

Операция кубического фазового затвора для уменьшения ошибки двухмодовых преобразований

© Э.Р. Зинатуллин¹, С.Б. Королёв^{1,2}, Т.Ю. Голубева¹

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия

² Южно-Уральский государственный университет,
454080 Челябинск, Россия

e-mail: e.r.zinatullin@mail.ru

Поступила в редакцию 08.11.2023 г.

В окончательной редакции 08.11.2023 г.

Принята к публикации 12.11.2023 г.

Рассмотрена стратегия уменьшения ошибки двухмодового перепутывающего преобразования Controlled-Z за счет внедрения в кластер негауссовых узлов, полученных с помощью кубического фазового затвора. Показано, что такая стратегия позволяет существенно уменьшить ошибку преобразования. Показано, что в схеме телепортации с кубическим фазовым затвором, которая содержится внутри рассмотренной реализации операции Controlled-Z, правильный подбор фаз при измерении позволяет достичь более низкого уровня ошибок, чем исходный протокол телепортации с кубическим фазовым затвором и оригинальный протокол телепортации.

Ключевые слова: однонаправленные квантовые вычисления, непрерывные переменные, двухмодовые операции, кубический фазовый затвор, негауссовы преобразования, телепортация.

DOI: 10.61011/OS.2023.11.57028.5729-23

1. Введение

Одной из перспективных моделей универсальных квантовых вычислений являются однонаправленные квантовые вычисления [1–3]. Использование непрерывных переменных как носителя квантовой информации позволяет строить схемы, при каждом обращении к которым мы получаем значимый результат измерений (детерминированные схемы), чего не удастся достичь при работе с дискретными переменными. Кроме того, системы в непрерывных переменных обладают большим потенциалом с точки зрения их масштабируемости [4–9]. Поэтому в настоящей работе мы будем обсуждать однонаправленные квантовые вычисления именно в режиме непрерывных переменных [1].

Тем не менее работа с непрерывными квантовыми системами имеет и существенный недостаток. Основным ресурсом для вычислений выступают сжатые состояния. Если бы при этом их сжатие было бесконечно большим, то вычисления выполнялись бы без каких-либо ошибок. Однако на практике используются состояния с конечной степенью сжатия, что приводит к возникновению ошибок, искажающих результаты вычислений. Сжатие, которое экспериментально достижимо на данный момент, оказывается недостаточным для осуществления универсальных квантовых вычислений: максимальное экспериментально достижимое сжатие -15 dB [10], тогда как для вычислений (без использования поверхностных кодов и процедуры постселекции) необходимо -20.5 dB [11]. Требование к ресурсному состоянию можно понизить, используя вычислительные схемы, ме-

нее чувствительные к исходной ошибке. Идея построения таких схем заключается в том, чтобы, проанализировав вычислительную процедуру, выявить узлы, наиболее зашумляющие результат, и уменьшить их вклад в ошибку вычислений.

В работе [12] проанализированы возможные стратегии уменьшения ошибки произвольных одномодовых преобразований. Первая стратегия состояла в правильном подборе весовых коэффициентов кластерного состояния, на котором выполняется преобразование. Второй подход к снижению ошибок заключался в замене узлов, внесших наибольший вклад в ошибку, на негауссовы состояния, получаемые с помощью кубического фазового затвора [13]. Использование этих стратегий позволило существенно уменьшить ошибки произвольного одномодового преобразования.

Еще одним необходимым элементом для реализации универсальных квантовых вычислений является двухмодовая перепутывающая операция [14,15]. В отличие от одномодовых операций не требуется уметь выполнять произвольную двухмодовую операцию, достаточно выполнить любую перепутывающую. В качестве реализуемого двухмодового преобразования нами было выбрано преобразование Controlled-Z (CZ) [16–18], которое является аналогом операции CNOT в дискретных переменных, обладающей максимальной перепутывающей силой [19]. При этом возникает вопрос, применимы ли стратегии уменьшения ошибок для одномодовых операций к двухмодовым? И если да, то имеется ли какая-либо специфика для случая двухмодовых операций? Именно

на эти вопросы мы и постараемся ответить в настоящей статье.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 мы опишем реализацию преобразования CZ на взвешенном четырехузловом кластере. В этом же разделе опишем реализацию преобразования CZ на кластере с негауссовыми узлами. Затем в разд. 3 сравним ошибки в рассмотренных схемах с другими возможными реализациями преобразования CZ на различных кластерных состояниях [20]. Отдельно в разд. 4 рассмотрим протокол телепортации с кубическим фазовым затвором и коррекцией фазы гомодина, который является составной частью исследуемой реализации преобразования CZ.

2. Схемы реализации преобразования CZ

Целью работы является реализация двухмодового перепутывающего преобразования CZ, которое может действовать на произвольные входные состояния. Оператор преобразования CZ с весовым коэффициентом g_{jk} , которое действует на осцилляторы j и k , имеет вид

$$\hat{C}_{Z,jk} = e^{2ig_{jk}\hat{x}_j\hat{x}_k}. \quad (1)$$

Такая операция преобразует квадратуры входных осцилляторов как

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,j} \\ \hat{x}_{out,k} \\ \hat{y}_{out,j} \\ \hat{y}_{out,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_{jk} & 1 & 0 \\ g_{jk} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,j} \\ \hat{x}_{in,k} \\ \hat{y}_{in,j} \\ \hat{y}_{in,k} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Стоит отметить, что реализация преобразования CZ для двух произвольных входных состояний не эквивалентна по сложности перепутыванию сжатых осцилляторов или примешиванию входных состояний к кластеру с помощью преобразования CZ. В последнем случае необходимо организовать взаимодействие квантовых состояний с четко известными свойствами, что заведомо является более простой задачей с точки зрения ее физической реализации. В оптических системах операцию CZ над узлами кластера часто заменяют правильно подобранными линейно-оптическими преобразованиями [21,22]. Однако операция CZ над произвольной парой состояний может быть выполнена с использованием уже сформированного кластерного состояния.

Ниже мы рассмотрим схемы реализации CZ на четырехузловом кластере и возможность уменьшения ошибки преобразования за счет внедрения негауссовых узлов в ресурсное кластерное состояние.

2.1. Преобразование CZ на взвешенном четырехузловом кластере

Для начала рассмотрим, как преобразование CZ реализуется на взвешенном линейном четырехузловом

кластере без использования негауссовых узлов. Это позволит определить параметры, при которых в схеме реализуется преобразование CZ. К тому же такой анализ позволит выявить узлы кластера, на вклад в ошибку от которых нельзя повлиять за счет весовых коэффициентов кластерного состояния. Именно такие узлы впоследствии мы заменим на негауссовы.

