

06

Конфигурации и динамика вихревых линий тороидальных поляризационных лазерных трехмерных солитонов

© Н.А. Веретенков, Н.Н. Розанов, С.В. Федоров

ФТИ им. А.Ф. Иоффе,
194021 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: torrek@gmail.com, nnrosanov@mail.ru, sfedorov2006@bk.ru

Поступила в редакцию 21.06.2023 г.

В окончательной редакции 23.07.2023 г.

Принята к публикации 30.10.2023 г.

Численным анализом выявлен обширный класс тороидальных трехмерных диссипативных векторных солитонов в среде, содержащей центры с нелинейными лазерным усилением и поглощением. Проведен анализ структуры и динамики топологических сингулярностей этих солитонов.

Ключевые слова: многомерные диссипативные оптические солитоны, векторные солитоны, топологические сингулярности.

DOI: 10.61011/OS.2023.11.57009.5344-23

Многомерные диссипативные оптические солитоны привлекают внимание как ввиду общенаучного интереса, так и перспективности локализации в них энергии и возможности объемной записи и обработки информации, см. недавние монографии [1–3], обзоры [4–6] и ссылки в них.

Тематика рассматриваемых оптических солитонов пересекается с разделом сингулярной или топологической оптики [7–9]. Для квазимонохроматических параксиальных волновых пакетов солитоны могут быть с фазовыми и поляризационными сингулярностями. Первые отвечают неопределенности фазы какой-либо поперечной компоненты электрического поля. Они характеризуются целочисленным топологическим индексом m . Этот индекс определяется как приращение фазы компоненты при обходе по замкнутому контуру вокруг точки сингулярности, в которой амплитуда обращается в нуль, деленное на 2π . Контур расположен в плоскости, ортогональной направлению распространения излучения. Поляризационные сингулярности отвечают неопределенности состояния поляризации. Их полуцелый показатель η (индекс Пуанкаре) равен углу поворота эллипса поляризации при обходе сингулярной точки, деленному на 2π .

В линейной однородной среде сингулярности высших порядков оказываются неустойчивыми, и структура с топологическим зарядом $m > 1$ распадается на m фрагментов с единичными зарядами [7,10]. Такой же распад имеет место в среде с керровской нелинейностью [11]. Ситуация меняется в случае нелинейных диссипативных сред. В [12] были найдены устойчивые скалярные двумерные лазерные солитоны с топологическими зарядами $m = 1, 2$ и 3 . В $3D$ -геометрии сингулярности формируют линии и поверхности, см. [2,5] и ссылки в них. Области устойчивости резко сужаются с ростом m . Ситуация меняется для векторных (поляризационных) солитонов

благодаря взаимоподдержке поляризационных компонент [13].

В работе [6] были найдены $3D$ -тороидальные векторные солитоны с поляризационными сингулярностями. В этой работе мы уделим внимание структуре и динамике таких солитонов.

Модель и управляющее уравнение

В квазиоптическом приближении огибающая электрической напряженности обладает только поперечными декартовыми $E_\perp = (E_x, E_y)$ или круговыми $E_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x \pm iE_y)$ компонентами (x и y — поперечные координаты) [6]. Среда состоит из матрицы с линейными характеристиками, допированной центрами с нелинейными усилением и поглощением. Для пассивных центров используем модель среды с двумя уровнями [14], а для активных — 4-х уровневую с переворотом спина [15], которая принята для полупроводниковых лазеров. В сопровождающей системе координат $(x, y, z, \tau = t - z/v_{gr})$, где z — продольная координата, t — время и v_{gr} групповая скорость, безразмерное управляющее уравнение для огибающих круговых поляризационных компонент при указанных в [6] ограничениях имеет вид

$$\frac{\partial E_\pm}{\partial z} = (i + d) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) E_\pm + f_\pm(I, \delta I) E_\pm, \quad (1)$$

где нелинейная функция f_\pm дается выражением

$$f_\pm = f_\pm(I, dI) = -1 - \frac{a_0}{1+I} + \frac{g_0}{1+b_g I} \left| 1 \pm \frac{e_j b_g dI}{1+e_j b_g dI} \right| \times \left| 1 - \frac{e_j b_g^2 dI^2}{(1+b_g I)(1+e_j b_g dI)} \right|. \quad (2)$$

