

04.2

Рассеяние сверхвысокочастотной волны плазменным сгустком на границе плазменного шнура в токамаке

© А.Ю. Попов¹, Н.В. Теплова^{1,2}¹ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: a.porov@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 21 июня 2023 г.

В окончательной редакции 10 октября 2023 г.

Принято к публикации 11 октября 2023 г.

Зондирование пристеночной плазмы токамака сверхвысокочастотными волнами является методом диагностики плазменных сгустков (блобов, филаментов) на границе плазменного шнура. Изучены спектр и амплитуда сигнала рассеяния зондирующей сверхвысокочастотной волны блобом, вытянутым вдоль магнитной силовой линии и имеющим конечные размеры в поперечном направлении.

Ключевые слова: сверхвысокочастотная волна, сигнал рассеяния, турбулентность, плазменные сгустки.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.01.56922.19658

В последнее время активно изучаются структура и движение плазменных сгустков на границе плазменного шнура в тороидальных установках удержания плазмы [1,2]. Плазменные „сгустки“ представляют собой относительно изолированные структуры, которые вытянуты вдоль магнитной силовой линии, имеют конечные поперечные размеры и движутся радиально (в литературе их называют „блобами“ или „филаментами“). Изучение этих структур важно для понимания поперечного переноса на краю плазмы или вблизи магнитной сепаратрисы токамаков, а также для будущих сравнений измерений краевой турбулентности с результатами моделирования, например, для токамака-реактора ITER. Концепция конвективного движения изолированного блоба вблизи магнитной сепаратрисы токамака была предложена в работе [3]. С тех пор было сделано много уточнений аналитической теории структуры блобов и движения, как описано в литературе [4,5]. Ввиду сложности теории блобов и трудности измерения блобов в токамаках неудивительно, что связь между экспериментами и теорией блобов является неточной и неполной. По этой причине развитие экспериментальных методов, которые могли бы позволить получать информацию о размерах и параметрах блоба, является важной прикладной задачей. Возможным способом диагностики блобов на периферии плазмы являются зондирование сверхвысокочастотными (СВЧ) волнами (например, классическая рефлектометрия [6] и доплеровское обратное рассеяние [7]) и последующий анализ сигналов линейного рассеяния. В настоящей работе изучаются спектр и амплитуда сигнала рассеяния зондирующей СВЧ-волны плазменным сгустком на границе плазменного шнура в токамаке.

Рассмотрим пристеночную область токамака. Будем считать, что профиль плотности плазмы имеет постоянную компоненту n_0 и возмущение $n_b \gg n_0$, вызванное филаментом и имеющее в поперечном магнитному полю направлении z гауссовскую форму:

$$n_e = n_0 + n_b \exp(-r^2/r_b^2), \quad (1)$$

где r_b — поперечный размер блоба. Рассмотрим пучок СВЧ-волн обыкновенной поляризации, который распространяется в экваториальной плоскости поперек магнитного поля с внешней стороны плазменного шнура внутрь и является бесконечным вдоль магнитного поля. Вдали от блоба на расстоянии $|r| \gg c/\omega_0$ электрическое поле волны в приближении Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна запишем как

$$\mathbf{E}|_{x/r_b \rightarrow \infty} = \frac{\mathbf{e}_z}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y A_0(k_y) \times \exp(-ik_x(\omega_0, k_y)x - ik_y y - i\omega_0 t) + \text{с.с.}, \quad (2)$$

где $A_0(k_y) = \exp(-k_y^2 w^2/2)$ — амплитуда волны, ω_0 — частота волны, которая много больше электронной плазменной частоты, w — диаметр пучка, $k_x(\omega_0, k_y) \approx \omega_0/c \sqrt{1 - k_y^2 c^2/\omega_0^2}$, с.с. — член, полученный из первого в результате комплексного сопряжения. В цилиндрической геометрии, естественной при описании блоба, при условии $\omega_0^2 w^2/c^2 \gg 1$ выражение (2) имеет вид

$$\mathbf{E}|_{r/r_b \rightarrow \infty} \approx \frac{\mathbf{e}_z}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E_m^{(0)}(\omega_0 r/c) \exp(-im\theta - i\omega_0 t) + \text{с.с.}, \quad (3)$$

где $E_m^{(0)} = A_m^{(0)} J_m(\omega_0 r/c)$, J_m — функция Бесселя, и амплитуда

$$A_m^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi w^2}} \exp\left(-\frac{c^2 m^2}{2\omega_0^2 w^2} - im\frac{\pi}{2}\right) \quad (4)$$