Начнем с построения самого кластерного состояния (рис. 1, *a*). Ресурсом для его приготовления выступают сжатые по y -квадратуре осцилляторы, квадратуры которых описываются выражением

$$\hat{x}_j = e^r \hat{x}_{0,j}, \quad \hat{y}_j = e^{-r} \hat{y}_{0,j}, \quad (3)$$

где $\hat{x}_{0,j}$ и $\hat{y}_{0,j}$ — квадратуры осциллятора j в вакуумном состоянии. Степень сжатия исходных состояний считается одинаковой и задается параметром r , определяющим пропорциональное растяжение и сжатие квадратур вакуумного состояния поля. Перепутывание узлов кластера осуществляется с помощью преобразования CZ. Отметим, что в реальном эксперименте генерация кластера может быть осуществлена с помощью светоделителей [21,22]. Однако для простоты рассмотрения мы будем сохранять логику построения схемы с преобразованиями CZ. Затем к сформированному кластеру примешиваются входные состояния также за счет преобразования CZ.

Все операции CZ коммутируют друг с другом, а преобразование CZ, перепутывающее второй и третий ресурсные осцилляторы, коммутирует со всеми гомодинными измерениями. Благодаря этому можно свести преобразование на четырехузловом кластере (рис. 1, *b*) к преобразованию на паре двухузловых кластеров (рис. 1, *c*) с их дальнейшим перепутыванием. Это значительно упростит анализ схемы.

В таком представлении гомодинные измерения над первым входным состоянием I_{n1} и первым ресурсным осциллятором S_1 с фазами локальных осцилляторов θ_1 и θ_2 приведут к тому, что квадратуры состояния во втором канале будут определяться выражением

$$\begin{pmatrix} \hat{x}'_2 \\ \hat{y}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cot \theta_1 \cot \theta_2}{g_1 g_4} - \frac{g_4}{g_1} & \frac{\cot \theta_2}{g_1 g_4} \\ -\frac{g_1 \cot \theta_1}{g_4} & -\frac{g_1}{g_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 \\ \frac{I_1}{\beta g_1 \sin \theta_2} - \frac{I_{in,1} \cot \theta_2}{\beta g_1 g_2 \sin \theta_1} \\ \frac{I_{in,1} g_1}{\beta g_2 \sin \theta_1} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь $I_{in,1}$ и I_1 — измеренные значения фототоков в первом входном и первом ресурсном каналах соответственно, β — амплитуда локальных осцилляторов гомодинных детекторов. Подробный вывод этого соотношения представлен в работе [12]. Квадратуры осциллятора в третьем ресурсном канале будут задаваться аналогичным выражением. После этого осцилляторы во втором и третьем ресурсных каналах перепутываются с помощью операции CZ с весовым коэффициентом g_2 ,

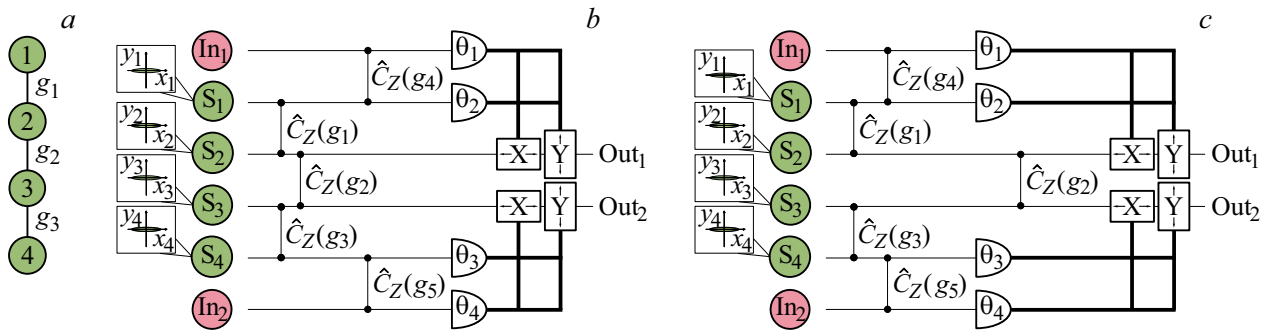


Рис. 1. (a) Структура кластерного состояния, используемого как ресурс. (b) Схема реализации преобразования CZ на линейном взвешенном четырехузловом кластере. (c) Схема реализации преобразования CZ на паре двухузловых кластеров. На схемах: In_j — входные состояния, S_j — осцилляторы, сжатые по y -кватратуре; $\hat{C}_Z(g_j)$ — преобразования CZ с весовыми коэффициентами g_j ; θ_j — гомодинное измерение с соответствующей фазой локального осциллятора; X и Y — операции сдвига, смещающие соответствующие квадратуры полей в зависимости от результатов гомодинного измерения.

а затем по результатам измерений компенсируются c -числовые компоненты квадратур.

Рассматриваемая схема будет осуществлять над квадратурами входных осцилляторов преобразование (2) при условии, что $g_4 = -g_1$, $g_5 = -g_3$ и $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \pi/2$. Квадратуры выходных осцилляторов при этом будут задаваться выражением

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ -\frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \hat{y}_2 - g_2 \frac{\hat{y}_3}{g_3} \\ \hat{y}_3 - g_2 \frac{\hat{y}_1}{g_1} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

В этом выражении первое слагаемое в правой части отвечает за преобразование над входными квадратурами. Мы видим, что весовой коэффициент реализуемого преобразования CZ будет зависеть только от весового коэффициента кластерного состояния g_2 . В то же время второе слагаемое в правой части выражения (5) представляет собой вектор ошибок $\delta \hat{\mathbf{e}}_1$, зависящий от неидеально сжатых квадратур исходных ресурсных осцилляторов, из которых генерируется кластерное состояние.

Оценим ошибки в рассматриваемой схеме. Для этого перейдем от вектора ошибок $\delta \hat{\mathbf{e}}_1$ к вектору, состоящему из среднеквадратичных флуктуаций ошибок в каждой из квадратур $\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_1^2 \rangle$. Будем считать, что все гауссовы ресурсные состояния сжаты одинаковым образом, т.е. $\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ для $j \in 1, 2, 3, 4$. Поскольку мы должны выполнять операцию CZ с фиксированным весовым коэффициентом, то g_2 не может выступать в качестве параметра оптимизации. Поэтому для простоты рассмотрим случай $g_2 = 1$. Тогда вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибки для такой реализации CZ имеет вид

$$\langle \delta \hat{\mathbf{e}}_1^2 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \\ \frac{1}{g_3^2} \\ 1 + \frac{1}{g_3^2} \\ 1 + \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \tag{6}$$

Как мы видим, ошибка двухмодового преобразования будет уменьшаться при увеличении весовых коэффициентов g_1 и g_3 . В идеальном случае можно добиться нулевой ошибки в x -кватратурах выходных состояний, однако ошибка в y -кватратурах не может быть сделана меньше, чем дисперсия сжатых квадратур ресурсных осцилляторов $\langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$. Источником этого предела ошибки являются неидеально сжатые квадратуры второго и третьего ресурсных осцилляторов, поскольку мы не можем уменьшить их вклад в ошибку выбором весовых коэффициентов.

