01.5;13.2

Особенности развития электрогидродинамической неустойчивости границы расплавленного металла в сильном электрическом поле

© С.А. Баренгольц[1,2], Н.М. Зубарев[2,3], Е.А. Кочурин[3]

[1] Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия
[2] Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва, Россия
[3] Институт электрофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия
E-mail: nick@iep.uran.ru

Поступило в Редакцию 15 сентября 2023 г.
В окончательной редакции 9 ноября 2023 г.
Принято к публикации 9 ноября 2023 г.

Исследована динамика развития неустойчивости свободной границы жидкого металла (расплавленной меди) в сильном электрическом поле напряженностью порядка 10^8 V/cm. При таких локальных полях происходит плавление естественных выступов субмикронного масштаба на поверхности катода за счет протекания через них автоэмиссионного тока. Электрогидродинамическая неустойчивость границы расплава приводит к заострению границы, что обеспечивает локальное усиление электрического поля и, как следствие, ускоряет процессы вакуумного пробоя. Продемонстрировано,что особенностью электрогидродинамической неустойчивости в рассматриваемых условиях является необходимость учитывать вязкие эффекты. Для их описания предложена относительно простая нелинейная модель.

Ключевые слова: электрогидродинамическая неустойчивость, расплавленный металл, вакуумный пробой.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.03.57042.19731

Исследования физических процессов, приводящих к вакуумному пробою, получили новый импульс в развитии в связи с разработкой ускорительной техники тераваттного уровня мощности [1]. Именно вакуумный пробой ускорительной структуры при воздействии на нее электромагнитных импульсов наносекундной длительности является главной проблемой на пути достижения высоких ускорительных градиентов [2]. Исследование наносекундного вакуумного пробоя показало [3], что его основным механизмом является образование проводящей среды (плазмы) на катоде из-за разогрева автоэмиссионным током высокой плотности микровыступов с наиболее высокими коэффициентами β усиления электрического поля. Анализ разогрева медных микровыступов показал [4,5], что напряженность поля на их вершинах для реализации этого механизма в ускорительных структурах [1] составляет порядка 10^8 V/cm (для характерных значений $\beta = 50-100$ это соответствует макроскопическому полю $1-2$ MV/cm).

Цель настоящей работы — проанализировать особенности развития электрогидродинамической (ЭГД) неустойчивости [6,7] поверхности расплавленного металла в сильных полях порядка 10^8 V/cm. Эта неустойчивость определяет тенденцию к неограниченному заострению поверхности. В результате после плавления микровыступа будут меняться его геометрические параметры (увеличиваться β) и, как следствие, ускоряться предпробойные процессы.

Начнем анализ с оценок, которые продемонстрируют, в чем состоит специфика развития ЭГД-неустойчивости расплавленного металла в полях, на три порядка превышающих порог неустойчивости $E_c = (4\varepsilon_0^{-2}\rho g\alpha)^{1/4}$ [7], где ε_0 — электрическая постоянная, ρ — плотность, g — ускорение свободного падения, α — коэффициент поверхностного натяжения (для жидкой меди $E_c \approx 8.5 \cdot 10^4$ V/cm). Будем для простоты считать границу жидкости в невозмущенном состоянии плоской. Функция η задает ее возмущение — отклонение от плоскости. При анализе неустойчивостей границы η ищется в виде плоской волны: $\eta(x,t) \propto \exp(ikx - i\omega t)$, где x — координата, t — время, $k > 0$ — волновое число, ω — частота. Линейная (соответствующая условию малости углов наклона) динамика границы описывается дисперсионным соотношением (связью между величинами ω и k), которое для несжимаемой невязкой идеально проводящей жидкости во внешнем однородном поле напряженностью E имеет вид [7]:

$$\rho\omega^2 = -\varepsilon_0 E^2 k^2 + \alpha k^3. \quad (1)$$

Из (1) видно, что ω — мнимая в области относительно малых волновых чисел $0 < k < k_c \equiv \varepsilon_0 E^2/\alpha$, что соответствует апериодической неустойчивости границы (при $k > k_c$ капиллярные силы подавляют дестабилизирующее влияние электростатических сил). Развитие неустойчивости приводит (на ее нелинейных стадиях) к формированию конических острий с углом раствора 98.6° — конусов Тейлора [8,9]. Наиболее быстро развиваться неустойчивость будет для волнового числа $k_d = 2k_c/3$ (доминантная мода неустойчивости), которое определяет масштаб конических образований как $\lambda_d = 2\pi/k_d \propto E^{-2}$. Характерное время развития неустойчивости (время, за которое амплитуда возмущения увеличивается в $e \approx 2.718$ раз) есть $\tau_d = 1/\gamma_d \propto E^{-3}$, где $\gamma_d = \mathrm{Im}\,\omega(k_d)$ — инкремент

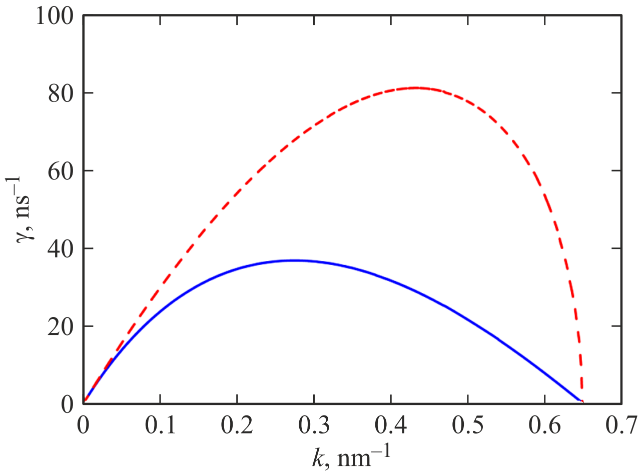

Рис. 1. Зависимость инкремента ЭГД-неустойчивости γ от волнового числа k с учетом (сплошная линия) и без учета (штриховая линия) вязких эффектов. Поле $E = E_\nu \approx 9.8 \cdot 10^7$ V/cm; жидкая медь при температуре плавления.

неустойчивости. Как видно, λ_d и τ_d быстро убывают с ростом E. Уменьшение характерных масштабов задачи неизбежно приведет к тому, что приближение идеальной жидкости перестанет работать и необходимо будет учитывать вязкость среды (см., например, [9,10]). Согласно расчетам [10], вязкие эффекты приводят к уменьшению угла формирующегося конуса. Отметим также фактор дополнительного нагрева металла при его быстрых деформациях за счет вязкого трения.

Покажем, что в полях порядка 10^8 V/cm роль вязких эффектов становится сравнимой с ролью капиллярных эффектов, а также обсудим, как это повлияет на динамику развития неустойчивости. Закон дисперсии с учетом вязкости можно получить, взяв известную формулу для гравитационных волн [11] и сделав в ней формальную замену $\rho g k \to -\varepsilon_0 E^2 k^2 + \alpha k^3$, соответствующую тому, что вместо силы тяжести мы будем рассматривать электростатические и капиллярные силы. Получим (здесь ν — кинематическая вязкость)

$$\rho(2\nu k^2 - i\omega)^2 - \varepsilon_0 E^2 k^2 + \alpha k^3 = 4\rho \nu^{3/2} k^3 \sqrt{\nu k^2 - i\omega}. \tag{2}$$

Из анализа (2) следует, что можно ввести характерное значение напряженности поля $E_\nu = \alpha \nu^{-1} \varepsilon_0^{-1/2} \rho^{-1/2}$, зависящее лишь от параметров жидкости, такое, что при $E \ll E_\nu$ вязкими эффектами можно пренебречь, а при $E \gg E_\nu$ именно они будут определять динамику неустойчивости. При сопоставимых с E_ν полях реализуется наиболее сложный случай, когда вязкие силы будут сравнимы с электростатическими и капиллярными. Для жидкой меди при температуре плавления можно взять $\rho = 8.0 \cdot 10^3$ kg/m^3, $\alpha = 1.3$ N/m, $\nu = 5.0 \cdot 10^{-7}$ m^2/s. Находим $E_\nu \approx 9.8 \cdot 10^7$ V/cm, что в точности попадает в интересующий нас диапазон полей.

