

01

Расчет осесимметричных токовых систем с использованием модели аксиально намагниченного цилиндра

© А.К. Андреев

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993 Москва, Россия
e-mail: alexande_andreev@yahoo.com

Поступило в Редакцию 2 мая 2023 г.
В окончательной редакции 14 декабря 2023 г.
Принято к публикации 24 декабря 2023 г.

Предложен метод расчета индуктивных и силовых параметров сложных коаксиальных осесимметричных токовых систем, базирующийся на модели цилиндра. Показано, что средний по объему размагничивающий фактор цилиндра эквивалентен коэффициенту Нагаока для индуктивности катушек конечной длины. Из анализа корреляции плотностей энергии цилиндра и энергии размагничивания определен критерий „короткой катушки“. Установлено соответствие результатов, полученных по модели цилиндра, расчетам по токовым моделям. Представлен метод расчета межслойных механических напряжений, взаимных радиальных и аксиальных сил и напряжений в системе коаксиальных катушек (цилиндров). Приведен пример применения модели цилиндра для расчета индуктивности катушки прямоугольного сечения.

Ключевые слова: размагничивающий фактор, коэффициент Нагаока, катушка, индуктивность, энергия, механические напряжения.

DOI: 10.61011/JTF.2024.02.57070.109-23

Введение

Индуктивные и силовые (пондеромоторные) характеристики являются важнейшими параметрами магнитных систем. Термином „соленоид“ принято называть разновидность катушки, длина которой много больше диаметра. Силовые взаимодействия в осесимметричных магнитных системах обычно вычисляются для токовых систем: катушек и соленоидов. Расчеты пондеромоторных сил необходимы при создании импульсных магнитных полей высокой интенсивности [1–6]. Указанная литература посвящена технической реализации поставленных задач с акцентом на прочностные характеристики изделий. В расчетах используются приближенные формулы магнитных полей, полученные для токовых систем. Сложность расчетов полей катушек приводит к необходимости упрощения задач и представлению результатов с использованием рядов, аппроксимирующих формул, либо графоаналитических методов [4,5]. Разница значений параметров, рассчитываемых по разным методикам, может составлять несколько процентов, что считается вполне приемлемым. Расширенную информацию по методам расчета катушек можно найти в Интернете на сайтах [7], где приведены также ссылки на первоисточники.

Однослойная катушка играет особую роль в проектировании магнитных систем. На ее основе рассчитываются сложные многокомпонентные системы. Методы расчета индуктивности однослойных катушек через эллиптические интегралы впервые были разработаны Дж.К. Максвеллом для обмоток из проводов круглого сечения [8] и Л. Лоренцем для катушек из ленточных

проводников [9]. Эти результаты для электро- и радиотехников имеют такое же значение, как и уравнения электромагнитного поля Максвелла для физиков. Нагаока переопределил формулы Максвелла-Лоренца, введя понятие геометрического фактора формы катушек [10]. Теперь эллиптические интегралы содержали вместо параметров: „длина катушки h — диаметр $2a$ “, их отношение $h/2a$.

С введением коэффициента Нагаока индуктивность однослойной катушки записывается следующим образом:

$$L = \left(\mu_0 \frac{w^2}{h} \frac{\pi(2a)^2}{4} \right) k_L, \quad (0 \leq k_L \leq 1), \quad (1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная, w — число витков катушки, k_L — коэффициент Нагаока. Выражение в скобках определяет индуктивность L_h участка соленоида длиной h .

Энергия, аккумулированная в катушке, есть

$$E_{coil} = I^2 L / 2, \quad (2)$$

где I — ток в витке катушки.

Коэффициент Нагаока вводит поправку на конечность длины катушки и в форме Лоренца имеет вид

$$k_L = \frac{8a}{3\pi h} \left(\frac{2k-1}{k^3} E_c(k) + \frac{1-k^2}{k^3} K_a(k) - 1 \right), \quad (3)$$

где $K_a(k)$ и $E_c(k)$ — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода:

$$K_c(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta,$$

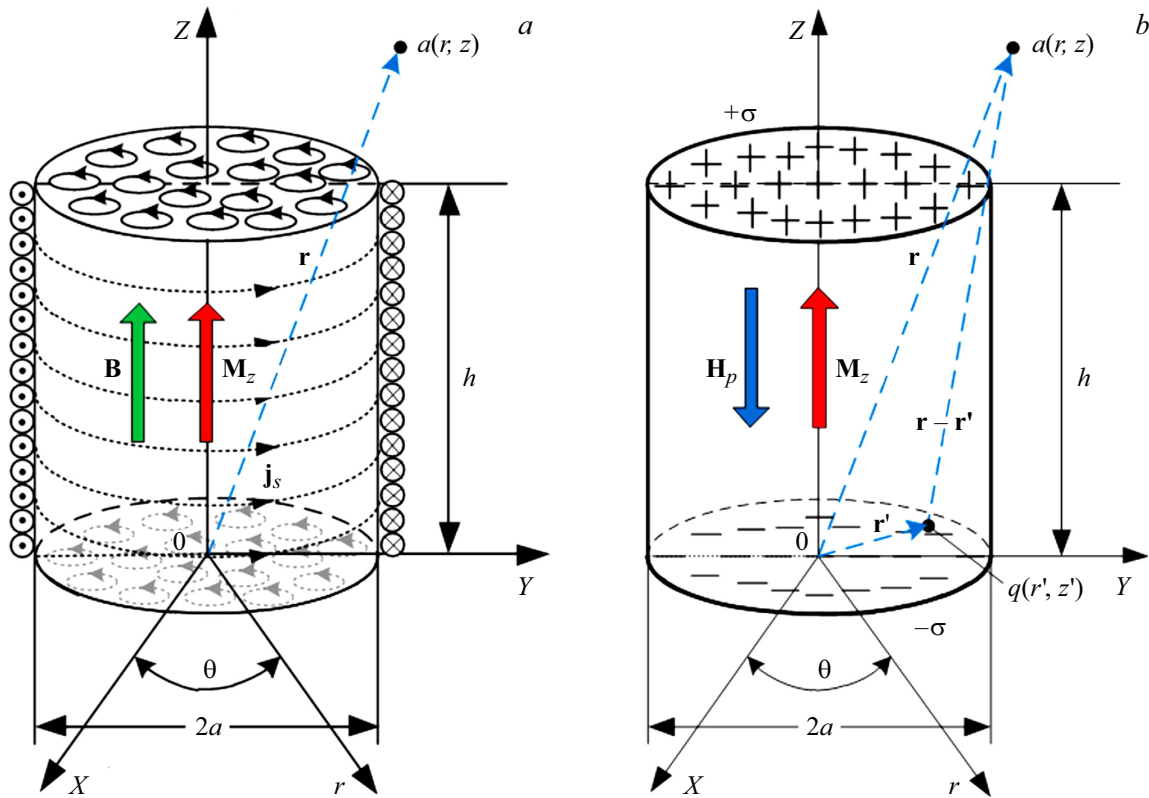


Рис. 1. *a* — схема определения индукции \mathbf{B} ; *b* — схема расчета поля цилиндра \mathbf{H}_p . Штрихованные координаты $q(r', z')$ связаны с точкой источника поля. Символом $a(r, z)$ обозначена точка наблюдения.

$$E_c(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta,$$

с модулем $k = 2a(4a^2 + h^2)^{-1/2}$.

Неоднородность индукции коротких катушек существенно усложняет вычисления. Многочисленные примеры расчетов практических систем рассмотрены в справочной книге [11]. Прямые численные методы расчетов индуктивных параметров катушек без преобразования исходных интегральных выражений в алгебраические приведены в [12].

Поля для внутренних областей осесимметричных магнитных систем получены в [13,14]. Формулы и программы расчета размагничивающих и 3D-полей цилиндров при азимутальном намагничивании (или индукции эквивалентных им катушек) во всем пространстве, выраженные через эллиптические интегралы, опубликованы в [15]. Аналитические выражения 3D-полей цилиндра при произвольной ориентации намагниченности опубликованы в [16,17].