Можно заметить, что рассмотренная реализация CZ содержит в себе две схемы телепортации, которые переносят входные состояния на второй и третий ресурсные осцилляторы. Ошибка преобразования будет напрямую зависеть от ошибки, с которой выполняется процедура телепортации.

Стоит отметить, что для двухмодового преобразования нет требования на соотношения между весовыми коэффициентами кластерного состояния, как было для случая одномодовых операций [12]. Это происходит потому, что каждый из весовых коэффициентов эффективно участвует в отдельном независимом процессе: g_1 и g_3 — в телепортации входных состояний In_1 и In_2 соответственно, g_2 — в перепутывании состояний после телепортации.

2.2. Схема преобразования CZ с кубическим фазовым затвором

Как мы выяснили в предыдущем разделе, увеличение весовых коэффициентов не дает возможности уменьшить ошибку в y -кватратурах выходных состояний. Однако схема, показанная на рис. 1, c, содержит в себе два протокола телепортации с использованием преобразования CZ в качестве перепутывающей операции [23]. В работе [24] было показано, что возможно снизить ошибку в протоколе телепортации за счет использования негауссовых ресурсных состояний, полученных с помо-

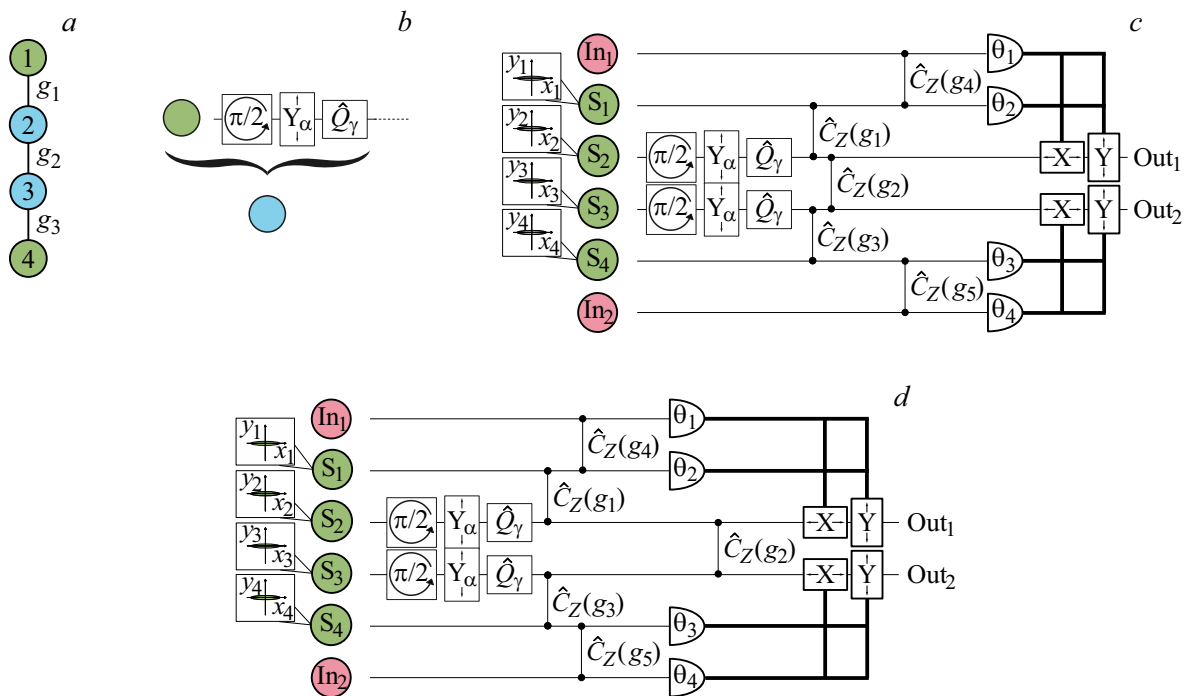


Рис. 2. (a) Структура кластерного состояния, используемого как ресурс для вычисления: зеленым показаны гауссовы узлы, голубым — негауссовы. (b) Схема приготовления негауссова ресурсного состояния. (c) Схема реализации преобразования CZ на линейном взвешенном четырехузловом кластере с использованием кубического фазового затвора. (d) Схема реализации преобразования CZ на паре двухузловых кластеров с использованием кубического фазового затвора. На схемах: Y_α — операции сдвига y -квадратуры на величину α , Q_γ — кубический фазовый затвор со степенью нелинейности γ .

стью кубического фазового затвора. Мы используем этот же подход для уменьшения ошибки преобразования CZ. То есть заменим узлы кластера, вносящие наибольший вклад в ошибку, на негауссовы ресурсные состояния. Поскольку увеличение весовых коэффициентов не влияет на ошибку, вносимую вторым и третьим ресурсными осцилляторами, мы заменим именно их (рис. 2, a).

Сами негауссовы ресурсные состояния готовятся путем последовательного применения операций как показано на рис. 2, b. Чтобы получить из гауссового ресурсного осциллятора с номером j необходимое негауссово состояние, сначала необходимо применить к нему операцию поворота фазы на $\pi/2$:

$$\hat{R}_{\pi/2,2} = e^{i\frac{\pi}{2}\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2}. \quad (7)$$

После этого применяем операцию сдвига по y -квадратуре на величину $\alpha > 0$, оператор которой имеет вид

$$\hat{Y}_{\alpha,j} = e^{2i\alpha\hat{x}_j}. \quad (8)$$

Процедура приготовления завершается действием негауссовой операции — кубического фазового затвора, его оператор определяется выражением

$$\hat{Q}_{\gamma,j} = e^{-2i\gamma\hat{y}_j^3}, \quad (9)$$

где γ — действительный коэффициент, характеризующий степень нелинейности преобразования. После таких

преобразований j -й ресурсный осциллятор перейдет в негауссово состояние. Действие кубического фазового затвора деформирует область неопределенности сжатого по x -квадратуре состояния таким образом, что на фазовой плоскости образуется парабола. Однако при смещении по y -квадратуре на положительную величину α , удовлетворяющую условию $\alpha^2 \gg \langle \hat{x}_j^2 \rangle$, значения квадратур второго осциллятора будут лежать в первом квадранте фазовой плоскости. Иными словами, на фазовой плоскости останется только одна из ветвей параболы.