Рассмотрим, как развивается ЭГД-неустойчивость при полях порядка E_ν. Будем интересоваться описывающими развитие апериодической неустойчивости решениями закона дисперсии (2). Это соответствует тому, что $\omega = i\gamma$, где $\gamma > 0$ — инкремент неустойчивости. На рис. 1 для $E = E_\nu$ штриховой и сплошной линиями показаны зависимости γ от k без учета и с учетом вязкости (формулы (1) и (2) соответственно). Видно, что наш вывод о существенном влиянии вязких эффектов на развитие неустойчивости при таком поле верен. Волновое число доминантной моды (k_d) уменьшается в 1.6 раза, а соответствующий инкремент (γ_d) — в 2.2 раза. Характерный пространственный и временной масштабы при этом составляют $\lambda_d \approx 23$ nm и $\tau_d \approx 27$ ps. Диапазон волновых чисел, для которых поверхность неустойчива, остается неизменным (масштаб более $2\pi/k_c \approx 10$ nm). Применительно к расплаву, образующемуся на вершине катодного выступа, можно для оценок отождествить радиус вершины острия R с четвертью длины волны, что дает $R > 2{-}6$ nm. Эти размеры коррелируют с рассмотренными в [12], где методом молекулярной динамики моделировалась деформация вершины катодного острия с $R = 1{-}10$ nm. При $R > 3$ nm пороговое значение поля, при котором начиналось вытягивание медного нановыступа, находилось в диапазоне $(10.5{-}11.5) \cdot 10^7$ V/cm, т.е. близко к значению E_ν. Согласно расчетам [12], вытягивание происходило за времена в десятки-сотни пикосекунд при высоких температурах, значительно превышающих температуру плавления. Рассмотренный нами ЭГД-механизм заострения вершины выступа не требует достижения высоких температур, причем может реализовываться при меньших полях (см. далее) в случае увеличения масштаба области расплава с единиц до десятков нанометров.

При разработке нелинейной модели развития неустойчивости важно, чтобы связь γ и k описывалась максимально простым выражением. Так, в пределе $k \ll k_c$ имеем линейную зависимость $\gamma \approx \varepsilon_0^{1/2} \rho^{-1/2} E k$, что позволило в [13] построить модель, описывающую нелинейную эволюцию границы вплоть до формирования на ней сингулярностей — точек с бесконечной кривизной. Для вязкой жидкости мы сталкиваемся с той трудностью, что выражение для закона дисперсии (2) является весьма громоздким и неразрешимо относительно частоты (инкремента). Однако, как выясняется, описываемая (2) связь γ и k в частном случае $E = E_\nu/2$ прекрасно аппроксимируется параболической зависимостью

$$\gamma \approx \alpha (2\rho\nu)^{-1} k - 2\nu k^2. \tag{3}$$

На рис. 2 показаны точная зависимость $\gamma(k)$ (сплошная линия) и задаваемая (3) аппроксимация (штриховая линия). Как видно, выражение (3), несмотря на свою простоту, отражает все основные особенности точного закона дисперсии во всем определяющем развитие неустойчивости диапазоне волновых чисел $0 < k < k_c$. Это чрезвычайно важно при анализе нелинейных стадий неустойчивости, на которых происходит перекачка энергии из крупномасштабных гармоник в мелкомасштабные; именно этот процесс приводит к формированию острий.

Мы предлагаем при $E = E_v/2$ для описания развития ЭГД-неустойчивости в случае плоской симметрии задачи использовать следующую нелинейную модель:

$$\eta_t = -\alpha(2\rho\nu)^{-1}\widehat{H}\eta_x + 2\nu\eta_{xx} + \alpha(4\rho\nu)^{-1}\left[(\widehat{H}\eta_x)^2 - (\eta_x)^2\right]. \quad (4)$$

Здесь η_t и η_x обозначают частные производные по t и x соответственно; $\widehat{H}$ — оператор Гильберта, обладающий свойством $\widehat{H}e^{ikx} = i\,\mathrm{sgn}(k)e^{ikx}$. Линейная часть (4) соответствует приближенному закону дисперсии (3) и позволяет адекватно учесть влияние и электростатических, и капиллярных, и вязких сил. Нелинейная часть (4) соответствует модели из работы [13], в которой учитывались только электростатические силы.