Прямой расчет индуктивностей и взаимных индуктивностей катушек прямоугольного сечения как токовых систем сложен и приводит к чрезвычайно громоздким формулам, что затрудняет их использование для практических расчетов [18–21].

В настоящей работе рассмотрены методы расчета индуктивности катушек, взаимной индуктивности и ponderomotorных сил системы катушек с плотной намоткой альтернативным методом через 3D-поля аксиально намагниченного цилиндра. Критерий плотности намотки приведен в [22]. Метод основан на равенстве внутренних энергий катушек и эквивалентных им аксиально намагниченных цилиндров. По сути, для расчетов основных параметров катушек нет необходимости привлекать трудоемкие методы теоретической электротехники и магнитостатики для токовых систем, если только установлено равенство плотностей поверхностных токов катушек и цилиндров. При использовании модели цилиндра вычисление ряда основных параметров осесимметричных магнитных и токовых систем значительно упрощаются.

1. Расчетная модель

1.1. Базовые соотношения величин модели

Катушка, аксиально намагниченный в z -направлении цилиндр, и связанные с ними системы координат, показаны на рис. 1.

Намагниченность цилиндра \mathbf{M}_z , плотность поверхностного тока цилиндра \mathbf{j}_s и поверхностные „магнитные заряды“ связаны соотношениями [23] $\mathbf{j}_s = \text{Rot } \mathbf{M}_z$, $\sigma = -\text{Div } \mathbf{M}_z$. При однородной намагни-

ченности ($\mathbf{M}_z = \text{const}$) $\mathbf{J}_s = [\mathbf{M}_z \mathbf{n}]$ (рис. 1, *a*), $\sigma = \mathbf{M}_z \mathbf{n}$ (рис. 1, *b*); \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности цилиндра. В скалярной записи имеем

$$M_z = j_s, \quad \sigma = M_z. \quad (4)$$

При заданных параметрах катушки — длине h , диаметре $2a$, числе витков w и токе в витке I , плотность тока обмотки $j = wI/h$. В предположении $j_s = j$ эквивалентная намагниченность равноразмерного цилиндра равна $M_z = j$ (рис. 1, *a*), что обеспечивает равенство индукций катушки \mathbf{B}_{coil} и цилиндра \mathbf{B}_{cyl} во всем пространстве.

Поля в объемах катушки и цилиндра радикально различаются. Согласно дипольной („зарядовой“) модели намагниченности, на торцах однородно намагниченного цилиндра возникают поверхностные „магнитные заряды“ $\pm\sigma$ (рис. 1, *b*). „Заряды“ создают размагничивающее поле \mathbf{H}_p в объеме цилиндра, направленное противоположно \mathbf{M}_z , и поле рассеяния вне его, обозначаемое также символом \mathbf{H}_p .

Размагничивающее поле \mathbf{H}_p играет важнейшую роль при расчетах магнитных систем. \mathbf{H}_p определяется через размагничивающий фактор образца $N_p(\mathbf{r})$.

1.2. Размагничивающий фактор и 3D-поля аксиально намагниченного цилиндра

Поля $\mathbf{H}_p(\mathbf{r})$ внутри и вне ферромагнетика произвольной формы при известном распределении намагниченности $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ вычисляются через градиент магнитостатического потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ в точке наблюдения $a(r, z)$ (рис. 1, *b*):

$$\mathbf{H}_p(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}) = -\nabla \int_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}',$$

где \mathbf{r}' — радиус-вектор точки источника $q(r', z')$, \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения $a(r, z)$. Штрихованный и нештрихованный операторы означают дифференцирование по $q(r', z')$ и по $a(r, z)$ соответственно; $d^3\mathbf{r}'$ означает элемент объема. При расчетах потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ используются равенства $\nabla'(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = -\nabla(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$.

При однородно намагниченном ферромагнетике $\mathbf{M}(\mathbf{r}') = \mathbf{M} = \text{const}$, $\mathbf{H}_p(\mathbf{r})$ записывается в виде [24]:

$$\mathbf{H}_p(\mathbf{r}) = V(\mathbf{M}\nabla) \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\hat{N}(\mathbf{r})\mathbf{M}, \quad (5)$$

где $0 \leq \hat{N}(\mathbf{r}) \leq 1$ — тензор размагничивающих коэффициентов (факторов) с компонентами

$$N_{ij}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Переменные x_i, x_j определяются используемой системой координат; $\hat{N}(\mathbf{r})$ — безразмерная величина, определяемая формой образца, устанавливает пропорциональность между $\mathbf{H}_p(\mathbf{r})$ и \mathbf{M} . Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ во внутренней и внешней областях цилиндра определяется по-разному. Вне цилиндра размагничивающий фактор $\hat{N}(\mathbf{r})$ по определению равен нулю, но представляет собой коэффициент, определяющий поле рассеяния. Размагничивающее поле $\mathbf{H}_p(\mathbf{r}')$ неоднородно в объеме образца и зависит от его формы и намагниченности, т.е. является функцией координат \mathbf{r}' .

При однородной намагниченности цилиндра вдоль оси Z $M_z = \text{const}$:

$$H_p(\mathbf{r}) = -M_z \left[\nabla \int_{V'} \alpha_z \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right] = -M_z \hat{N}(\mathbf{r}), \quad (6)$$

где α_z — единичный вектор направления намагниченности. Отсюда следуют компоненты размагничивающего поля

$$H_{pi} = -N_{iz}M_z, \quad i = r, z.$$

Последующие расчеты выполнены в цилиндрической системе координат. Для удобства вычислений вводится вспомогательный „магнитостатический потенциал“ двух дисков, имеющий размерность длины [14]:

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \int_{V'} \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \int_0^a r' dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \times \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 + (h-z)^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 + z^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}} \right],$$

$$0 \leq z \leq h \wedge |r| \leq a.$$

Применяя к (9) интеграл Липшица и теорему сложения для бесселевых функций, получаем суммарный потенциал равноименно заряженных торцевых поверхностей цилиндра [25,26]:

$$\psi_1(r, z) = 2\pi a \int_0^\infty J_0(tr) J_1(ta) [e^{-tz} + e^{-(h-z)t}] \frac{dt}{t},$$

$$(0 \leq z \leq h) \wedge |r| \leq a,$$

где $J_0(tr)$ и $J_1(ta)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядков от действительного аргумента. Окончательно получаем формулы для размагничивающих факторов внутренней области цилиндра:

$$N_{zz}(r, z) = -\frac{\partial}{\partial z} \psi_1(r, z) = \frac{1}{2} a \int_0^\infty J_0(tr) J_1(ta) \times [e^{-tz} + e^{-(h-z)t}] dt, \quad 0 \leq z \leq h \wedge |r| \leq a, \quad (7)$$

$$N_{rz}(r, z) = -\frac{\partial}{\partial r} \psi_1(r, z) = -\frac{1}{2}a \int_0^{\infty} J_1(tr)J_1(ta) \times [e^{-tz} - e^{-t(h-z)}]dt, \quad |r| \leq a. \quad (8)$$