Сводная таблица найденных тороидальных солитонов с зарядами циркулярных компонент до $|m| = 7$

№	m_+	m_-	e_j	Поляризационные особенности
1	1	0	0.04	C -линия, цилиндрически симметричная L -поверхность
2	1	-1	0	V -линия, линейная поляризация
3	2	-1	0.04	V -линия, цилиндрически симметричная L -поверхность
4	3	-1	0.04	V -линия, L -поверхность
5	2	-2	0.04	V -линия, линейная поляризация
6	3	-2	0.04	3
7	3	-3	0.04	V -линия, линейная поляризация
8	4	-2	0.04	6 C -линий, L -поверхности
9	4	-3	0.08	7 C -линий, L -поверхности
10	4	-4	0.1	4 V -линии, L -поверхности
11	5	-5	0.1	1 V -линия, 8 C -линий, L -поверхности
12	5	-1	0.12	1 V -линия, 2 двухкратные C -линии, L -поверхности
13	6	-1	0.06	7 C -линий, L -поверхности
14	7	-1	0.08	8 C -линий, L -поверхности
15	7	-5	0.12	1 V -линия, 12 C -линий, L -поверхности

Смысл входящих в (2) параметров поясняется в [6,13]. В расчетах варьировались линейный коэффициент усиления g_0 , коэффициент диффузии d и отношение скорости релаксации в активных центрах к скорости затухания биений ε_j .

Установившаяся структура поля зависит от начальных условий. Огибающие поляризационных компонент задавались в виде торообразных распределений с различными комбинациями топологических зарядов m . При $z = 0$ огибающая имела вид

$$E_{\pm}(x, y, \tau) = 3.1 \exp(-(p/p_0)^2) \exp(im_{\pm}j), \quad (3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + \tau^2}, \quad (4)$$

$$j = \arctan(y/x), \quad Q = \arctan(r/\tau),$$

$$p = \sqrt{R^2 + R_0^2 - 2rR_0 \sin(Q)}.$$

Ширина профиля p_0 принимала значения от 2 до 6. Радиус тора R_0 брался в диапазоне от 10 до 12. Знаки топологических зарядов не влияют на устойчивость и распределение интенсивности солитона.

Результаты моделирования

Для линейного шага использовался метод Кранка-Николсона, для нелинейного — метод Эйлера. Величина шага по пространству $dx = dy = d\tau = 0.3 - 0.8$, по эволюционной переменной $dz = 0.005 - 0.15$. Граничные условия $-\partial E/\partial x = \partial E/\partial y = \partial E/\partial \tau = 0$.

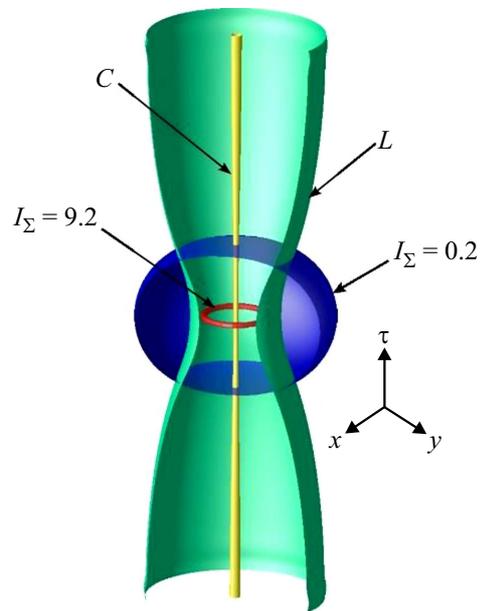


Рис. 1. Исоповерхности солитона (1,0) по уровням суммарной интенсивности 0.2 (синяя поверхность) и 9.2 (красное кольцо) и особые элементы: C -линия (жёлтая) и цилиндрически симметричная L -поверхность (зелёная).