Рассмотрим в рамках модельного уравнения (4) динамику формирования сингулярности на свободной границе жидкости. Считаем, что жидкость занимает ограниченную в пространстве область $-L/2 \leqslant x \leqslant L/2$. Исходную форму границы зададим как $\eta(x, 0) = A\cos(2\pi x/L)$ с $L = 360\,\mathrm{nm}$ (применительно к расплаву на вершине острия это соответствует радиусу около 100 nm) и амплитудой $A = 0.01\,L$. Уравнение (4) решалось численно на основе спектральных методов с числом гармоник $N = 8096$. Вследствие специфики используемой методики граничные условия по пространству брались периодическими. Интегрирование по времени проводилось явным методом Рунге–Кутта четвертого порядка точности с шагом $dt = 2.2 \cdot 10^{-15}$ s. Эволюция возмущения границы продемонстрирована на рис. 3. Видно, что происходит неограниченное заострение поверхности за конечное время — к моменту $t = t_c \approx 0.73$ ns. Это время не определяется напрямую доминантной модой неустойчивости, для которой характерное время значительно меньше: оно составляет ~ 0.16 ns (рис. 2). Время t_c складывается из времени нарастания амплитуды основной гармоники с $k = 2\pi/L$ (соответствующее характерное время составляет ~ 0.41 ns) и времени перекачки энергии из основной гармоники в доминантную за счет их нелинейного взаимодействия. Масштаб формирующегося острия можно оценить как ширину области, в которой тангенс угла наклона превышает единицу. Она составила ~ 30 nm, что ожидаемо близко к половине длины доминантной моды (~ 40 nm).

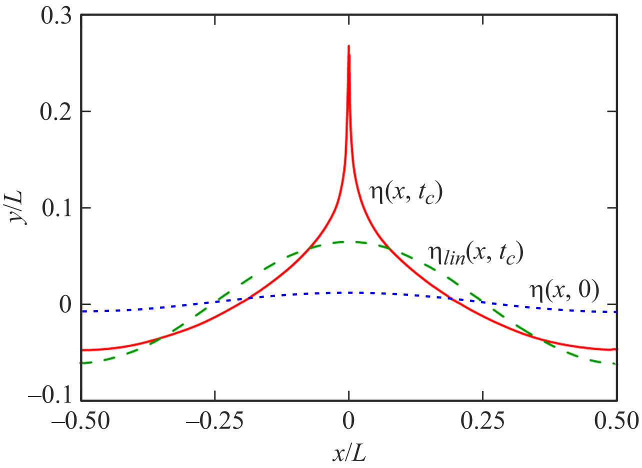

Рис. 3. Эволюция поверхности расплавленного металла в рамках нелинейной модели (4). Пунктирная линия соответствует начальному моменту времени $t = 0$, сплошная — моменту формирования особенности $t = t_c$. Для сравнения штриховой линией показана форма границы в момент $t = t_c$ для ситуации, когда ее эволюция описывается в рамках линейного приближения (в уравнении (4) выброшены нелинейные члены). Поле $E = E_v/2 \approx 4.9 \cdot 10^7$ V/cm; жидкая медь при температуре плавления.