Формулы для расчета 3D-коэффициентов $N_{zz}(r, z)$ и $N_{rz}(r, z)$ во всем пространстве имеют вид

$$N_{zz}(r, z) = \begin{cases} \frac{1}{2}a \int_0^{\infty} J_0(tr)J_1(ta)[e^{-tz} + e^{-t(h-z)}]dt, & \text{if } (0 \leq z \leq h), \\ \frac{1}{2}a \int_0^{\infty} J_0(tr)J_1(ta)[e^{-tz} - e^{-t(h-z)}]dt, & \text{if } (z > h), \\ \frac{1}{2}a \int_0^{\infty} J_0(tr)J_1(ta)[e^{-t(h-z)} - e^{tz}]dt, & \text{if } (z < 0), \\ -\frac{1}{2} \left[\frac{h-z}{\sqrt{(h-z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{h-z}{|h-z|} - \frac{z}{|z|} \right] & \text{everywhere,} \end{cases} \quad (9)$$

$$N_{rz}(r, z) = \begin{cases} \frac{1}{2}a \int_0^{\infty} J_1(tr)J_1(ta)[e^{-tz} - e^{-t(h-z)}]dt, & \text{if } (0 \leq z \leq h), \\ \frac{1}{2}a \int_0^{\infty} J_1(tr)J_1(ta)[e^{-tz} - e^{-t(h-z)}]dt, & \text{if } (z > h), \\ \frac{1}{2}a \int_0^{\infty} J_1(tr)J_1(ta)[e^{tz} - e^{-t(h-z)}]dt, & \text{if } (z < 0). \end{cases} \quad (10)$$

Индукция цилиндра

$$B_z(r, z) = \mu_0(H_p + M_z) = \mu_0M_z(1 - N_{zz}).$$

С учетом (6) z - и r -компоненты поля и индукции цилиндра

$$H_z(r, z) = -M_z N_{zz}(r, z), \quad (11)$$

$$H_r(r, z) = -M_z n_{rz}(r, z). \quad (12)$$

$$B_z(r, z) = \begin{cases} \mu_0M_z(1 - N_{zz}) & \text{if } (0 \leq z \leq h) \wedge (0 \leq |r| \leq a), \\ \mu_0H_z(r, z) & \text{everywhere,} \end{cases} \quad (13)$$

$$B_r(r, z) = \mu_0H_r(r, z). \quad (14)$$

Расчеты по формулам (9), (10) непосредственно вблизи поверхности образца приводят к осциллирующим решениям [27]. В [28,29] N_{zz} и N_{rz} были переопределены через эллиптические интегралы. Расчет полей рассеяния через эллиптические интегралы обеспечивает получение стабильных численных результатов при любых параметрах магнитной системы. Эти формулы, записанные для

характерных областей внутри и вне цилиндра, приведены в Приложении [30].

На рис. 2 представлены графики векторных полей индукции \mathbf{B}_{cyl} и поля цилиндра \mathbf{H}_p в нормализованном к модулю векторов виде. Затемненной областью обозначено осевое сечение цилиндра. Графики построены для цилиндра размером $h = 50$ см, $2a = 10$ см.

На рис. 3 изображены графики изменения размагничивающего поля H_p и индукции B_z вдоль оси Z для следующих параметров: $h = 50$ см, $2a = 10$ см, $M_z = 5 \cdot 10^3$ А/м.

Поля и индукция в плоскости $X-Y$ (рис. 1) рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_z(x, y) &= H_r(r, z)q(x, z), & H_y(x, y) &= H_r(r, z)g(x, z), \\ H_z(x, y) &= H_z(r, z), \\ B_z(x, y) &= B_r(r, z)q(x, z), & B_y(x, y) &= B_r(r, z)g(x, z), \\ B_z(x, y) &= B_z(r, z), \end{aligned}$$

где

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad q(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$g(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

2. Энергия цилиндра. Средний по объему размагничивающий фактор как коэффициент Нагаока

Энергия цилиндра определяется формулой

$$\begin{aligned} E_{cyl}(a, h) &= 2\pi \int_0^h \int_0^a \frac{M_z B_z(r, z)}{2} r dr dz \\ &= 2\pi \int_0^h \int_0^a \frac{\mu_0 M_z^2 [1 - N_{zz}(r, z)]}{2} r dr dz. \end{aligned} \quad (15)$$

Компонента индукции $B_r(r, z)$ перпендикулярна M_z и не вносит вклада в энергию. С введением среднего по объему размагничивающего фактора цилиндра

$$\bar{N}_z(a, h) = \frac{2\pi}{\pi a^2 h} \int_0^h \int_0^a N_{zz}(r, z) r dr dz, \quad (16)$$

$E_{cyl}(a, h)$ может быть представлена в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} E_{cyl}(a, h) &= 2\pi \int_0^h \int_0^a \frac{\mu_0 M_z^2 [1 - \bar{N}_z(r, z)]}{2} r dr dz \\ &= E_0(a, h) - E_p(a, h), \end{aligned} \quad (17)$$

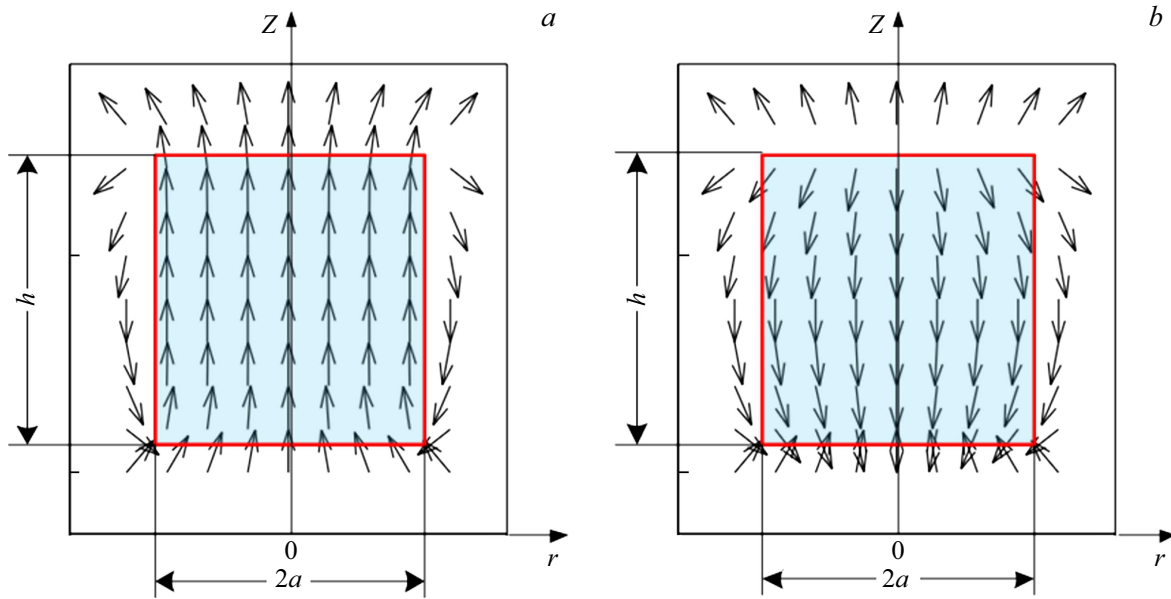


Рис. 2. *a* — векторное поле индукции \mathbf{B} . Линии индукции непрерывны; *b* — векторное поле \mathbf{H}_p . Поле \mathbf{H}_p терпит разрыв на торцах цилиндра. Размагничивающее поле \mathbf{H}_p в объеме цилиндра направлено противоположно намагниченности \mathbf{M}_z . Вне цилиндра линии поля и индукции совпадают.

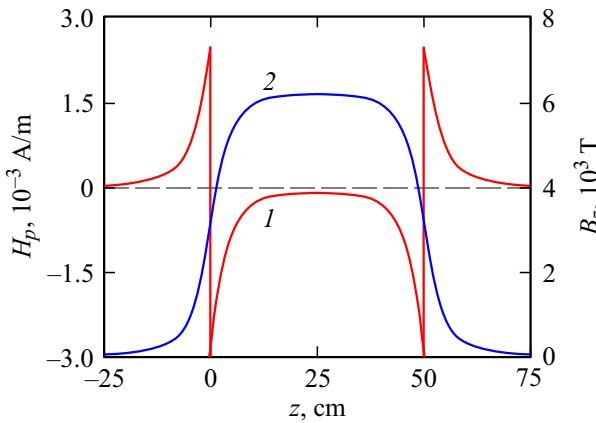


Рис. 3. *1* — размагничивающее поле H_p ; *2* — индукция B_z , $r = 0.1$ см, $z = -25-75$ см.