Полная схема реализации преобразования CZ с использованием кубического фазового затвора показана на рис. 2, c. Так же, как и в предыдущем разделе, мы можем перейти к эквивалентной схеме преобразования на паре двухузловых кластеров (рис. 2, d). Поскольку операции, выполняемые над входными состояниями на двухузловых кластерах, аналогичны друг другу, рассмотрим только как преобразуется In_1 . После действия операторов (7)–(9) второй ресурсный осциллятор перейдет в негауссово состояние, амплитуда которого описывается выражением

$$\hat{a}_2 = -\hat{y}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + i(\alpha + \hat{x}_2). \quad (10)$$

Для того чтобы телепортировать состояние In_1 на второй ресурсный осциллятор, необходимо, чтобы при перепутывании $g_4 = -g_1$. После перепутывания с помощью двух операций CZ амплитуды осцилляторов

описываются выражениями

$$\hat{a}'_{in} = \hat{x}_{in} + i(\hat{y}_{in} - g_1\hat{x}_1), \quad (11)$$

$$\hat{a}'_1 = \hat{x}_1 + i(\hat{y}_1 - g_1\hat{y}_2 + 3g_1\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 - g_1\hat{x}_{in}), \quad (12)$$

$$\hat{a}'_2 = -\hat{y}_2 + 3\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 + i(\alpha + \hat{x}_2 + g_1\hat{x}_1). \quad (13)$$

Мы видим, что первый ресурсный осциллятор теперь содержит нелинейность из негауссова осциллятора вследствие перепутывания. Затем проводятся гомодинные измерения с фазами локальных осцилляторов θ_1 и θ_2 над входным и первым ресурсным осцилляторами соответственно. При этом положим $\theta_2 = \pi/2$, как это было сделано в предыдущем разделе. Однако не будем фиксировать угол θ_1 , возможность варьировать этот угол потребует нам в дальнейшем. Операторы фототоков при таких измерениях будут иметь вид

$$\hat{i}_{in} = \beta \sin \theta_1 (\hat{y}_{in} - g_1\hat{x}_1) + \beta \cos \theta_1 \hat{x}_{in}, \quad (14)$$

$$\hat{i}_1 = \beta (\hat{y}_1 - g_1\hat{y}_2 + 3g_1\gamma(\alpha + \hat{x}_2)^2 - g_1\hat{x}_{in}). \quad (15)$$

Пусть измеренные значения фототоков \hat{i}_{in} и \hat{i}_1 будут равны I_{in} и I_1 соответственно. Тогда квадратуры второго осциллятора после измерений будут определяться выражениями

$$\hat{x}'_2 = \hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \frac{I_1}{\beta g_1}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}'_2 = & \cot \theta_1 \hat{x}_{in} + \hat{y}_{in} - \frac{I_{in}}{\beta \sin \theta_1} \\ & + \frac{1}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\frac{I_1}{\beta g_1} + \hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \hat{y}_2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из-за негауссова ресурса в выражении (17) возникает корень, который определяет ошибку преобразования. Отметим, что благодаря большому значению сдвига α необходимо учитывать только положительное значение корня.

Мы можем разложить корень в выражении (17) в ряд по параметру

$$\frac{\beta g_1}{I_1} \left(\hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \hat{y}_2 \right), \quad (18)$$

сохраняя только первый член в разложении, т. е.

$$\begin{aligned} \hat{y}'_2 = & \cot \theta_1 \hat{x}_{in} + \hat{y}_{in} - \frac{I_{in}}{\beta \sin \theta_1} + \sqrt{\frac{I_1}{3\gamma\beta g_1}} \\ & + \sqrt{\frac{\beta g_1}{12\gamma I_1}} \left(\hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g_1} + \hat{y}_2 \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Обрывание ряда корректно в предположении малости всех моментов параметра разложения. Для гауссовых входных состояний достаточно выполнения неравенств

$$3\gamma\alpha^2 \gg \langle \hat{x}_{in} \rangle, \quad (20)$$

$$(3\gamma\alpha^2)^2 \gg \langle \hat{x}_{in}^2 \rangle + \frac{\langle \hat{y}_1^2 \rangle}{g_1^2} + \langle \hat{y}_2^2 \rangle. \quad (21)$$

Отметим, что это требование ограничивает применимость рассматриваемого протокола. Однако оно может быть удовлетворено для интересующего нас класса входных состояний за счет правильного выбора величины α .

В итоге квадратуры входного состояния преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{x}'_2 \\ \hat{y}'_2 \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cot \theta_1 + \sqrt{\frac{g_1\beta}{12\gamma I_1}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,1} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ \sqrt{\frac{g_1\beta}{12\gamma I_1}} \left(\hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_1}{g_1} \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{I_1}{\beta g_1} \\ -\frac{I_{in}}{\beta \sin \theta_1} + \sqrt{\frac{I_1}{3\gamma\beta g_1}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Как видно, первое слагаемое, которое описывает само преобразование, выполняемое над входным состоянием, содержит матричный элемент, зависящий от результатов измерений. Это приводит к случайному нежелательному искажению преобразования. Если мы не скомпенсируем это искажение, то оно приведет к увеличению ошибки выполняемого преобразования. Есть возможность скомпенсировать это искажение за счет правильного выбора базиса измерений. Обратим внимание, что значение фототока I_1 получается в результате измерений над состоянием в первом канале. Если мы выполним измерение над первым осциллятором раньше, чем над входным, то сможем подстроить фазу θ_1 таким образом, чтобы

$$\cot \theta_1 = -\sqrt{\frac{g_1\beta}{12\gamma I_1}}. \quad (23)$$

Это дает возможность выполнить телепортацию без неконтролируемого искажения.

Таким образом, при реализации двухмодового преобразования CZ мы можем скорректировать неконтролируемое искажение, вызванное наличием кубического фазового затвора во втором ресурсном канале, непосредственно при измерениях, проводимых над состояниями в первом входном и первом ресурсном каналах. Эта ситуация существенно отличается от случая одномодовых операций [12]. Произвольное одномодовое преобразование на четырехузловом кластере можно свести к двум последовательным преобразованиям на двухузловых кластерах. Если заменить один из узлов первого кластера на негауссово состояние, то это приведет к появлению искажения как и в выражении (22). Поскольку нам необходимо уметь реализовывать любое одномодовое преобразование, то мы должны иметь возможность задавать любые значения фаз гомодинных детекторов. Из-за этого отсутствует возможность скомпенсировать искажение за счет коррекции фазы при измерениях в первом преобразовании на двухмодовом кластере и приходится устранять его за счет выбора базиса при последующих измерениях. Если бы мы внесли негауссов ресурс во второе кластерное состояние, то не смогли

бы скомпенсировать вызванное им искажение. Как итог, без последствий возможно заменить на негауссово состояние только один узел исходного четырехузлового кластера. Для двухмодового преобразования возможно заменить на негауссовы состояния оба узла, вклад в ошибку от которых нельзя подавить за счет весовых коэффициентов кластерного состояния.

