

Фотон-фотонное рассеяние в поле атомного иона

© А.Н. Хоперский, А.М. Надолинский[✉], Р.В. Конеев

Ростовский государственный университет путей сообщения,
344038 Ростов-на-Дону, Россия

[✉]e-mail: amnrnd@mail.ru

Поступила в редакцию 17.06.2023 г.

В окончательной редакции 17.06.2023 г.

Принята к публикации 20.09.2023 г.

Теоретически предсказаны аналитическая структура, абсолютные значения и угловая анизотропия трижды дифференциального сечения упругого фотон-фотонного рассеяния в поле многозарядного неоподобного атомного иона.

Ключевые слова: упругое рассеяние, неоподобный атомный ион, рентгеновский фотон, амплитуда вероятности рассеяния, трижды дифференциальное сечение.

DOI: 10.61011/OS.2023.10.56881.5326-23

1. Введение

Упругое рассеяние двух реальных фотонов через вакуум квантовой электродинамики (QED) — один из фундаментальных процессов микромира [1]. Первые теоретические исследования этого процесса [2–6] показали его малую вероятность (полные сечения рассеяния $\sigma \sim 10^{-30} \text{ см}^2$). Первые попытки экспериментального наблюдения этого процесса при достигнутых в то время мощности и яркости излучения лазера [7–9] оказались безуспешными. Однако возможности современного эксперимента, например, с рентгеновским лазером на свободных электронах (XFEL), позволяют надеяться на экспериментальное обнаружение фотон-фотонного рассеяния через QED-вакуум в ближайшем будущем [10,11]. При этом рассеяние двух виртуальных фотонов (аналог рассеяния двух реальных фотонов) в столкновениях тяжелых ионов [12–14] экспериментально обнаружено на Большом адронном коллайдере [15–17]. В работах авторов [18–20] во втором (по числу вершин взаимодействия) порядке квантово-механической теории возмущений проведены первые теоретические исследования упругого фотон-фотонного рассеяния в поле атома (атомного иона). Основным результатом этих работ — предсказание „зеркально-симметричных“ относительно энергии томсоновского рассеяния ($\hbar\omega_1 \cong \hbar\omega$, $\hbar\omega$ — энергия падающего фотона, $\hbar\omega_1$ — энергия рассеянного фотона) резонансных структур спектра рассеяния в областях рождения „холодных“ ($\hbar\omega_1 \leq \hbar\omega - I_{1s}$, I_{1s} — энергия порога ионизации $1s^2$ -оболочки) и „горячих“ ($\hbar\omega_1 \geq \hbar\omega + I_{1s}$) рассеянных фотонов. В данной работе мы обобщаем теорию и дополняем физические результаты работ [18–20] переходом к третьему порядку теории возмущений. Такие исследования востребованы, в частности, для интерпретации коротковолновых областей (длина волны излучения $\lambda \sim 1.5 - 2 \text{ \AA}$) наблюдаемых спектров рентгеновской эмиссии горячей астрофизической плазмы [21,22]. В качестве объекта исследования

взят неоподобный ион атома железа (Fe^{16+} , заряд ядра иона $Z = 26$, конфигурация и терм основного состояния $[0] = 1s^2 2s^2 2p^6 [^1S_0]$). Выбор обусловлен сферической симметрией основного состояния иона Fe^{16+} , ярко выраженным присутствием $K_{\alpha,\beta}$ -линий эмиссии атома железа и его многозарядных ионов, в частности, Fe^{16+} и Fe^{24+} , в области $\lambda \sim 1.75 - 1.95 \text{ \AA}$, а также доступностью иона Fe^{16+} в газовой фазе для проведения высокоточных экспериментов, например, по рассеянию XFEL-излучения ионом, захваченным в „ловушке“ [23,24].

