметров течений при  $\alpha = 1$  на несколько порядков выше, чем при  $\alpha = 0.1$ . При одних и тех же  $N$  влияние вида спектра шума на относительное изменение всех рассматриваемых параметров течения значительно сильнее, чем влияние

чисел  $\delta$  и  $Re$ . Рассматриваемая в работе упрощенная аналитическая модель качественно соответствует полученным численным результатам, и, согласно этой модели, вид спектра подводимого к течению шума не влияет на качественный вид зависимости изменения компонент кинетической энергии течений. Полученные в работе зависимости изменения кинетической энергии течений и их среднеквадратичных отклонений от уровня шума сохраняют свой качественный вид при любых физически реализуемых величинах наклона спектра шума  $\alpha$ . Можно предположить, что полученные численные результаты носят достаточно универсальный характер. В-первых, структура меридиональной циркуляции остается неизменной (рис. 2), поэтому полученные зависимости будут справедливы для любых значений  $\delta$ , находящихся в диапазоне  $1 < \delta < 1.76$ . Во-вторых, можно предположить, что при физически реализуемых наклонах спектра шума  $0 \leq \alpha \leq 1$  зависимости рассмотренных параметров течений от амплитуды шума сохраняются (рис. 5–7): спектры  $E_\varphi$  сохраняют постоянный наклон; спектры  $E_\psi$  подобны спектру белого шума на низких частотах при  $\alpha = 0$  [13],  $\alpha = 0.1$  и  $\alpha = 1$ . А основной результат работы состоит в том, что при одних и тех же амплитудах шума возрастание  $\alpha$  сопровождается увеличением осредненных во времени относительных величин момента сил трения, кинетической энергии и ее флуктуаций.

### Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-29-00051).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] W. Horsthemke, R. Lefever. *Noise-induced Transitions* (Springer, Berlin, 1984)
- [2] V. Lucarini, T. Bodai. *Nonlinearity*, **30** (7), R32 (2017). DOI: 10.1088/1361-6544/aa6b11
- [3] R. Hide, J.O. Dickey. *Science*, **253** (5020), 629 (1991). DOI: 10.1126/science.253.5020.629
- [4] Ю.Г. Марков, И.Н. Сеницын. *ДАН*, **427** (3), 326 (2009). [Y.G. Markov, I.N. Sinitsyn. *Dokl. Phys.*, **54** (7), 350 (2009).]
- [5] Y. Yang, X. Song, *Nature Geoscience*, **16**, 182 (2023). DOI: 10.1038/s41561-022-01112-z
- [6] И.А. Башкирцева, А.Ю. Зубарев, Л.Ю. Исакова, Л.Б. Ряшко. *ПММ*, **76** (4), 646 (2012). [I.A. Bashkirtseva, A.Y. Zubarev, L.Y. Isakova, L.B. Ryashko. *J. Appl. Math. Mech.*, **76** (4), 466 (2012).]
- [7] M. Pradas, D. Tseluiko, S. Kalliadasis, D.T. Papageorgiou, G.A. Pavliotis. *Phys. Rev. Lett.*, **106**, 060602 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.060602
- [8] J.-P. Laval, P. Blaineau, N. Leprovost, B. Dubrulle, F. Daviaud. *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 204503 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.204503
- [9] S. Residori, R. Berthet, B. Roman, S. Fauve. *Phys. Rev. Lett.*, **88**, 024502 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.024502
- [10] D. Zhilenko, O. Krivonosova, M. Gritsevich, P. Read. *Chaos*, **28**, 053110 (2018). DOI: 10.1063/1.5011349
- [11] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова. *ЖТФ*, **91** (6), 935 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.06.50862.345-20 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivonosova. *Tech. Phys.*, **66**, 1330 (2021). DOI: 10.1134/S1063784221060232]
- [12] Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, Б.С. Марышев. *Изв. РАН, МЖГ*, **6**, 30 (2010). [D.V. Lubimov, T.P. Lubimova, B.S. Maryshev. *Fluid Dyn.*, **45** (6), 859 (2010).]
- [13] O. Krivonosova, M. Gritsevich, D. Zhilenko, P. Read. *Phil. Trans. R. Soc. A*, **381**, 20220124 (2023). DOI: 10.1098/rsta.2022.0124
- [14] A. Sauret, D. Cebbron, C. Morize, M. Le Bars. *J. Fluid Mech.*, **662**, 260 (2010). DOI: 10.1017/S0022112010004052
- [15] M.A. Calkins, J. Noir, J.D. Eldredge, J.M. Aurnou. *Phys. Fluids*, **22**, 086602 (2010). DOI: 10.1063/1.3475817
- [16] R.R. Kerswell. *J. Fluid Mech.*, **298**, 311 (1995). DOI: 10.1017/S0022112095003326
- [17] N. Nikitin. *J. Comp. Phys.*, **217**, 759 (2006). DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.036
- [18] О.Э. Кривоносова. *Дисс. канд. физ.-мат. наук (МГУ, М., 2007)*
- [19] O. Zikanov. *J. Fluid Mech.*, **310**, 293 (1996). DOI: 10.1017/S0022112096001814
- [20] M. Schroeder. *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise* (Dover Publications, NY., 1991)
- [21] K. Stewartson. *J. Fluid Mech.*, **26**, 131 (1966). DOI: 10.1017/S0022112066001137
- [22] R. Hollerbach. *J. Fluid Mech.*, **492**, 289 (2003). DOI: 10.1017/S0022112003005676
- [23] О.В. Руденко. *УФН*, **149** (3), 413 (1986). DOI: 10.3367/UF.Nr.0149.198607c.0413 [O.V. Rudenko. *Sov. Phys. Usp.*, **29**, 620 (1986). DOI: 10.1070/PU1986v029n07ABEH003460]
- [24] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова. *Письма в ЖЭТФ*, **104** (8), 552 (2016). DOI: 10.7868/S0370274X16200030 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivonosova. *JETP Lett.*, **104** (8), 531 (2016). DOI: 10.1134/S0021364016200133]
- [25] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова. *Письма в ЖТФ*, **49** (8), 21 (2023). DOI: 10.21883/PJTF.2023.08.55132.19506 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivonosova. *Tech. Phys. Lett.*, **49** (4), 62 (2023). DOI: 10.21883/TPL.2023.04.55881.19506]