Сводка сведений об устойчивых солитонах с топологическими зарядами m_{\pm} от 0 до 7 приведена в таблице. Сингулярности отвечают V -линиям, на которых поле обращается в 0, C -линиям, где поляризация круговая,

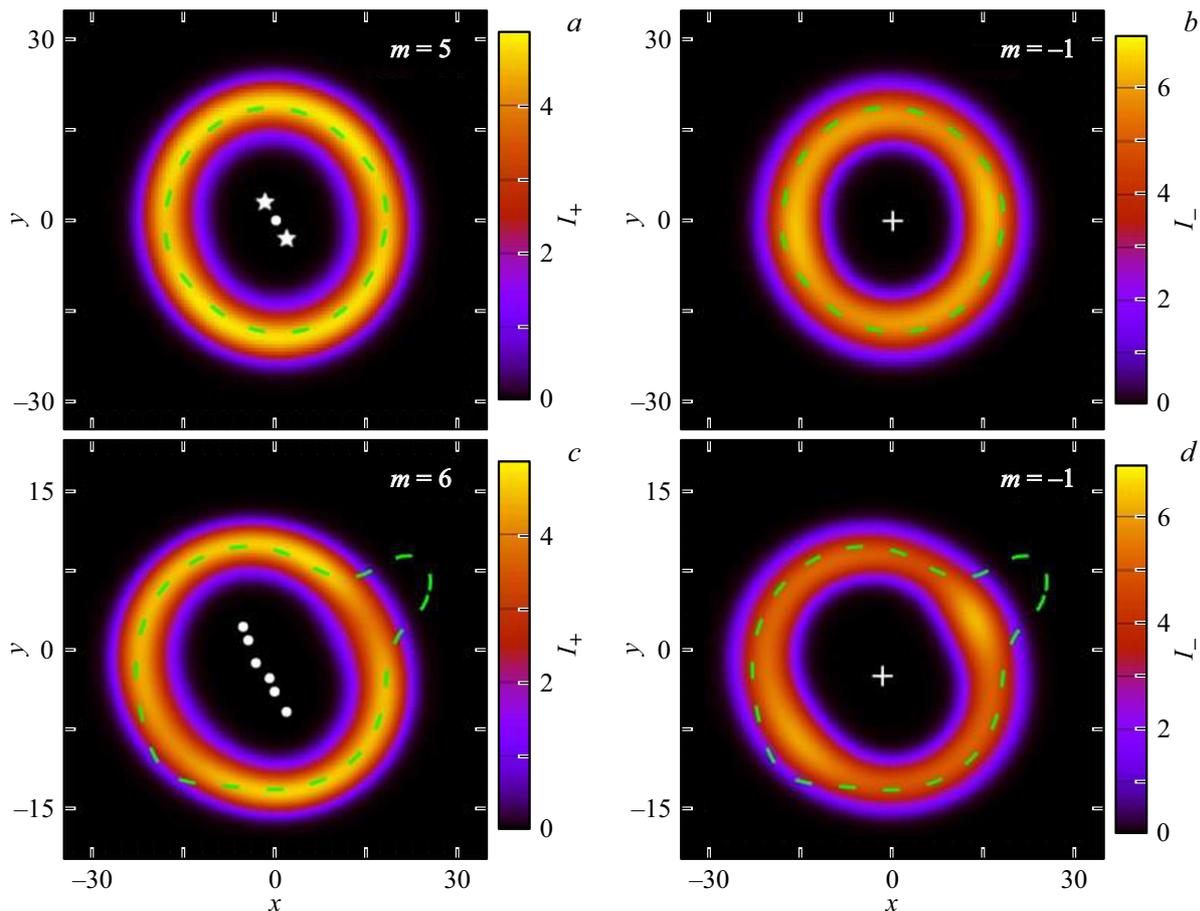


Рис. 2. Поперечное распределение интенсивности устойчивых тороидальных солитонов с зарядами циркулярных компонент $m_+ = 5$, $m_- = -1$ (верхний ряд, *a, b*) и $m_+ = 6$, $m_- = -1$ (нижний ряд, *c, d*). Показано распределение интенсивности циркулярных компонент в сечении, проходящем перпендикулярно оси τ приблизительно через центр солитона. Белыми точками (крестиками) указаны положения вихревых линий с зарядом 1 (-1), а пунктирными зелёными линиями — сечения L -поверхностей. Белые звёздочки соответствуют положению двух слившихся вихревых линий. Параметры: $g_0 = 2.14$, $d = 0.08$, $z = 10^4$, $e_J = 0.12$ (*a, b*), $e_J = 0.08$ (*c, d*).