определяет спектр зондирующего пучка, задаваемого антенной. В окрестности блоба парциальная амплитуда обыкновенной волны $\mathbf{E} \sim \mathbf{e}_z \sum_m E_m \exp(-im\theta - i\omega_0 t)$ яв-

ляется решением уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} E_m + \frac{\omega_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{n_b}{n_c} \exp\left(-\frac{r^2}{r_b^2}\right) - \frac{m^2 c^2}{r^2 \omega_0^2} \right) E_m = 0, \quad (5)$$

где n_c — критическая плотность для частоты ω_0 . Согласно имеющимся данным [2], $n_b/n_c \ll 1$, что делает возможным поиск решения по теории возмущений

$$E_m \approx E_m^{(0)} + E_m^{(1)}, \quad (6)$$

где $E_m^{(0)}$ определяется граничным условием (3). Поправка $E_m^{(1)} \sim \exp(-im\theta - i\omega_0 t)$ возникает в результате рассеяния в блобе и удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} E_m^{(1)} + \left(1 - \frac{m^2}{\xi^2} \right) E_m^{(1)} \\ = \frac{n_b}{n_c} \exp\left(-\frac{c^2}{r_b^2 \omega_0^2} \xi^2\right) E_m^{(0)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\xi = \omega_0 r/c$ — новая безразмерная переменная. Решение уравнения (7) может быть найдено методом вариации произвольной постоянной

$$\begin{aligned} E_m^{(1)}(\xi) = \frac{\pi n_b}{2 n_c} A_m^{(0)} \left(H_m^{(1)}(\xi) \int_0^\xi \exp\left(-\frac{c^2}{r_b^2 \omega_0^2} \xi^2\right) \right. \\ \times J_m(\xi) H_m^{(2)}(\xi) \xi d\xi + H_m^{(2)}(\xi) \int_\xi^\infty \exp\left(-\frac{c^2}{r_b^2 \omega_0^2} \xi^2\right) \\ \times J_m(\xi) H_m^{(1)}(\xi) \xi d\xi \left. \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где функции Ганкеля $H_m^{(1)} = J_m + iY_m$ и $H_m^{(2)} = J_m - iY_m$ описывают волны, распространяющиеся вдоль \mathbf{e}_r и в обратном направлении соответственно, Y_m — функция Неймана. На периферии плазмы далеко за пределами блоба $\xi_a \gg r_b \omega_0/c$ мы можем воспользоваться асимптотиками функций Ганкеля и, учитывая, что основной вклад в интегралы в выражении (8) вносит область $r_b^2 \omega_0^2/c^2$, заменить интегралы с переменным верхним пределом на интегралы с постоянным верхним пределом $\xi_a \rightarrow \infty$ и представить поле рассеянной волны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)}(\xi, \theta, t)|_{\xi_a c/(\omega_0 r_b) \rightarrow \infty} \approx \frac{\mathbf{e}_z}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\xi_a} \frac{n_b}{n_c}} \\ \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(0)} \exp\left(-i\left(\xi_a + \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - im\theta - i\omega_0 t\right) \\ \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{c^2}{r_b^2 \omega_0^2} \xi^2\right) J_m(\xi) H_m^{(2)}(\xi) \xi d\xi + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что основной вклад в однократный интеграл в выражении (9) вносит первый член функции Ганкеля

$H_m^{(2)} = J_m - iY_m$, что позволяет свести его ко второму экспоненциальному интегралу Вебера

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{c^2}{r_b^2 \omega_0^2} \xi^2\right) J_m(\xi) H_m^{(2)}(\xi) \xi d\xi \approx \\ W_m = \frac{r_b^2 \omega_0^2}{2c^2} \exp\left(-\frac{r_b^2 \omega_0^2}{2c^2}\right) I_m\left(\frac{r_b^2 \omega_0^2}{2c^2}\right) \end{aligned}$$