Преобразование над вторым входным состоянием In_2 выполняется аналогично. Затем, как и в предыдущем разделе, осцилляторы во втором и третьем ресурсных каналах перепутываются с помощью операции CZ с весовым коэффициентом g_2 , и далее по результатам измерений компенсируются c -числовые компоненты квадратур. В итоге квадратуры на выходе такой схемы преобразования CZ будут определяться выражением

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_{out,1} \\ \hat{x}_{out,2} \\ \hat{y}_{out,1} \\ \hat{y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 & 0 \\ g_2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\hat{y}_1}{g_1} \\ -\frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \sqrt{\frac{g_1\beta}{12\gamma I_1}} \left(\hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_1}{g_1} \right) - g_2 \frac{\hat{y}_4}{g_3} \\ \sqrt{\frac{g_3\beta}{12\gamma I_4}} \left(\hat{y}_3 - \frac{\hat{y}_4}{g_3} \right) - g_2 \frac{\hat{y}_1}{g_1} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Как мы можем видеть, входные квадратуры преобразуются так же, как и в схеме без негауссовых операций (2), однако ошибки в y -квadrатурах существенно отличаются.

Оценим ошибки, возникающие в предложенной схеме. Сдвиги сжатых состояний при приготовлении негауссовых состояний будем считать одинаковыми и равными α . Для оценки возьмем значения измеряемых фототоков равными их средним значениям, т.е. $I_1 = \langle \hat{i}_{1,m} \rangle \approx 3\beta\gamma g_1\alpha^2$ и $I_4 = \langle \hat{i}_{4,m} \rangle \approx 3\beta\gamma g_3\alpha^2$.

Как и в предыдущем разделе, возьмем $g_2 = 1$, а дисперсии сжатых квадратур ресурсных осцилляторов одинаковыми и равными $\langle \delta\hat{y}_s^2 \rangle$. Тогда вектор среднеквадратичных флуктуаций ошибки будет иметь вид

$$\begin{aligned} \langle \delta\hat{\mathbf{e}}_2^2 \rangle &= \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \\ \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{g_1\beta}{12\gamma I_1} \left(1 + \frac{1}{g_1^2} \right) + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{g_3\beta}{12\gamma I_4} \left(1 + \frac{1}{g_3^2} \right) + \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix} \langle \delta\hat{y}_s^2 \rangle \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1^2} \\ \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{36\gamma^2\alpha^2} \left(1 + \frac{1}{g_1^2} \right) + \frac{1}{g_3^2} \\ \frac{1}{36\gamma^2\alpha^2} \left(1 + \frac{1}{g_3^2} \right) + \frac{1}{g_1^2} \end{pmatrix} \langle \delta\hat{y}_s^2 \rangle. \quad (25) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в ошибках y -квadrатур оказывается обратно пропорционально измеренным значениям фототоков I_1 и I_4 , которые растут с увеличением сдвига α .

Таким образом мы можем уменьшать вклады в ошибку преобразования от всех ресурсных осцилляторов: от одних — за счет весовых коэффициентов кластерного состояния, а от других — за счет использования кубического фазового затвора. Теоретически это дает возможность получить сколь угодно малую ошибку преобразования.

3. Сравнение ошибок различных реализаций преобразования CZ

Теперь необходимо сравнить ошибки различных реализаций преобразования CZ на кластерных состояниях. Рассмотренные схемы сравним друг с другом и с реализациями, подробно описанными в работе [20]. Первая схема из работы [20] (рис. 3, *a*) представляет собой реализацию преобразования CZ на невзвешенном четырехузловом линейном кластере. Такая реализация является стандартной для выполнения двухмодовых операций на кластерах, поскольку наименьшая ошибка преобразования достигается при вычислении на кластерных состояниях с количеством узлов, в два раза превосходящим число входных узлов [25]. В ней примешивание входных состояний к кластеру осуществляется с помощью светоделителей. Это лишает нас возможности манипулировать весовыми коэффициентами кластерного состояния и за счет них влиять на ошибку. Вектор среднеквадратичной ошибки для этой схемы определяется выражением

$$\langle \delta\hat{\mathbf{e}}_3^2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \langle \delta\hat{y}_s^2 \rangle. \quad (26)$$

Другая схема реализует преобразование CZ на паре двухузловых кластеров (рис. 3, *b*). Такая схема обеспечивает наименьшую ошибку из рассмотренных авторами в [20], для нее

$$\langle \delta\hat{\mathbf{e}}_4^2 \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \langle \delta\hat{y}_s^2 \rangle. \quad (27)$$

Чтобы сравнивать ошибки при различных реализациях CZ, будем рассматривать норму $\| \cdot \|_\infty$ в качестве меры ошибок. Эта норма имеет вид

$$\| \langle \delta\hat{\mathbf{e}}_k^2 \rangle \|_\infty = \max_j [\{ \langle \delta\hat{\mathbf{e}}_k^2 \rangle_j \}]. \quad (28)$$

Теперь обсудим значения параметров для оценки ошибок. В работе [12] было показано, что при максимально достижимом на данный момент значения сжатия -15 dB [10] значения весовых коэффициентов преобразования CZ могут лежать в диапазоне $[0, 5]$. Поскольку ошибки преобразований для каждой из квадратур в выражениях (6) и (25) уменьшаются при увеличении

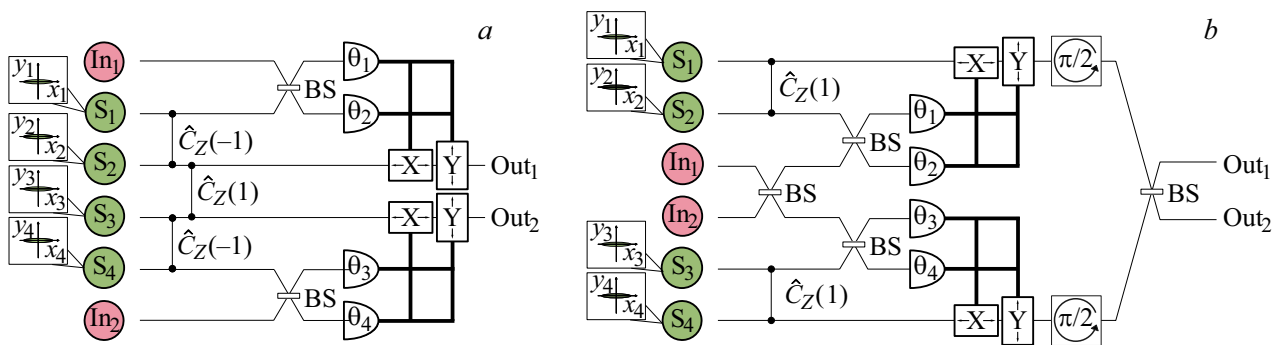


Рис. 3. (а) Схема реализации преобразования CZ на невзвешенном четырехузловом линейном кластере. (б) Схема реализации преобразования CZ на паре двухузловых кластеров. BS — симметричный светоделитель.