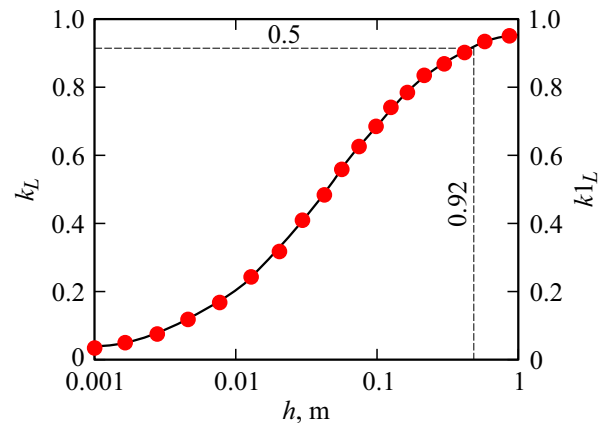


Рис. 4. Сплошная линия k_L — коэффициент Нагаока в форме Лоренца. Символьная линия — $k1_L$, определяемый размагничивающим фактором цилиндра, $h = 0-100$ см.

где E_0 — энергия участка длиной h бесконечного длинного цилиндра, E_p — энергия размагничивающего поля.

Равенство энергий E_{coil} (2) и $E_{cyl}(a, h)$ (17) устанавливает связь коэффициента Нагаока k_L (3) и коэффициента $k1_L$, определяемого (16):

$$k1_L = 1 - \bar{N}_z(a, h). \quad (18)$$

Термин „индуктивность цилиндра“ не имеет физического смысла. Однако, учитывая равенство энергий цилиндра и катушки $E_{cyl}(a, h) = E_{coil}(a, h)$, из энергии $E_{cyl}(a, h)$ с учетом (4) можно вычислить из (2) индуктивность эквивалентной катушки $L = 2E_{cyl}/I^2$. Для параметров цилиндра и катушки: $h = 50$ см, $a = 5$ см,

$I = 5$ А, $w = 500$, $j = 5 \cdot 10^3$ А/м, $M_z = 5 \cdot 10^3$ А/м получаем $E_{cyl}(a, h) = 0.057$ Дж, $E_p(a, h) = 4.929 \cdot 10^{-3}$ Дж, $E_0(a, h) = 0.062$ Дж, $\bar{N}_z(a, h) = 0.08$, $k_L = k1_L = 0.92$, $L = 4.64 \cdot 10^{-3}$ Гн.

На рис. 4 приведены графики зависимости коэффициентов k_L и $k1_L$ от длин катушки и цилиндра в диапазоне $h = 0-100$ см.

3. Критерий „короткой катушки“ [31]

В настоящее время нет общепринятого определения катушек по критерию отношения h/a . Диапазон определений варьируется от „длинных“ $h > 2a$ до „весь-

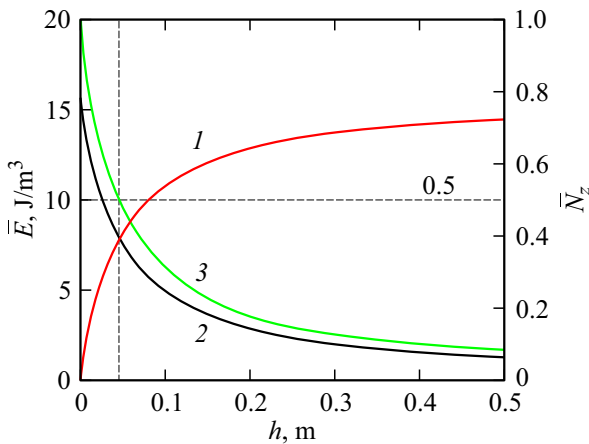


Рис. 5. Изменение объемных плотностей энергий и среднего по объему цилиндра размагничивающего фактора в диапазоне изменения длины цилиндра, $z = 0-50$ см, 1 — энергия цилиндра \bar{E}_{cyl} ; 2 — энергия размагничивающего поля \bar{E}_p ; 3 — средний по объему цилиндра размагничивающий фактор \bar{N}_z , $\bar{N}_z = 0.5$ при $h = 4.5$ см.

ма коротких“ $2a \ll h$. Ниже предлагается определение „короткой катушки“, основанное на соотношениях объемных плотностей энергий $\bar{E}_{syl} = E_{syl}/h\pi a^2$ [J/m³] эквивалентного цилиндра (17).

На рис. 5 приведены графики зависимостей от h объемных плотностей энергий $\bar{E}_{cyl}(a, h)$, $\bar{E}_p(a, h)$ и размагничивающего фактора $\bar{N}_z(a, h)$.

Из графиков следует, что энергия „длинного“ цилиндра ($h \gg 2a$) $\bar{E}_{cyl}(a, h)$ — кривая 1 — доминирует. Однако при уменьшении h , начиная с некоторого значения h_{kr} , в данном случае $h \leq 4.5$ см, преобладает энергия размагничивания $\bar{E}_p(a, h)$ — кривая 2. Этот эффект имеет место при $\bar{N}_z \leq 0.5$ ($n \leq 4.5$ см) — кривая 3. Значение h_k зависит от отношения $2a/h$, но вместе с тем значение $\bar{N}_z(a, h) = 0.5$ не изменяется и его можно предложить в качестве критерия „короткой катушки“. Такой результат не следует из токовой модели.

4. Пондеромоторные силы в осесимметричных системах

4.1. Поверхностные радиальные и аксиальные силы. Силовая функция Тили

Учитывая равенство внутренних энергий цилиндра и катушки, далее, если это не оговорено особо, термины „цилиндр“ и „катушка“ будем считать эквивалентными. Радиальная F_r и аксиальная F_z силы определяются из производных энергии $E_{cyl}(a, h)$ (17) по координатам r и z

$$F_r(a, h) = -\frac{d}{da} E_{cyl}(a, h), \quad F_z(a, h) = -\frac{d}{dh} E_{cyl}(a, h).$$

Для параметров $h = 50$ см, $2a = 10$ см, $M_z = 5 \cdot 10^3$ А/м имеем $F_r(a, h) = -2.178$ Н,

$F_z(a, h) = -0.123$ Н, что совпадает с расчетами сил для катушки ($w = 500$, $I = 5 \cdot A$).

Радиальные силы стремятся увеличить диаметр магнитной системы, а аксиальные приводят к сжатию системы с торцов. Для катушек возникновение таких сил вытекает из закона Ампера [32]. Эти эффекты как для катушки, так и для цилиндра следуют из закона сохранения энергии. Плотность усредненной по объему энергии системы $\bar{E} = E/h\pi a^2$, где E определена (17), уменьшается с ростом $2a$, что приводит к возникновению сил, стремящихся увеличить диаметр цилиндра. С увеличением же h \bar{E} возрастает, что является причиной возникновения сжимающих аксиальных торцевых напряжений.

Математическое выражение для радиальной силы $F_r(a, h)$ равносильно уравнению для F , выраженное через силовую функцию Тили $F(r, h)$, введенную в теории устойчивости цилиндрических магнитных доменов (ЦМД) [33]:

$$F(r, h) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2r}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{r(r, h)} Ec(r, h) - 1 \right],$$

$$Ec(r, h) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k(r, h)^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad k(r, h) = \sqrt{\frac{4r^2}{4r^2 + h^2}}$$

и $F_r(r, h) = \mu_0/2\pi h^2 M_z^2 F(r, h)$, где r — радиус ЦМД, h — толщина бесконечной пластины содержащей домен, M_z — намагниченность изолированного ЦМД (без учета намагниченности пластины). В [34] для быстрой оценки $F_r(r, h)$ предложено простое интерполяционное выражение $F_r(r, h) = 4r/(2h + 3r)$. В диапазоне ($0 \leq 2r/h \leq 10$) формула справедлива с точностью в несколько процентов.