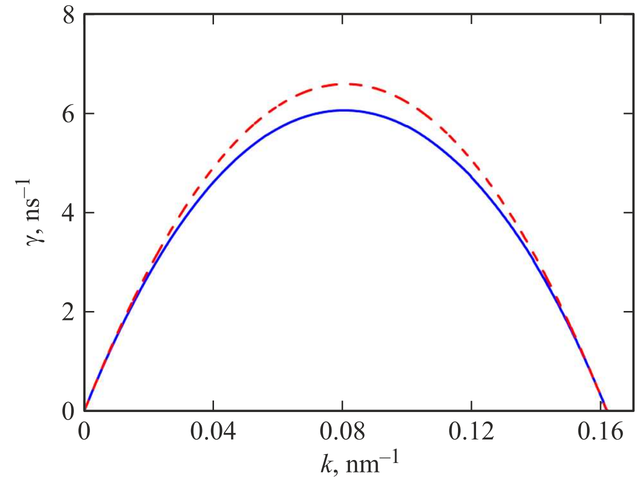

Рис. 2. Зависимость инкремента ЭГД-неустойчивости γ от волнового числа k для точного закона дисперсии (сплошная линия) и параболической аппроксимации (штриховая линия). Поле $E = E_v/2 \approx 4.9 \cdot 10^7$ V/cm; жидкая медь при температуре плавления.

Также на рис. 3 штриховой линией показано решение линеаризованного уравнения (4) к моменту $t = t_c$. Из сравнения линейного и нелинейного решений ясно, что нелинейные слагаемые в (4) ускоряют развитие неустойчивости, и именно они обусловливают формирование сингулярности. Таким образом, модель (4), несмотря на ее относительную простоту, демонстрирует тенденцию к заострению границы и, как следствие, к росту коэффициента усиления поля β. В связи с тем, что этот рост происходит при полях на вершине микровыступа субмикронного размера меньше пробивных, можно сделать вывод, что плавление вершины неизбежно приведет к ускорению вакуумного пробоя.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-19-00323 (https://rscf.ru/project/20-19-00323/).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] *A Multi-TeV linear collider based on CLIC technology*, CLIC conceptual design report, ed. by M. Aicheler, P. Burrows, M. Draper, T. Garvey, P. Lebrun, K. Peach, N. Phinney, H. Schmickler, D. Schulte, N. Toge (CERN, Geneva, 2012), CERN-2012-007. DOI: 10.5170/CERN-2012-007

[2] W. Wuensch, *Advances in the understanding of the physical processes of vacuum breakdown*, CLIC-Note-1025 (CERN, Geneva, 2013), CERN-OPEN-2014-028

[3] G.A. Mesyats, D.I. Proskurovsky, *Pulsed electrical discharge in vacuum* (Springer, Berlin, 1989).

[4] I.V. Uimanov, D.L. Shmelev, S.A. Barengolts, J. Phys. D: Appl. Phys., **54** (6), 065205 (2021). DOI: 10.1088/1361-6463/abc213

[5] С.А. Баренгольц, Г.А. Месяц, УФН, **193** (7), 751 (2023). DOI: 10.3367/UFNr.2022.02.039163 [S.A. Barengolts, G.A. Mesyats, Phys. Usp., **66** (7), 704 (2023). DOI: 10.3367/UFNe.2022.02.039163].

[6] L. Tonks, Phys. Rev., **48** (6), 562 (1935). DOI: 10.1103/PhysRev.48.562

[7] Я.И. Френкель, ЖЭТФ, **6** (4), 348 (1936).

[8] G.I. Taylor, Proc. R. Soc. Lond. A., **280** (1382), 383 (1964). DOI: 10.1098/rspa.1964.0151

[9] V.G. Suvorov, N.M. Zubarev, J. Phys. D: Appl. Phys., **37** (2), 289 (2004). DOI: 10.1088/0022-3727/37/2/019

[10] T.G. Albertson, S.M. Troian, Phys. Fluids, **31** (10), 102103 (2019). DOI: 10.1063/1.5123742

[11] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Теоретическая физика* (Наука, М., 1986), т. VI [L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid mechanics. Course of theoretical physics* (Pergamon Press, 2013), vol. 6.].

[12] X. Gao, A. Kyritsakis, M. Veske, W. Sun, B. Xiao, G. Meng, Y. Cheng, F. Djurabekova, J. Phys. D: Appl. Phys., **53** (36), 365202 (2020). DOI: 10.1088/1361-6463/ab9137

[13] Н.М. Зубарев, ЖЭТФ, **114** (6), 2043 (1998). [N.M. Zubarev, JETP, **87** (6), 1110 (1998). DOI: 10.1134/1.558601].