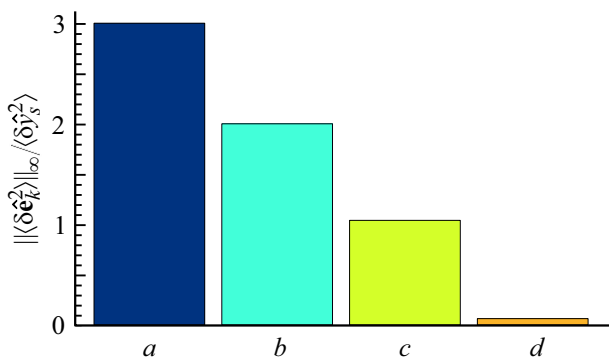


Рис. 4. Ошибка различных реализаций преобразования CZ: a — на невзвешенном четырехузловом линейном кластере, b — на паре двухузловых кластеров, c — на взвешенном четырехузловом линейном кластере, d — с кубическим фазовым затвором.

весовых коэффициентов g_1 и g_3 , то для оценки нормы ошибки мы возьмем их максимально возможные значения $g_1 = g_3 = 5$. Для оценки ошибки в схеме с негауссовыми состояниями возьмем значение коэффициента нелинейности кубической фазы $\gamma = 0.1$ [26,27] и сдвиг $\alpha = 5\sqrt{5}$ (т.е. $36\gamma^2\alpha^2 = 45$). Такое значение сдвига удовлетворяет условию $\alpha^2 \gg \langle \hat{x}_j^2 \rangle$, требуемому для корректной работы протокола, и реализуемо на практике [24].

Результаты численной оценки приведены на рис. 4. Как видим, наибольшая ошибка будет для реализации на невзвешенном кластере. Схема преобразования CZ на паре двухузловых кластеров демонстрирует ошибку в полтора раза меньше предыдущего случая. В отсутствие возможности манипулирования весовыми коэффициентами кластера такая реализация обеспечивает наименьшую ошибку преобразования [20]. В то же время рассмотренная нами в разд. 2.1 реализация преобразования CZ на взвешенном кластерном состоянии позволяет уменьшать ошибку за счет увеличения весовых коэффициентов кластерного состояния. Однако даже в идеальном случае ошибка не может быть меньше чем $\langle \delta y_s^2 \rangle$. Эта схема обеспечивает наименьшую ошибку из

рассмотренных нами реализаций, содержащих только гауссовы преобразования. Наконец, замена в кластерном состоянии узлов, вносящих наибольший вклад в ошибку преобразования, позволяет снизить количество шумов от всех неидеально сжатых ресурсных осцилляторов. Такая стратегия позволяет снизить норму ошибок приблизительно в 16 раз.

4. Протокол телепортации с кубическим фазовым затвором и коррекцией фазы гомодина

Обсудим еще один результат, полученный нами как „побочный“ при анализе реализации CZ с негауссовыми состояниями в разд. 2.2. Как уже упоминалось, рассмотренная в предыдущем разделе схема преобразования CZ содержит в себе две схемы телепортации. Однако протокол телепортации с кубическим фазовым затвором, использованный в этой схеме, отличается от предложенного ранее в работе [24]. Обсудим более детально модификацию протокола телепортации квантового состояния, которую мы использовали в настоящей работе и проанализируем качество телепортации.

Напомним, как работает исходный протокол телепортации с кубическим фазовым затвором из работы [24]. Его схема приведена на рис. 5, а. Для телепортации входного состояния требуются два вспомогательных осциллятора, которые изначально сжаты во взаимно ортогональных квадратурах. Сначала состояние во втором канале смещается по у-кватратуре на величину $\alpha > 0$, и к нему применяется операция кубического фазового затвора со степенью нелинейности γ . Далее с помощью преобразований CZ последовательно перепутываются сначала ресурсные осцилляторы, а затем входной и первый ресурсный осцилляторы, весовые коэффициенты преобразований CZ при этом должны быть g и $-g$ соответственно. После этого измеряются у-кватратуры во входном и первом ресурсном каналах, и по результатам измерений компенсируются с-числовые компоненты квадратур неизмеренного состояния. Квадратуры состо-

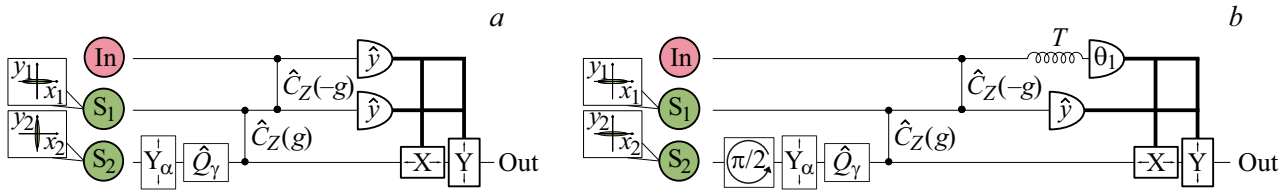


Рис. 5. (а) Схема телепортации с использованием кубического фазового затвора. (б) Схема телепортации с кубическим фазовым затвором и коррекцией фазы гомодина. T — линия задержки.

яния на выходе этой схемы определяются выражениями

$$\hat{x}'_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g}, \quad (29)$$

$$\hat{y}'_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{\frac{g}{12\gamma Y_1}} \left(\hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g} - \hat{x}_2 \right), \quad (30)$$

где Y_1 — измеренное значение y -квадратуры первого ресурсного осциллятора, а \hat{y}_1 и \hat{x}_2 — сжатые квадратуры ресурсных осцилляторов. В этих выражениях первые слагаемые соответствуют желаемому преобразованию телепортации, а остальные определяют ошибку преобразования. Как мы можем видеть, ошибка y -квадратуры зависит от x -квадратуры входного состояния, которая в общем случае неизвестна. В итоге, именно это слагаемое вносит наибольший вклад в ошибку преобразования.

Теперь рассмотрим протокол телепортации с кубическим фазовым затвором, который является составной частью преобразования CZ из разд. 2.2. Его схема показана на рис. 5, б. В этом модифицированном протоколе мы подстраиваем значение фазы θ_1 так, чтобы скомпенсировать неуправляемое искажение результатов телепортации. Значение фазы θ_1 определяется выражением

$$\cot \theta_1 = -\sqrt{\frac{g}{12\gamma Y_1}}. \quad (31)$$

Из выражения (22) следует, что квадратуры выходного состояния в таком случае имеют вид

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \frac{\hat{y}_1}{g}, \quad (32)$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{\frac{g}{12\gamma Y_1}} \left(\hat{y}_2 - \frac{\hat{y}_1}{g} \right). \quad (33)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями (29) и (30), видим, что ошибки x -квадратур одинаковы, а в ошибке y -квадратуры для протокола с коррекцией фазы отсутствует вклад от x -квадратуры входного состояния. Именно это слагаемое вносило наибольший вклад в ошибку. Более того, именно зависимость ошибки от входного состояния была основным лимитирующим фактором протокола из работы [24]. Здесь мы избавляемся от этого ограничения.