4.2. Радиальные и аксиальные напряжения в многослойных системах

Схема расчета пондеромоторных сил для системы трех коаксиальных цилиндров $n = 3$ приведена на рис. 6 [35]. Далее в формулах для длин цилиндров введено обозначение L_n , а начало координат перенесено в центр магнитной системы путем замены $z' = z + L_n/2$, что обеспечивает симметрию графиков относительно начала координат.

Далее в расчетных формулах введены следующие обозначения: M — число слоев катушек (цилиндров), n — порядковый номер слоя ($n = 1 \dots M$), w_n — число витков n -го слоя катушки, $2a_1$ — диаметр 1-го слоя, $2a_n$ — диаметр n -го слоя, $2a_M$ — диаметр внешнего слоя.

Для демонстрации модели в расчетах приняты равные намагниченности и длины концентрических цилиндров при числе слоев $M = 3$. Для задания расстояния между слоями по r выбрана степенная функция: $Func_k(a_M, a_1, n, k) = [(n - 1/M - 1)^k](a_M - a_1)$,

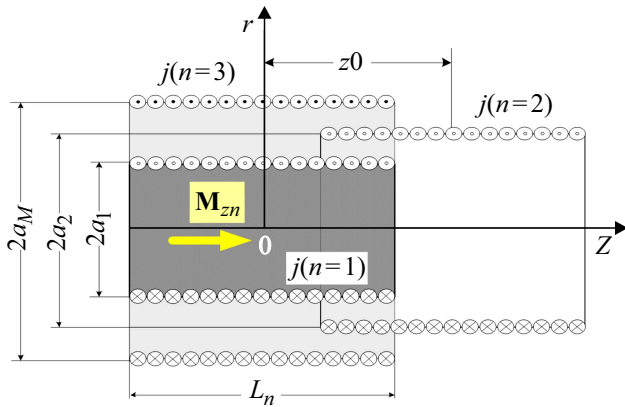


Рис. 6. Расчетная схема пондеромоторных сил для системы трех цилиндров (катушек) $n = 3$. $M_z(n)$ — намагниченность n -го слоя цилиндра. z_0 — сдвиг n -го цилиндра относительно начала координат, $j(n)$ — плотность поверхностного тока n -го цилиндра (катушки).

где k — показатель степени; $k = 1$ соответствует равным расстояниям между слоями. Радиус n -го слоя определяется как

$$a_n = \begin{cases} a_1, & \text{if } n = 1 \vee M = 1, \\ \text{no value} & \text{if } n > M, \\ a_1 + \text{Funcck}(a_M, a_1, n, k) & \text{everywhere.} \end{cases}$$

Ниже приведены результаты расчетов для следующих параметров системы:

$$a_n = \begin{cases} 10 \text{ cm}, & n = 1, \\ 15 \text{ cm}, & n = 2, L_n = 20 \text{ cm}, w_n = 100, \\ M_{zn} = 21.5 \cdot 10^3 \text{ A/m}, I_n = 5 \text{ A/turn} & (n = 1, 2, 3), \\ 20 \text{ cm}, & n = 3. \end{cases}$$

Энергия выделенного цилиндра в полях двух других при $z_0 = 0$ равна сумме взаимных энергий. Так, энергия n -го концентрического цилиндра в полях i -го и j -го записывается в виде

$$E_{nij}(L_n, a_n) = 2\pi \times \int_{-L_n/2}^{L_n/2} \int_0^{a_n} \frac{M_{zn}[B_{zi}(M_i, L_i, a_i) + B_{zj}(M_j, L_j, a_j)]}{2} r dr dz = E_{ni} + E_{nj}, \quad n, i, j = 1, 2, 3, \quad (19)$$

где $E_{ni} + E_{nj}$ — взаимные энергии цилиндров.

Радиальные и аксиальные силы рассчитываются из (19) по формулам

$$F_{rni} = \frac{d}{da_n} [E_{ni}(L_i, a_i) + E_{nj}(L_j, a_j)], \quad (20)$$

$$F_{zni} = \frac{d}{dL_n} [E_{ni}(L_i, a_i) + E_{nj}(L_j, a_j)]. \quad (21)$$

Суммарные нормированные к площадям поверхностей радиальные $\langle \sigma_{rni} \rangle$ и аксиальные $\langle \sigma_{zni} \rangle$ механические напряжения (N/m^2) n -го цилиндра в полях i -го и j -го определяются как

$$\langle \sigma_{rni} \rangle = \frac{d}{da_n} \left[\frac{E_{ni}(L_i, a_i) + E_{nj}(L_j, a_j)}{L_n 2\pi a_n} \right] = \langle \sigma_{rni} \rangle + \langle \sigma_{rni} \rangle, \quad (22)$$

$$\langle \sigma_{zni} \rangle = \frac{d}{dL_n} \left[\frac{E_{ni}(L_i, a_i) + E_{nj}(L_j, a_j)}{\pi a_n^2} \right] = \langle \sigma_{zni} \rangle + \langle \sigma_{zni} \rangle. \quad (23)$$

Взаимные энергии цилиндров попарно равны. Равенство взаимных энергий не означает равенства взаимных поверхностных напряжений, что объясняется различной площадью поверхностей цилиндров вследствие различия их диаметров.

При $(n = i = j)$ получаем внутреннюю энергию n -го цилиндра (15). Радиальная $\langle \sigma_{rn} \rangle$ и аксиальная $\langle \sigma_{zn} \rangle$ плотности сил по цилиндрической и торцевой поверхностям n -го цилиндра в собственном поле B_{zn} равны

$$\langle \sigma_{rn} \rangle = \frac{d}{da_n} E_n(L_n, a_n) / L_n 2\pi a_n, \quad \langle \sigma_{zn} \rangle = \frac{d}{dL_n} E_n(L_n, a_n) / \pi a_n^2. \quad (24)$$

Для изолированного цилиндра при $L_n \rightarrow \infty$ имеем равенство $\langle \sigma_z \rangle = \langle \sigma_z \rangle$ [31,32].

На рис. 7 показаны взаимные радиальные механические напряжения по образующим трех цилиндров попарно.

Длины стрелок изображены в масштабе. Результирующие радиальные напряжения, действующие на отдельный цилиндр, получаются (с учетом знака) суммированием напряжений по приведенной схеме рисунка. Так, $\langle \sigma_{r132} \rangle = \langle \sigma_{r13} \rangle + \langle \sigma_{r12} \rangle = 4.06$, что соответствует расчетам по формуле (22).

Энергия системы коаксиальных цилиндров при смещении n -го цилиндра на расстояние z_0 в Z -направлении

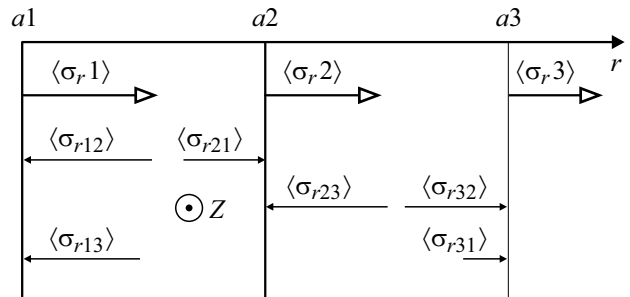


Рис. 7. Поверхностные радиальные напряжения цилиндров. $\langle \sigma, 1 \rangle$, $\langle \sigma, 2 \rangle$, $\langle \sigma, 3 \rangle$ — напряжения, действующие на цилиндрические поверхности отдельных цилиндров в собственных полях (N/m^2). $\langle \sigma, 1 \rangle = 2.275$, $\langle \sigma, 2 \rangle = 1.867$, $\langle \sigma, 3 \rangle = 1.588$. Взаимные напряжения: $\langle \sigma_{r12} \rangle = 2.275$, $\langle \sigma_{r21} \rangle = 1.43$, $\langle \sigma_{r23} \rangle = 2.078$, $\langle \sigma_{r32} \rangle = 1.767$, $\langle \sigma_{r13} \rangle = 1.801$, $\langle \sigma_{r31} \rangle = 0.818$ [35].