и L -поверхностям с линейной поляризацией. Кратная вихревая линия каждой из поляризационных компонент с зарядом m_{\pm} при эволюции может распаться на $|m_{\pm}|$ вихревых линий с $|m| = 1$. Индекс Пуанкаре η определяется в плоскости, проходящей через центр солитона перпендикулярно оси t . Для одинарных вихревых линий индекс $\eta = \pm 1/2$, для кратных линий суммируются индексы составляющих линий. Удобно определить интегральный индекс Пуанкаре, когда контур обхода охватывает все сингулярности. Его значение равно: $\eta = (m_+ - m_-)/2$.

В таблице есть графа e_J . Если его значение выше „стандартного“, $e_J = 0.004$, это пороговое значение, начиная с которого устойчив данный солитон. У солитонов до $m = 4$ есть плоскость симметрии распределения интенсивности, проходящая через центр солитона перпендикулярно оси t . Солитоны (1,0) и (1,-1) цилиндрически симметричны. У солитонов с максимальным зарядом компонент $|m|_{\max} < 3$ вихревые линии вблизи центра солитона совпадают, а вдали от центра расходятся из-за

шумов, при этом на профиле интенсивности это практически не отражается. Заметный отход от симметрии есть у солитона (4,-2), который имеет ось 2-го порядка и вращается вокруг этой оси. При $|m|_{\max} > 3$ вихревые линии расходятся, появляются C - или V -линии.

Самый простой солитон с поляризационными особенностями имеет компоненты с зарядами 1 и 0. Он существует в области высоких накачек $g_0 = 2.15$. Солитон цилиндрически симметричен, неподвижен, а вихревая линия положительной компоненты является прямой C -линией, окружённой L -поверхностью. На оси солитона интенсивность уменьшается, но не достигает нуля. Солитон покоится в движущейся с групповой скоростью системе отчёта.

На рис. 1 показаны изоповерхности суммарной интенсивности солитона (1,0) и особые элементы: C -линия и L -поверхность. Для других солитонов в таблице мы приводим сечение в плоскости (x, y) , проходящей через центр солитона перпендикулярно оси τ .