Чтобы характеризовать уровень ошибок, перейдем к величинам среднеквадратичных флуктуаций ошибки телепортации в каждой квадратуре, которые определяются

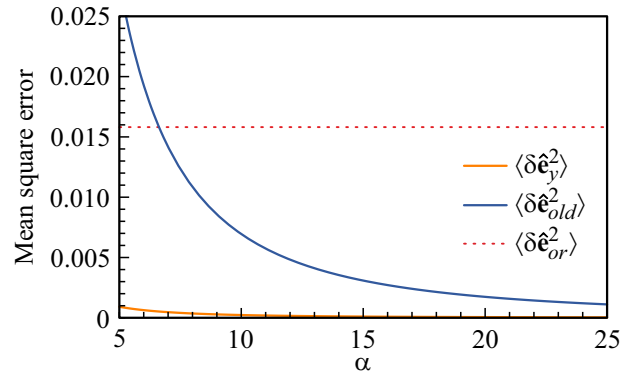


Рис. 6. Среднеквадратичная ошибка y -квадратуры телепортированного состояния в зависимости от сдвига негауссова ресурса α : оранжевым — для протокола с коррекцией фазы, синим — для протокола без коррекции фазы при телепортации вакуумного состояния. Красной пунктирной линией отмечен уровень ошибки телепортации в традиционной схеме. Степень сжатия ресурсных осцилляторов равна -15 dB.

как $\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \langle (\hat{x}_{out} - \hat{x}_{in})^2 \rangle$ и $\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \langle (\hat{y}_{out} - \hat{y}_{in})^2 \rangle$. Как и раньше, будем полагать, что $\langle \delta \hat{y}_j^2 \rangle \equiv \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ для $j = 1, 2$, а величину измеренной квадратуры оценим как ее среднее, т.е. $Y_1 = \langle \hat{y}_1 \rangle \approx 3\gamma g \alpha^2$. Тогда среднеквадратичные флуктуации ошибки будут задаваться выражениями

$$\langle \delta \hat{e}_x^2 \rangle = \frac{1}{g^2} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle, \quad (34)$$

$$\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle = \frac{1 + g^2}{12\gamma g Y_1} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle = \frac{1 + g^2}{36\gamma^2 \alpha^2 g^2} \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle. \quad (35)$$

Зависимость для оценки среднеквадратичной флуктуации ошибки y -квадратуры $\langle \delta \hat{e}_y^2 \rangle$ от сдвига α показана оранжевым на рис. 6. При расчетах были взяты $\gamma = 0.1$, сжатие ресурсных осцилляторов -15 dB и $g = 5$. Для сравнения синим показана ошибка y -квадратуры $\langle \delta \hat{e}_{old}^2 \rangle$ для схемы без коррекции фазы гомодина при телепортации вакуумного состояния для тех же параметров. Красным обозначены среднеквадратичные флуктуации ошибки для оригинальной схемы телепортации $\langle \delta \hat{e}_{or}^2 \rangle = 2 \langle \delta \hat{y}_s^2 \rangle$ [23]. Поскольку при малых α перестают выполняться приближения, в которых получены анализируемые выражения, то зависимость на рис. 6 построена для $\alpha > 5$. Как мы можем видеть, модифицированный протокол телепортации с кубическим фазовым затвором

выигрывает по сравнению с его предыдущей версией из работы [24] и оригинальным протоколом при любых α , достаточных для выполнения допущенных приближений. Таким образом, правильный подбор фазы при гомодинных измерениях позволяет значительно уменьшить ошибку в протоколе телепортации с кубическим фазовым затвором.

5. Заключение

Показано, что внедрение в кластерное состояние негауссовых узлов, полученных с помощью кубического фазового затвора, позволяет уменьшить ошибку при реализации двухмодового перепутывающего преобразования CZ на линейном четырехузловом кластере. При этом в отличие от реализации произвольных одномодовых операций [12] мы имеем возможность уменьшать вклад в ошибку от всех ресурсных осцилляторов. Для одних осцилляторов это достигается за счет увеличения весовых коэффициентов кластерного состояния, а для других — за счет внедрения в схему кубического фазового затвора. Теоретически это дает возможность получить сколь угодно малую ошибку преобразования. Численные оценки для реалистичных значений параметров схемы показывают, что использование кубического фазового затвора позволяет на порядок снизить ошибку преобразования относительно аналогичной реализации, содержащей только гауссовы операции.

Еще одним отличием реализации двухмодового преобразования CZ от одномодовых операций является то, что для него нет требований на соотношения между весовыми коэффициентами кластерного состояния. Как следствие, задача по нахождению оптимальных весовых коэффициентов кластерного состояния, обеспечивающих минимальную ошибку, оказывается тривиальной.

Рассмотренная нами реализация преобразования CZ содержит в себе протокол телепортации. Это позволило выявить возможность модификации протокола телепортации с кубическим фазовым затвором, который был предложен ранее [24]. Правильный подбор фаз при измерении позволяет скомпенсировать искажение, вызванное наличием негауссовой операции и вносящее основной вклад в ошибку протокола. В итоге телепортация в протоколе с кубическим фазовым затвором и коррекцией фазы гомодина оказывается точнее, чем в исходном протоколе с кубическим фазовым затвором и в оригинальном протоколе, а также позволяет обходиться меньшими значениями сдвигов квадратур для коррекции ошибок.

Нельзя не упомянуть о сложности, связанной с экспериментальной реализацией предложенной схемы. Ее ключевым элементом является кубический фазовый затвор, практическая реализация которого до сих пор является вызовом для экспериментаторов. Первая идея генерации кубических фазовых состояний была предложена Готтесманом, Китаевым и Прескиллом еще в

2001 г. [13,22,28]. Однако этот метод оказался тяжело реализуем экспериментально, поскольку для него требовалось выполнить операцию сдвига квадратур на величину, далекую от реально достижимой в эксперименте. Из-за этого кубический фазовый затвор долгое время оставался лишь абстрактным математическим преобразованием. Тем не менее за последние годы ситуация изменилась. Появляется все больше работ, посвященных новым методам генерации состояний кубической фазы [26,29,30] и реализации самого кубического фазового затвора [31–35]. Особенно значимых успехов удалось достичь в микроволновом диапазоне частот — именно в этом диапазоне впервые удалось сгенерировать кубическое фазовое состояние [27]. Таким образом, кубический фазовый затвор постепенно превращается из сугубо теоретического преобразования в реально существующее устройство.