(где I_m — модифицированная функция Бесселя первого рода) и представить (9) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)}(\xi, \theta, t)|_{\xi_a c/(\omega_0 r_b) \rightarrow \infty} \approx \frac{\mathbf{e}_z}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2\xi_a} \frac{n_b}{n_c}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(0)} W_m \\ \times \exp\left(-i\left(\xi_a + \frac{\pi m}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - im\theta - i\omega_0 t\right) + \text{с.с.}, \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда приемная антенна расположена рядом с зондирующей антенной и имеет такую же диаграмму направленности (4). В этом случае амплитуда принимаемого сигнала равна

$$\begin{aligned} A_s = \frac{\pi n_b}{2 n_c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |A_m^{(0)}|^2 W_m = \frac{n_b}{8 n_c} \frac{r_b^2 \omega_0^2}{w^2 c^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \\ \times \exp\left(-\frac{c^2 m^2}{2\omega_0^2 w^2} - \frac{r_b^2 \omega_0^2}{2c^2}\right) I_m\left(\frac{r_b^2 \omega_0^2}{2c^2}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

С математической точки зрения рассеяние на блобе приводит к появлению волны, амплитуда которой определяется относительной амплитудой блоба $n_b/n_c \ll 1$, а спектр формируется в результате спектральной фильтрации начального распределения $A_m^{(0)}$ (4) с весовой функцией W_m .

Проиллюстрируем полученное выражение для поля обыкновенной волны (2). На рис. 1 показан его модуль в поперечном сечении в отсутствие блоба (3). Стрелкой показано направление распространения обыкновенных волн с частотой $f_0 = 140$ GHz. Область, отмеченная темным цветом, соответствует области локализации пучка с $w = 1$ см. Видно, что пучок распространяется без искажений из области положительных x в область отрицательных координат. На рис. 2 показан модуль электрического поля (3) с амплитудой (6), (10) в присутствии блоба (1). Параметры начального пучка соответствуют параметрам рис. 1. Параметры блоба следующие: $n_b/n_c = 0.2$, $r_b = 0.75$ см. Белое пятно — область, где асимптотическое выражение (10) становится некорректным и необходимо использовать полное выражение (8) для поправки к амплитуде волны в присутствии блоба.

Далее решим уравнение (5) с граничным условием (3) численно. На рис. 3 показан результат решения — модуль электрического поля. Параметры блоба использовались те же, что и на рис. 2. Сравнение рис. 2 и 3 указывает на адекватность решения (10), полученного аналитически.

Полученные результаты для спектра и амплитуды сигнала рассеяния зондирующей СВЧ-волны блоком, вытянутым вдоль магнитной силовой линии и имеющим конечные размеры в поперечном направлении без резких границ, могут быть полезны при изучении структуры и движения плазменных сгустков на границе плазменного шнура в тороидальных установках удержания плазмы.

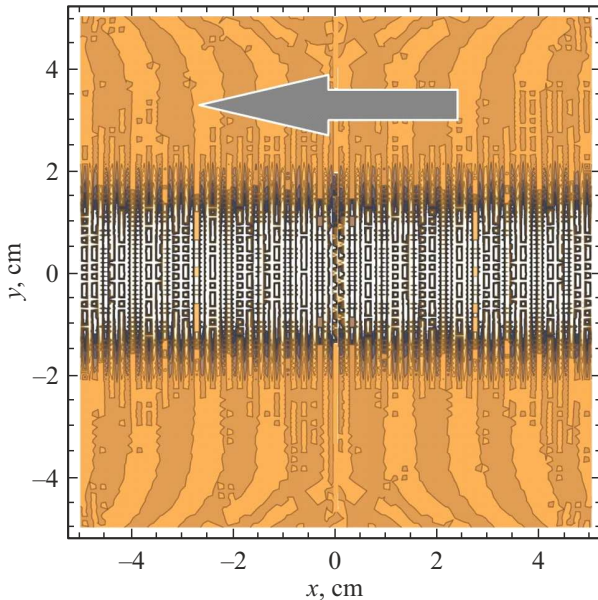


Рис. 1. Модуль электрического поля в поперечном сечении в отсутствие блока (3). Темным цветом показана локализация пучка с $w = 1$. Стрелка указывает направление распространения обыкновенных волн с частотой $f_0 = 140$ GHz.