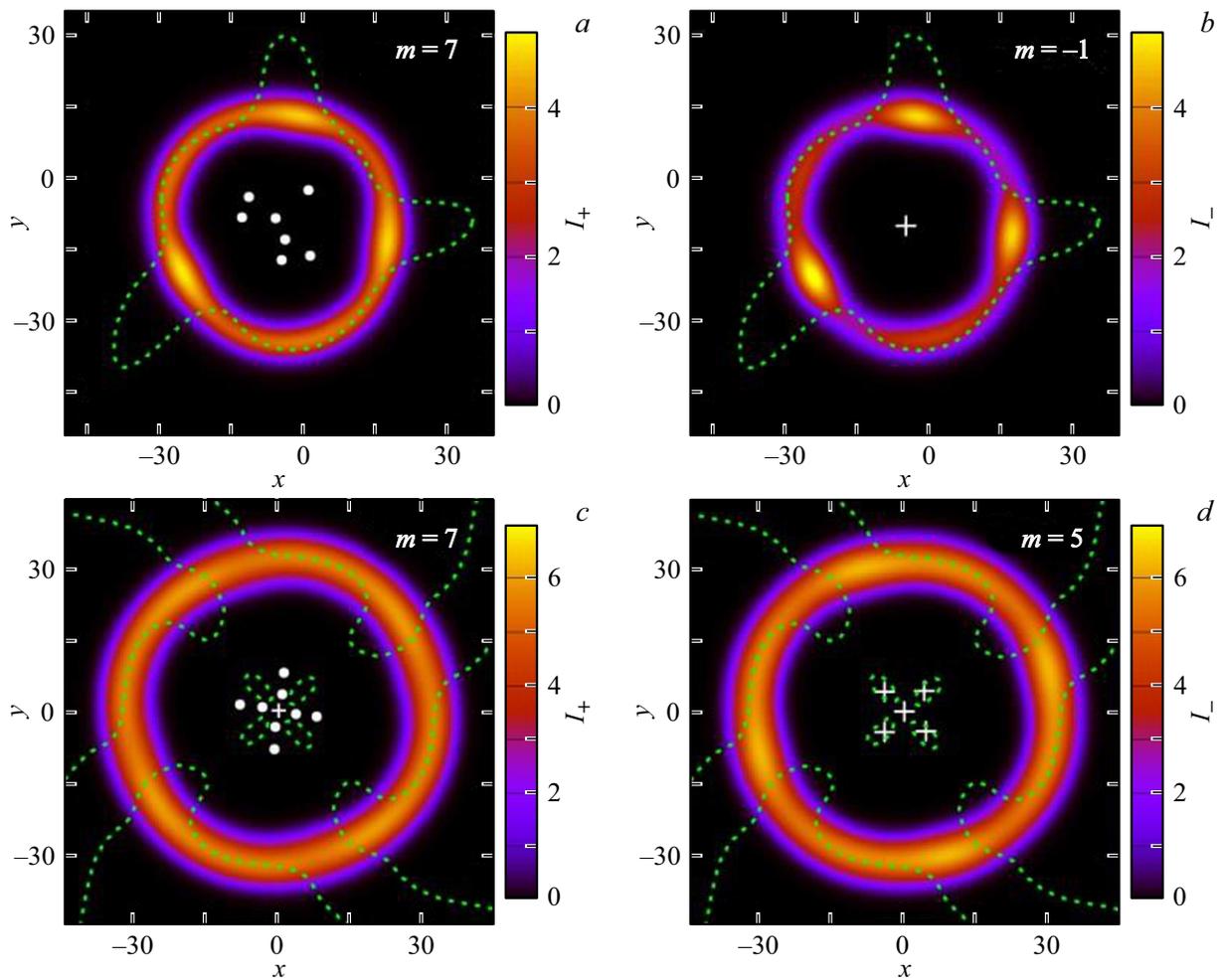


Рис. 3. То же, что на рис. 2, для устойчивых торoidalных солитонов с зарядами циркулярных компонент $m_+ = 7$, $m_- = -1$ (верхний ряд) и $m_+ = 7$, $m_- = -5$ (нижний ряд). В нижнем левом квадранте указано положение центральной вихревой линии компоненты E_+ , ориентированной противоположно остальным. В нижнем ряду показаны интенсивности положительной (слева) и отрицательной (справа) циркулярных компонент в сечении, проходящем перпендикулярно оси τ приблизительно через центр солитона. Белыми точками (крестиками) указаны положения вихревых линий с зарядом 1 (-1), пунктирными зелёными — срезы L -поверхностей. Параметры: $g_0 = 2.138$, $d = 0.09$, $e_J = 0.08$, $z = 10^4$ (a, b), $g_0 = 2.144$, $d = 0.09$, $e_J = 0.12$, $z = 10^4$ (c, d).

Приведём некоторые примеры. Структура солитона (5, -1) в плоскости (x, y) , проходящей через его центр, показана на рис. 2, верхний ряд. Распределение интенсивности (так же как и особые элементы поляриционной структуры), обладает осью симметрии второго порядка, жёсткое, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью. Центр солитона на плоскости (x, y) неподвижен. Такой солитон содержит 2 S -линии („сдвоенные“, с индексом Пуанкаре, равным 1, и отмеченные в виде звёздочек) и одну прямую V -линию. Солитон (6, -1), показанный на рис. 2 в нижнем ряду, вращается и пульсирует, при этом центр солитона в плоскости (x, y) движется по квазипериодической траектории. Солитон (6, -1) содержит 7 S -линий, так как единственная вихревая линия компоненты E_+ не совпадает при любом z с одной определённой из шести линий E_- , а поочерёдно сближается с одной из них. При

увеличении параметра e_J до 0.08 движение становится хаотичным.