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики „БАЗИС“ (гранты № 21-1-4-39-1 и № 22-1-5-90-1). С.Б. Королёв благодарит за поддержку Министерство науки и высшего образования Российской Федерации и Южно-Уральский государственный университет (соглашение № 075-15-2022-1116).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] N.C. Menicucci, P. van Loock, M. Gu, C. Weedbrook, T.C. Ralph, M.A. Nielsen. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 110501 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.110501
- [2] R. Raussendorf, H.J. Briegel. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5188 (2001). DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.5188
- [3] M.A. Nielsen. *Reports on Mathematical Physics*, **57**, 147 (2006). DOI: 10.1016/S0034-4877(06)80014-5
- [4] S. Yokoyama, R. Ukai, S.C. Armstrong, C. Sornphiphatphong, T. Kaji, S. Suzuki, J.-i. Yoshikawa, H. Yonezawa, N.C. Menicucci, A. Furusawa. *Nat. Photon.*, **7**, 982 (2013). DOI: 10.1038/nphoton.2013.287
- [5] J. Roslund, R.M. de Araújo, S. Jiang, C. Fabre, N. Treps. *Nat. Photon.*, **8**, 109 (2014). DOI: 10.1038/nphoton.2013.340
- [6] M. Chen, N.C. Menicucci, O. Pfister. *Phys. Rev. Lett.*, **112**, 120505 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.120505
- [7] J.-i. Yoshikawa, S. Yokoyama, T. Kaji, C. Sornphiphatphong, Y. Shiozawa, K. Makino, A. Furusawa. *APL Photon.*, **1**, 060801 (2016). DOI: 10.1063/1.4962732
- [8] M.V. Larsen, X. Guo, C.R. Breum, J.S. Neergaard-Nielsen, U.L. Andersen. *Science*, **366**, 369 (2019). DOI: 10.1126/science.aay4354
- [9] W. Asavanant, Y. Shiozawa, S. Yokoyama, B. Charoensombutamorn, H. Emura, R.N. Alexander, S. Takeda, J.-i. Yoshikawa, N.C. Menicucci, H. Yonezawa, A. Furusawa. *Science*, **366**, 373 (2019). DOI: 10.1126/science.aay2645

- [10] H. Vahlbruch, M. Mehmet, K. Danzmann, R. Schnabel. Phys. Rev. Lett., **117**, 110801 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.110801
- [11] N.C. Menicucci. Phys. Rev. Lett., **112**, 120504 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.120504
- [12] E.R. Zinatullin, S.B. Korolev, A.D. Manukhova, T.Yu. Golubeva. Phys. Rev. A, **106**, 032414 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevA.106.032414
- [13] D. Gottesman, A. Kitaev, J. Preskill. Phys. Rev. A, **64**, 012310 (2001). DOI: 10.1103/PhysRevA.64.012310
- [14] S. Lloyd, S.L. Braunstein. Phys. Rev. Lett., **82**, 1784 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevLett.82.1784
- [15] S.L. Braunstein, P. van Loock. Rev. Mod. Phys., **77**, 513 (2005). DOI: 10.1103/RevModPhys.77.513
- [16] M.V. Larsen, J.S. Neergaard-Nielsen, U.L. Andersen. Phys. Rev. A, **102**, 042608 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevA.102.042608
- [17] D. Su, C. Weedbrook, K. Brádler. Phys. Rev. A, **98**, 042304 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.042304
- [18] R.N. Alexander, S.C. Armstrong, R. Ukai, N.C. Menicucci. Phys. Rev. A, **90**, 062324 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevA.90.062324
- [19] A.T. Rezakhani. Phys. Rev. A, **70**, 052313 (2004). DOI: 10.1103/PhysRevA.70.052313
- [20] S.B. Korolev, T.Yu. Golubeva, Yu.M. Golubev. Laser Phys. Lett., **17**, 055205 (2020). DOI: 10.1088/1612-202X/ab83ff
- [21] P. van Loock, C. Weedbrook, M. Gu. Phys. Rev. A, **76**, 032321 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevA.76.032321
- [22] M. Gu, C. Weedbrook, N.C. Menicucci, T.C. Ralph, P. van Loock. Phys. Rev. A, **79**, 062318 (2009). DOI: 10.1103/PhysRevA.79.062318
- [23] E.R. Zinatullin, S.B. Korolev, T.Yu. Golubeva. Phys. Rev. A, **103**, 062407 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevA.103.062407
- [24] E.R. Zinatullin, S.B. Korolev, T.Yu. Golubeva. Phys. Rev. A, **104**, 032420 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevA.104.032420
- [25] S.B. Korolev, T.Yu. Golubeva, Yu.M. Golubev. Laser Phys. Lett., **17**, 035207 (2020). DOI: 10.1088/1612-202X/ab6ffe
- [26] M. Yukawa, K. Miyata, H. Yonezawa, P. Marek, R. Filip, A. Furusawa. Phys. Rev. A, **88**, 053816 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevA.88.053816
- [27] M. Kudra, M. Kervinen, I. Strandberg, S. Ahmed, M. Scigliuzzo, A. Osman, D.P. Lozano, M.O. Tholén, R. Borgani, D.B. Haviland, G. Ferrini, J. Bylander, A.F. Kockum, F. Quijandría, P. Delsing, S. Gasparinetti. PRX Quantum, **3**, 030301 (2022). DOI: 10.1103/PRXQuantum.3.030301
- [28] S. Ghose, B.C. Sanders. J. Mod. Opt., **54**, 855 (2007). DOI: 10.1080/09500340601101575
- [29] Y. Zheng, O. Hahn, P. Stadler, P. Holmval, F. Quijandría, A. Ferraro, G. Ferrini. PRX Quantum, **2**, 010327 (2021). DOI: 10.1103/PRXQuantum.2.010327
- [30] W. Asavanant, K. Takase, K. Fukui, M. Endo, J.-i. Yoshikawa, A. Furusawa. Phys. Rev. A, **103**, 043701 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevA.103.043701
- [31] K. Marshall, R. Pooser, G. Siopsis, C. Weedbrook. Phys. Rev. A, **91**, 032321 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.91.032321
- [32] K. Miyata, H. Ogawa, P. Marek, R. Filip, H. Yonezawa, J.-i. Yoshikawa, A. Furusawa. Phys. Rev. A, **93**, 022301 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevA.93.022301
- [33] R. Yanagimoto, T. Onodera, E. Ng, L.G. Wright, P.L. McMahan, H. Mabuchi. Phys. Rev. Lett., **124**, 240503 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.240503
- [34] T. Hillmann, F. Quijandría, G. Johansson, A. Ferraro, S. Gasparinetti, G. Ferrini. Phys. Rev. Lett., **125**, 160501 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.160501
- [35] S. Konno, A. Sakaguchi, W. Asavanant, H. Ogawa, M. Kobayashi, P. Marek, R. Filip, J.-i. Yoshikawa, A. Furusawa. Phys. Rev. Applied, **15**, 024024 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.15.024024