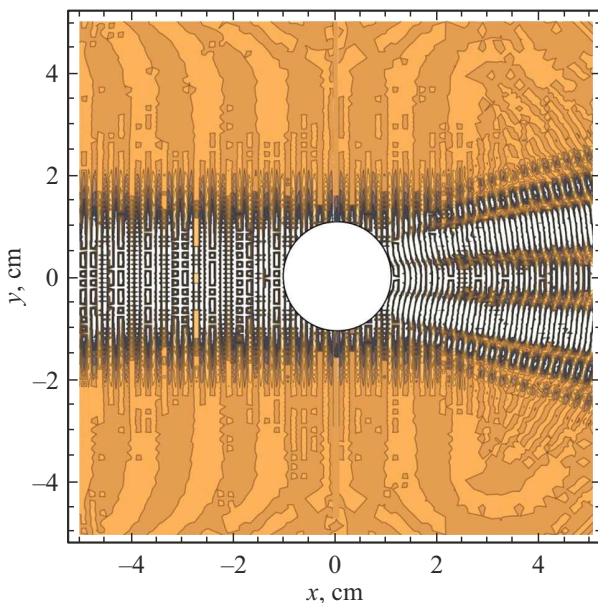


Рис. 2. Модуль электрического поля в поперечном сечении в присутствии блока (1). Параметры начального пучка соответствуют параметрам рис. 1. Параметры блока: $n_b/n_c = 0.2$, $r_b = 0.75$ cm. Белое пятно — область, где асимптотическое выражение (10) некорректно.

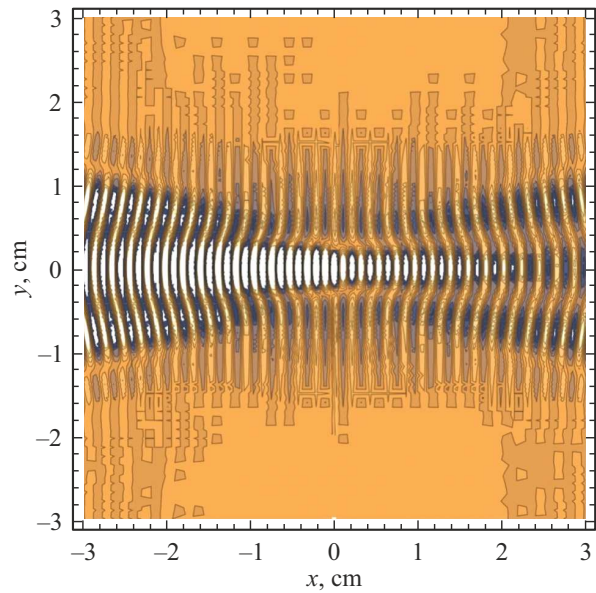


Рис. 3. Модуль электрического поля, полученный в результате численного решения уравнения (5) с граничным условием (3). Параметры блока: $n_b/n_c = 0.2$, $r_b = 0.75$ cm.

Финансирование работы

Аналитическое исследование выполнено при поддержке гранта РФФ № 23-72-00024, численное моделирование и разработка кода — при поддержке государственного контракта ФТИ им. А.Ф. Иоффе 0040-2019-0023.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] N. Offeddu, W. Han, C. Theiler, T. Golfopoulos, J.L. Terry, E. Marmor, C. Wüthrich, C.K. Tsui, H. de Oliveira, B.P. Duval, D. Galassi, D.S. Oliveira, D. Mancini and the TCV Team, Nucl. Fusion, **62**, 096014 (2022). DOI: 10.1088/1741-4326/ac7ed7
- [2] W. Han, R.A. Pietersen, R. Villamor-Lora, M. Beveridge, N. Offeddu, T. Golfopoulos, C. Theiler, J.L. Terry, E.S. Marmor, I. Drori, Sci. Rep., **12**, 18142 (2022). DOI: 10.1038/s41598-022-21671-w
- [3] S.I. Krasheninnikov, Phys. Lett. A, **283**, 368 (2001). DOI: 10.1016/S0375-9601(01)00252-3
- [4] D.A. D'Ippolito, J.R. Myra, S.J. Zweben, Phys. Plasmas, **18**, 060501 (2011). DOI: 10.1063/1.3594609
- [5] S.I. Krasheninnikov, Phys. Lett. A, **380**, 3905 (2016). DOI: 10.1016/j.physleta.2016.09.046
- [6] J. Vincente, G.D. Conway, M.E. Manso, H.W. Müller, C. Silva, F. da Silva, L. Guimarães, A. Silva and the ASDEX Upgrade Team, Plasma Phys. Control. Fusion, **56**, 125019 (2014). DOI: 10.1088/0741-3335/56/12/125019
- [7] V.V. Bulanin, V.K. Gusev, N.A. Khromov, G.S. Kurskiev, V.B. Minaev, M.I. Patrov, A.V. Petrov, M.A. Petrov, Yu.V. Petrov, D. Prisiazhniuk, N.V. Sakharov, S.Yu. Tolstyakov, A.Yu. Yashin, Nucl. Fusion, **59**, 096026 (2019). DOI: 10.1088/1741-4326/ab2cdf