в полях i -го и j -го равна

$$E_{nij}(L_n, a_n, z_0) = 2\pi \times \int_{-L_n/2}^{L_n/2} \int_0^{a_n} \frac{M_{zn}[B_{zi}(z-z_0)B_{zj}(z-z_0)]}{2} r dr dz = E_{ni} + E_{nj}. \quad (25)$$

Продольные (аксиальные) силы $F_{z_{nij}}(z_0)$ и механические напряжения $\langle \sigma_{r_{nij}} \rangle$ при смещении n -го цилиндра в Z -направлении (рис. 6) в полях i -го и j -го цилиндров вычисляются по формулам

$$F_{z_{nij}}(z_0) = dE_{nij}(L_n, a_n, z_0)/da_n, \quad \langle \sigma_{z_{nij}} \rangle = F_{z_{nij}}(z_0)/\pi a_n^2. \quad (26)$$

Аналогично определяются радиальные силы и напряжения

$$F_{r_{nij}}(z_0) = dE_{nij}(L_n, a_n, z_0)/dL_n, \quad \langle \sigma_{r_{nij}} \rangle = F_{r_{nij}}(z_0)/L_n 2\pi a_n. \quad (27)$$

Для системы цилиндров результирующая сила и напряжения получаются простым суммированием. Не включенные в настоящую работу результаты расчета напряжений приведены в [31,35].

5. Взаимная индуктивность коаксиальных катушек [30]

Ниже приведена схема расчета взаимной индуктивности в системе трех коаксиальных катушек ($n = 3$) (рис. 1). Расчеты выполнены для входных параметров, введенных в разд. 4.2.

Суть метода заключается в расчете взаимной энергии между парами цилиндров. Вычисление энергии и взаимной энергии цилиндров есть важнейший промежуточный этап при расчете взаимной индуктивности катушек. Энергия n -го цилиндра радиусом a_n в поле i -го радиусом a_i определяется (19). Собственные ($n = i$) и взаимные индуктивности катушек вычисляются из энергий и взаимных энергий цилиндров [36]:

$$M_{ni} = \frac{2E_{cyl}(n, i)}{I_n I_i}. \quad (28)$$

С учетом равенства взаимных энергий цилиндров расчеты M_{ni} достаточно производить только для одной пары системы. Энергия n -го цилиндра и собственная индуктивность n -ой катушки L вычисляются по формулам (2), (19), (30), если положить в последних $n = i$. Попарные взаимные индуктивности, индуктивности N связанных контуров, определяемые из энергий, рассчитываются по известным формулам [37].

Приведенный общий метод расчета энергий был применен в [27,30,31] для расчета продольных ponderomotorных сил, взаимной индуктивности системы катушек

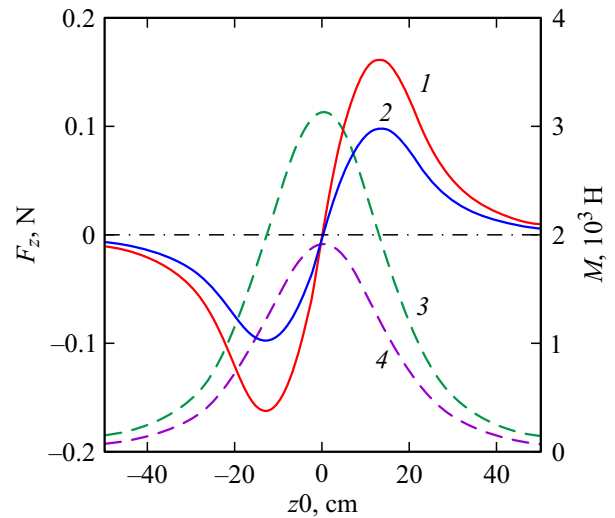


Рис. 8. Силы F_z и взаимные индуктивности M . 1 — $F_{z_{213}}(n = 2)$, 2 — $F_{z_{123}}(n = 1)$, 3 — $M_{213}(n = 2)$, 4 — $M_{123}(n = 1)$.

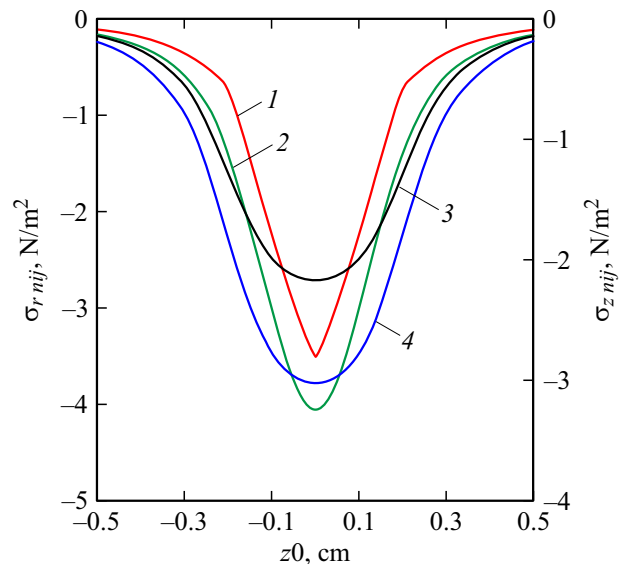


Рис. 9. Поверхностные радиальные $\langle \sigma_r \rangle$ и аксиальные напряжения $\langle \sigma_z \rangle$. 1 — $\sigma_{r_{213}}(n = 2)$, 2 — $\sigma_{r_{123}}(n = 1)$, 3 — $\sigma_{z_{213}}(n = 2)$, 4 — $\sigma_{z_{123}}(n = 1)$. $z = -0.5-0.5$ м.

и поверхностных механических напряжений. Все расчетные значения соответствуют данным работы [11].

Результаты расчетов параметров магнитных систем при $n = 3$ суммированы в таблице. Запись $\langle \sigma_{r_{nij}} \rangle$ означает радиальные напряжения, действующие на n -й слой цилиндра (катушки) в полях i -го и j -го слоев.

На рис. 8 построены графики аксиальных сил F_z , действующих на n -й цилиндр в полях i -го и j -го при его смещении в Z -направлении относительно начала координат на расстояние z_0 и соответствующих взаимных индуктивностей M эквивалентных катушек (рис. 6).

Параметры магнитной системы $n = 3$ ($z_0 = 0$) [35]

Радиус и номер цилиндра a_n, cm	Энергия цилиндра E_n, J	Радиальные напряжения цилиндра, $\langle \sigma_r \rangle, \text{N/m}^2$	Аксиальные напряжения цилиндра, $\langle \sigma_z \rangle, \text{N/m}^2$	Взаимные энергии цилиндров E_{ni}, J	Взаимные радиальные напряжения, $\langle \sigma_{rni} \rangle, \text{N/m}^2$	Индуктивность катушек, $L_n, 10^3 \text{H}$	Взаимная индуктивность катушек, $M_{ni}, 10^3 \text{H}$
$a_1 = 10$	0.017	-2.276	-3.406	$E_{12} = 0.013$	$\langle \sigma, 3_{12} \rangle = -2.585$	$L_1 = 1.359$	$M_{12} = 1.058$
$a_2 = 15$	0.033	-1.867	-3.013	$E_{13} = 0.011$	$\langle \sigma, 2_{13} \rangle = -3.509$	$L_2 = 2.643$	$M_{13} = 0.86$
$a_3 = 20$	0.052	-1.588	-2.714	$E_{23} = 0.026$	$\langle \sigma, 1_{23} \rangle = -4.06$	$L_3 = 4.149$	$M_{23} = 2.075$

Рис. 9 иллюстрирует изменение поверхностных радиальных $\langle \sigma_{rni} \rangle$ и аксиальных механических $\langle \sigma_{zni} \rangle$ напряжений при смещении n -го цилиндра в Z -направлении (рис. 6) в полях i -го и j -го цилиндров.