Солитон (7, -1), показанный на рис. 3 (верхний ряд), вращается и хаотично осциллирует, положение вихревых линий меняется. Центр солитона в плоскости (x, y) движется случайным образом. Единственная вихревая линия компоненты E_- не совпадает постоянно ни с одной из 7 линий E_+ , солитон асимметричен. В нижнем ряду рис. 3 показаны циркулярные компоненты солитона (7, -5), который представляет собой жёсткую структуру с неизменным расположением вихревых линий обеих компонент. При этом суммарный топологический заряд компоненты не изменился и равен 7. Центральные вихревые линии у обеих компонент прямые и совпадают (V -линия). Солитон вращается как твёрдое тело, имеет ось симметрии 4-го порядка. Всего солитон содержит 8 S -линий и 1 V -линию с зарядом Пуанкаре, равным 1.

Заключение

Результаты подтверждают, что векторные лазерные солитоны значительно устойчивее скалярных благодаря взаимоподдержке поляризационных компонент. Предсказано существование тороидальных солитонов с различными поляризационными особенностями. Устойчивость солитонов с сингулярностями высших порядков зависит от типа нелинейности. В 4-х уровневой модели критическим служит параметр e_J , определяемый релаксационными характеристиками усиливающей среды. Симметрия солитонов и динамика вихревых линий циркулярных компонент также зависят от параметра e_J . Соотношение топологических зарядов влияет на топологию солитона. Если вихревые линии располагаются симметрично, устойчивость солитона выше, а пороговое значение e_J меньше. У поляризационных компонент может рождаться пара вихревых линий с противоположным знаком топологического заряда. При этом суммарный заряд сохраняется, а порядок симметрии солитона увеличивается. Этот происходит в области малых интенсивностей в центральной области солитона.

Благодарности

Исследование поддержано Российским научным фондом, грант № 23-12-00012. Результаты работы были получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (www.spbstu.ru).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] В.А. Маломед. *Multidimensional Solitons* (AIP, Melville, NY, 2022).
- [2] Н.Н. Розанов. *Диссипативные оптические и родственные солитоны* (Физматлит, М., 2021).
- [3] M.F.S. Ferreira (ed.). *Dissipative Optical Solitons*, **238** (Springer Series in Optical Sciences, Cham, Switzerland, 2022).
- [4] В.А. Маломед. *Chaos, Solitons Fractals*, **163**, 112526 (2022). DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112526
- [5] Н.А. Веретенев, Н.Н. Розанов, С.В. Федоров. *Успехи физ. наук*, **192** (2), 143–176 (2022). DOI: 10.3367/UFNr.2020.11.038869 [N.A. Veretenov, N.N. Rosanov, S.V. Fedorov. *Phys.-Usp.*, **65**, 131 (2022). DOI: 10.3367/UFNe.2020.11.038869].
- [6] Н.А. Веретенев, Н.Н. Розанов, С.В. Федоров. *Изв. вузов. Радиофизика*, **66** (5–6), 447–460 (2023). DOI: 10.52452/00213462_2023_66_05_447
- [7] M.S. Soskin, M.V. Vashnetsov. *Prog. Opt.*, **42**, 219–276 (2001). DOI: 10.1016/S0079-6638(01)80018-4
- [8] M.R. Dennis, K. O'Holleran, M.J. Padgett. *Prog. Opt.*, **53**, 293–363 (2009). DOI: /10.1016/S0079-6638(08)00205-9
- [9] D.S. Simon. *Topology in Optics: Tying Light in Knots* (IOP Publishing, Bristol, England, 2021).
- [10] Н.Б. Баранова, Б.Я. Зельдович. *ЖЭТФ*, **80** (5), 1789–1793 (1981).
- [11] V.I. Kruglov, Yu.A. Logvin, V.M. Volkov. *J. Mod. Opt.*, **39**, P. 2277–2291 (1992). DOI: 10.1080/09500349214552301
- [12] S.V. Fedorov, N.N. Rosanov, A.N. Shatsev, N.A. Veretenov, A.G. Vladimirov. *IEEE J. Quantum Electron.*, **39** (2), 197–205 (2003). DOI: 10.1109/JQE.2002.807212
- [13] N.A. Veretenov, S.V. Fedorov, N.N. Rosanov. *Phys. Rev. A*, **107**, 013512 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevA.107.013512
- [14] Н.Н. Розанов, С.В. Федоров. *Опт. и спектр.*, **72** (6), 1394–1399 (1992).
- [15] M. San Miguel, Q. Feng, J.V. Moloney. *Phys. Rev. A*, **52**, 1728 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevA.52.1728