6. Индуктивность катушки прямоугольного сечения

Индуктивность вычисляется из энергии прямого полового аксиально намагниченного цилиндра (тора) толщиной обмотки t . Энергия равна разности энергий цилиндров с радиусами $a + t/2$ и $a - t/2$, определяемых (17). Цилиндры имеют противоположные направления намагниченности M_z . Согласно (18), эта энергия есть энергия эквивалентной катушки:

$$E_t(a, t, L) = 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} \int_{a-t/2}^{a+t/2} \frac{M_z B_z(a, t, L)}{2} r dr dz. \quad (29)$$

Для катушки с радиусом по среднему витку $a = 5 \text{ cm}$, длиной $L = 20 \text{ cm}$, $w = 500$ толщиной обмотки $t = 2 \text{ cm}$ и током в витке $I = 5 \text{ A}$ ($M_z = 1.25 \cdot 10^4 \text{ A/m}$) энергия $E_t(a, t, L) = 0.108 \text{ J}$. Индуктивность катушки $L_t = 2E_t/I^2 = 8.621 \cdot 10^{-3} \text{ H}$. Индуктивность катушки по среднему витку $L_{mid} = 10.095 \cdot 10^{-3} \text{ H}$. (Поправка на толщину обмотки $\Delta L = 1.472 \cdot 10^{-3} \text{ H}$) Результаты согласуются с данным, приведенными в примере 6–7 [11].

Заключение

В работе показаны преимущества представленного метода расчета многокомпонентных аксиальных осесимметричных систем в плане простоты и универсальности. В части расчетов пондеромоторных сил метод применим как к токовым осесимметричным катушкам, так и к магнитным цилиндрам. Приведенные численные результаты соответствуют значениям параметров, приведенных в [11], откуда заимствованы входные параметры ряда тестовых расчетов. Установлено соответствие с моделями других авторов. Возможны расчеты систем с параллельными и несовпадающими осями. Эти расчеты концептуально не вносят новизны и в работе не приводятся. В любом случае вычисляется энергия выделенного цилиндра или его части (тор) в полях

других элементов системы. В модели не накладываются какие-либо ограничения на взаимное расположение элементов рассчитываемой системы, на их геометрические и магнитные параметры.

Радиальные и аксиальные силы (напряжения), действующие на поверхность цилиндра (катушки), рассчитываются из энергии, запасенной в магнитном поле цилиндра, минуя стадию расчета индуктивности. Независимость размагничивающих коэффициентов от внешних полей позволяет использовать „энергетический подход“ для расчета сложных систем, составленных из отдельных элементов, например из цилиндров, катушек и/или прямоугольных призм.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Приложение

Размагничивающие факторы и 3D-поля цилиндра, выраженные через эллиптические интегралы [30]

Размагничивающие коэффициенты (9), (10) могут быть записаны через эллиптические интегралы

$$N_z(r, z) = 4\pi \left[1 - \frac{zk_1 Kc(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(L-z)k_2 Kc(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4} \right], \quad (П1)$$

$$N_{rz}(r, z) = 4\pi \left(\frac{1}{\pi} \right) \sqrt{\frac{a}{r}} \left\{ \left(\frac{1}{k_1} \right) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2} \right) Kc(k_1) - Ec(k_1) \right] - \left(\frac{1}{k_2} \right) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2} \right) Kc(k_2) - Ec(k_2) \right] \right\}, \quad (П2)$$

где $\Lambda_0(\alpha, \beta)$ — лямбда-функция Хеймана — полный эллиптический интеграл третьего рода; $\Lambda_0(\alpha, \beta)$ выражается через полные $Kc(k)$, $Ec(k)$, и неполные $F(\beta, k)$, $E(\beta, k)$ эллиптические интегралы 1-го и 2-го

рода [37]

$$\begin{aligned}\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1) &= \left(\frac{2}{\pi}\right) \left[E_c(k_1)F(\beta_1, \sqrt{1-k_1^2}) \right. \\ &\quad \left. + K_c(k_1)E(\beta_1, \sqrt{1-k_1^2}) - K_c(k_1)F(\beta_1, \sqrt{1-k_1^2}) \right], \\ \Lambda_0(\alpha_2, \beta_2) &= \left(\frac{2}{\pi}\right) \left[E_c(k_2)F(\beta_2, \sqrt{1-k_2^2}) \right. \\ &\quad \left. + K_c(k_2)E(\beta_2, \sqrt{1-k_2^2}) - K_c(k_2)F(\beta_2, \sqrt{1-k_2^2}) \right],\end{aligned}$$

интегралы

$$K_c(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta$$

и

$$E_c(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Модули $K_c(k)$, $E_c(k)$ равны

$$k_1^2 = 4ar[z^2 + (a+r)^2]^{-1}, \quad k_2^2 = 4ar[(h-z)^2 + (a+r)^2]^{-1}.$$

Неполные интегралы $F(\beta, k)$, $E(\beta, k)$ с дополнительными модулями m и амплитудами β записываются в виде

$$F(\beta, m) = \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta}} d\theta,$$

$$E(\beta, m) = \int_0^\beta \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad m_1 = \sqrt{1 - k_1^2},$$

$$m_2 = \sqrt{1 - k_2^2}, \quad \alpha_1 = \arcsin k_1, \quad \alpha_2 = \arcsin k_2,$$

$$\beta_1 = \arcsin \frac{z}{\sqrt{z^2 + (a-r)^2}},$$

$$\beta_2 = \arcsin \frac{h-z}{\sqrt{(h-z)^2 + (a-r)^2}},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — главные значения \arcsin .

Формулы (П1), (П2) определяют размагничивающие факторы N_{zz} и N_{rz} в объеме цилиндра. При расчетах полей вне цилиндрической области необходимо переопределение расчетных формул. Ниже приведены соотношения для коэффициентов N_{zz} и N_{rz} , позволяющие вычислять поля и индукцию цилиндра во всем пространстве. Формулы записаны раздельно для характерных областей внутри и вне цилиндра, определяемых

диапазонами изменения z и r [30]:

$$\begin{aligned}N_{zz}(r, z) &= \\ &\left\{ \begin{aligned} &\text{if } (0 \leq z \leq h) \wedge (|r| \leq a) \\ &\left[1 - \frac{zk_1K_c(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2K_c(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4} \right] \\ &0 \text{ if } (0 \leq z \leq h) \wedge (r = 0) \\ &-\frac{zk_1K_c(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2K_c(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4} \\ &\text{if } (z < 0) \wedge (0 < |r|) < a \\ &-\frac{zk_1K_c(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2K_c(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4} \\ &\text{if } (z > h) \wedge (0 < |r|) < a \\ &-\frac{zk_1K_c(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2K_c(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4} \\ &\text{if } (0 < z < h) \wedge (|r| > a) \\ &-\frac{zk_1K_c(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2K_c(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4} \\ &\text{if } (z < 0) \wedge (|r| \geq a) \\ &-\frac{zk_1K_c(k_1)}{4\pi\sqrt{ar}} + \frac{\Lambda_0(\alpha_1, \beta_1)}{4} - \frac{(h-z)k_2K_c(k_2)}{4\pi\sqrt{ar}} - \frac{\Lambda_0(\alpha_2, \beta_2)}{4} \\ &\text{if } (z > h) \wedge (|r| \geq a) \\ &-\frac{1}{2} \left[\frac{h-z}{\sqrt{(h-z)^2 + a^2}} + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{h-z}{|h-z|} - \frac{z}{|z|} \right] \\ &\text{if } r = 0 \\ &0 \text{ everywhere,} \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{П3}$$

$$\begin{aligned}N_{rz}(r, z) &= \\ &\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{\pi} \right) \left(\sqrt{\frac{a}{r}} \right) \left\{ \left(\frac{1}{k_1} \right) \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{2} \right) K_c(k_1) - E_c(k_1) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{k_2} \right) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2} \right) K_c(k_2) - E_c(k_2) \right] \right\} \text{ if } r > 0 \\ &-\left(\frac{1}{\pi} \right) \left(\sqrt{\frac{a}{r}} \right) \left\{ \left(\frac{1}{k_1} \right) \left[\left(1 - \frac{k_1^2}{2} \right) K_c(k_1) - E_c(k_1) \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{k_2} \right) \left[\left(1 - \frac{k_2^2}{2} \right) K_c(k_2) - E_c(k_2) \right] \right\} \text{ if } r < 0 \\ &0 \text{ everywhere.} \end{aligned} \right. \end{aligned} \tag{П4}$$

Последняя формула (строка) в (П3) записана для размагничивающего фактора на оси.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Д. Монтгомери. *Получение сильных магнитных полей с помощью соленоидов* (Мир, М., 1971) [D.V. Montgomeri. *Solenoid Magnet Design* (Wiley-Interscience, NY., 1971)]
- [2] В.Р. Карасик. *Физика и техника сильных магнитных полей* (Наука, М., 1964)
- [3] Г. Кнопфель. *Сверхсильные импульсные магнитные поля* (Мир, М., 1972) [H. Kneepfel. *Pulsed High Magnetic Fields* (North-Holland, Amsterdam 1970)]
- [4] Д. Паркинсон, Б. Малхолл. *Получение сильных магнитных полей* (Атомиздат, М., 1971) [D.H. Parkinson, V.E. Mulhall. *The Generation of High Magnetic Fields* (Plenum Press, NY., 1967)]
- [5] Б.Л. Алиевский, А.М. Октябрьский, В.Л. Орлов, В.А. Постников. *Моделирование магнитных полей осесимметричных систем*: уч. пособие, под ред. Б.Л. Алиевского (Изд-во МАИ, М., 2007)
- [6] А.С. Лагутин, В.И. Ожогин. *Сильные импульсные магнитные поля в физическом эксперименте* (Энергоатомиздат, М., 1988)
- [7] Электронный ресурс. Режим доступа: <http://coil32.ru/>, <http://electronbunker.ca>, <http://g3ynh.info/zdocs/magnetics/>
- [8] Дж.К. Максвелл. *Трактат об электричестве и магнетизме* (Наука, М., 1989), т. 2. [J.C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Dover Publ., NY., 1954), v. 2.]
- [9] L. Lorenz. *Über die Fortpflanzung der Elektrizität* (Annalen der Physik, **VII**, 1879)
- [10] H. Nagaoka. *J. College Science*, **27**, 18 (1909).
- [11] П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин. *Расчет индуктивностей* (Энергоатомиздат, Л., 1986)
- [12] М.В. Немцов. *Справочник по расчету параметров катушек индуктивности* (Энергоатомиздат, М., 1989)
- [13] Г.А. Штамбергер. *Устройства для создания слабых постоянных магнитных полей*, под ред. К.Б. Карандеева (Наука, Новосибирск, 1972)
- [14] R.J. Joseph, J. Schlömann. *Appl. Phys.*, **36** (5), 1579 (1964).
- [15] А.К. Андреев. *Программы для ЭВМ* (Св-во о госрегистрации № 2012614673. 2012. Бюл. № 3. Ч. 2. С. 378–379). [А.К. Andreev. *State Registration Certificate of Computer* (Program N 2012614673, Byull. Izobret., No. 3, (2012), part 2, p. 378)]
- [16] T. Taniguchi. *J. Magn. Magn. Mater.*, **452**, 464 (2018). DOI: 10.1016/j.jmmm.2017.11.078
- [17] A. Caciagli, R.J. Vaars, A.P. Philipse, B.W.M. Kuipers. *J. Magn. Magn. Mater.*, **456**, 423 (2018). DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.02.003
- [18] R. Ravaut, G. Lemarquand, V. Lemarquand, S. Babic, C. Akyel. *PIER*, **102**, 367 (2010). DOI: 10.2528/PIER07101504
- [19] J. Conway. *IEEE Trans. Magn.*, **43** (3), 1023 (2007). DOI: 10.1109/TMAG.2006.888565
- [20] S. Babic, C. Akyel. *Physics*, **2** (3), 352 (2020). DOI: 10.3390/physics2030019
- [21] Л.Б. Луганский. *Электричество*, **2**, 55 (2017).
- [22] А.К. Андреев. Проблемы машиностроения и надежности машин, **1**, 34 (2019). DOI: 10.1134/S0235711919010036 [А.К. Andreev. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, **48** (1), 26 (2019). DOI: 10.3103/S1052618819010035]
- [23] Э. Парселл. *Электричество и магнетизм* (Наука, М., 1975) [E. Purcell. *Electricity and Magnetism* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013)]
- [24] А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. *Спиновые волны* (Наука, М., 1967) [A.I. Akhiezer, V.G. Bar'yakhtar, S.V. Peletminskii. *Spin Waves* (John Wiley & Sons, North-Holland, Amsterdam, 1968)]
- [25] М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. *Методы теории функций комплексного переменного* (Наука, М., 1987)
- [26] Дж.Н. Ватсон. *Теория бесселевых функций* (ИЛ, М., 1949) [G.N. Watson. *Theory of Bessel Functions* (Cambridge University Press, 1922)]
- [27] А.К. Андреев. Письма в ЖТФ, **47** (11), 17 (2021). DOI: 10.21883/PJTF.2021.11.51001.18729 [А.К. Andreev. *Tech. Phys. Lett.*, **47** (6), 547 (2021). DOI: 10.1134/1955S1063785021060031]
- [28] G. Eason, V. Noble, I.N. Sneddon. *Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. A*, **247** (935), 529 (1955).
- [29] Ю. Люк. *Специальные математические функции и их аппроксимации* (МИР, М., 1980) [Y.L. Luke. *Mathematical Functions and Their Approximations* (Academ. Press Inc. NY., San Francisco, London, 1975)]
- [30] А.К. Андреев. Письма в ЖТФ, **46** (21), 48 (2020). DOI: 10.21883/PJTF.2020.21.50198.18042 [А.К. Andreev. *Tech. Phys. Lett.*, **46** (11), 1096 (2020). DOI: 10.1134/S1063785020110024]
- [31] А.К. Андреев. Письма в ЖТФ, **47** (9), 41 (2021). DOI: 10.21883/0000000000 [А.К. Andreev. *Tech. Phys. Lett.*, **47** (5), 464 (2021). DOI: 10.1134/S1063785021050023]
- [32] С.Г. Калашников. *Электричество* (Физматлит, М., 2003)
- [33] Э. Бобек, Э. Делла Торре. *Цилиндрические магнитные домены* (Энергия, М., 1977) [A.H. Bobeck, E. Della Torre. *Magnetic Bubbles* (North-Holland Publishing Company-Amsterdam, Oxford, 1975)]
- [34] H. Callen, R.M. Josephs. *J. Appl. Phys.*, **42** (5), (1977). DOI: 10.1063/1.1660475
- [35] А.К. Андреев. Проблемы машиностроения и надежности машин, **6**, 22 (2022). DOI: 10.31857/S0235711922060037 [А.К. Andreev. *J. Machinery Manufacture and Reliability*, **51** (6), 511 (2022). DOI: 10.3103/S1052618822060036]
- [36] И.В. Савельев. *Курс общей физики*, кн. 2. *Электричество и магнетизм* (Лань, СПб., 2006)
- [37] М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), *Справочник по специальным функциям* (Наука, М., 1979) [M. Abramowitz, I. Stegun (ed.). *Handbook of Mathematical Functions* (Nation. Bureau of Standards, NY., 1964)]