2. Теория метода

Субвалентная ($2s^2$) и валентная ($2p^6$) оболочки неоподобного атомного иона пространственно и энергетически сильно отделены от глубокой $1s^2$ -оболочки. В случае иона Fe^{16+} имеем следующие неравенства: для средних радиусов оболочек $r_{1s} = 0.031 \text{ \AA} \ll r_{2s} (r_{2p}) = 0.140 (0.123) \text{ \AA}$ (расчет данной работы), для энергий порогов ионизации оболочек $I_{1s} = 7699.23 \text{ eV}$ (расчет данной работы) $\gg I_{2s} (I_{2p}) = 1397.77 (1270.60) \text{ eV}$ [25]. В области энергий падающих фотонов $\hbar\omega \geq I_{1s}$ этот факт позволяет пренебречь вкладом $2s^2$ - и $2p^6$ -оболочек в вероятность процесса упругого фотон-фотонного рассеяния в поле неоподобного атомного иона. Тогда амплитуда вероятности процесса оказывается суммой парциальных амплитуд числом 364. Примем дипольное приближение для операторов радиационного перехода:

$$\hat{R} = -\frac{e}{m_e c} \sum_{n=1}^N (\hat{p}_n \hat{A}_n), \quad (1)$$

и контактного (нелинейного по электромагнитному полю) взаимодействия:

$$\hat{Q} = \frac{e}{2m_e c^2} \sum_{n=1}^N (\hat{A}_n \hat{A}_n). \quad (2)$$

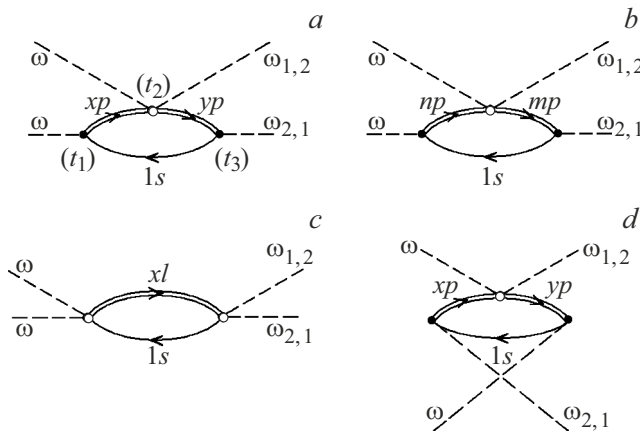


Рис. 1. Амплитуды вероятности упругого фотон-фотонного рассеяния в поле неоподобного атомного иона (Fe^{16+}) в представлении диаграмм Фейнмана: (a) томсоновское рассеяние через виртуальные состояния сплошного спектра, (b) резонансное рассеяние через виртуальные состояния дискретного спектра, (c) локальное двойное поглощение излучения, (d) рассеяние „по-времени-назад“. Стрелка вправо — электрон, стрелка влево — вакансия. Двойная линия — состояние получено в хартри-фоковском поле $1s$ -вакансии. Черный (светлый) кружок — вершина радиационного (контактного) перехода. $\omega(\omega_i, i = 1, 2)$ — падающий (рассеянный) фотон. Направление времени — слева направо ($t_1 < t_2 < t_3$).

В (1) и (2) определены: \hat{A}_n — оператор электромагнитного поля в представлении вторичного квантования, \hat{p}_n — оператор импульса n -электрона иона, c — скорость света в вакууме и N — число электронов в ионе. Примем также приближение Тамма-Данкова [26] с максимальным числом „частиц“ (электронов, вакансий и фотонов) в рассеяниях диаграмм Фейнмана $N_{\max} = 5$. Тогда из указанного числа парциальных амплитуд остаются лишь амплитуды на рис. 1 a, b. Эти амплитуды структурно учитывают полноту набора промежуточных (виртуальных) состояний рассеяния дискретного $(n, m) \in [3; \infty)$ и сплошного $(x, y) \in [0; \infty)$ спектров. Оставшиеся 362 парциальные амплитуды „исчезают“. Например, амплитуда на рис. 1, c в дипольном приближении для \hat{Q} -оператора обращается в нуль: $\langle 1s | \hat{j}_i | xl \rangle \rightarrow \langle 1s | xl \rangle$ при $\hat{j}_0 \rightarrow 1, \hat{j}_{i \geq 1} \rightarrow 0$, где \hat{j}_l — сферическая функция Бесселя первого рода порядка l . Амплитуда на рис. 1, d описывает процесс спонтанного рождения „частиц“ до момента поглощения падающих на ион фотонов, и в приближении Тамма-Данкова отбрасывается. Как результат рассмотрим следующие процессы упругого фотон-фотонного рассеяния в поле неоподобного атомного иона:

$$2\omega + [0] \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \omega_1 + \omega_2 + [0], \quad (3)$$

$$A = \omega + 1s \left\{ \begin{matrix} n \\ x \end{matrix} \right\} p(1P_1), \quad (4)$$

$$B = \omega_i + 1s \left\{ \begin{matrix} m \\ y \end{matrix} \right\} p(1P_1), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Переходы из начального состояния системы „падающие фотоны \oplus ион“ в состояние A и из состояния B в конечное состояние рассеяния происходят по оператору \hat{R} . Переходы из состояния A в состояние B происходят по оператору \hat{Q} . В (3)–(5) и далее принята атомная система единиц ($e = \hbar = m_e = 1$), $\omega(\omega_i)$ — энергия падающего (рассеянного) фотона, $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$, заполненные оболочки конфигураций иона не указаны. Следуя „золотому правилу“ Ферми [27] и используя методы алгебры операторов рождения (уничтожения) фотонов, теории неприводимых тензорных операторов и теории неортогональных орбиталей [28], для трижды дифференциального сечения рассеяния получаем:

$$\frac{d^3\sigma}{d\omega_1 d\Omega_1 d\Omega_2} \equiv \sigma^{(3)} = r_0^4 \mu \eta \omega_1 (2\omega - \omega_1) G, \quad (6)$$

$$\mu = \frac{\pi}{18} \alpha \frac{(c\hbar)^2}{a_0 V}, \quad (7)$$

$$\eta = [(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_1)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_2)]^2, \quad (8)$$

$$G = (M_1 - M_2)^2 + M_3^2, \quad (9)$$

$$M_1 = \frac{\omega \cdot \gamma_{1s}}{(\Delta_1^2 + \gamma_{1s}^2)} \langle 1s_0 \| \hat{r} \| x_0 p_+ \rangle^2, \quad (10)$$

$$M_2 = \sum_{n=3}^{\infty} (x_n^2 - \Delta_1^2 - \gamma_{1s}^2) \cdot D_{np}, \quad (11)$$

$$M_3 = \Gamma_{1s} \sum_{n=3}^{\infty} x_n D_{np}, \quad (12)$$

$$D_{np} = \frac{1}{\pi\omega} \frac{(I_{1snp} J_{np})^2}{[(x_n + \Delta_1)^2 + \gamma_{1s}^2][(x_n - \Delta_1)^2 + \gamma_{1s}^2]}. \quad (13)$$

Здесь определены: Ω_i — пространственный угол вылета рассеянного ω_i -фотона, r_0 — классический радиус электрона, α — постоянная тонкой структуры, a_0 — радиус Бора, V (cm^3) = c — объем квантования электромагнитного поля [29], $\mathbf{e}(\mathbf{e}_i)$ — вектор поляризации падающего (рассеянного) фотона, $2\gamma_{1s} = \Gamma_{1s}$ — естественная ширина распада $1s$ -вакансии, $\Delta_1 = \omega - \omega_1$, $x_0 = \omega - I_{1s}$, $x_n = \omega - I_{1snp}$, I_{1snp} — энергия фотовозбуждения $1s \rightarrow np$. Радиальная часть одноэлектронной амплитуды вероятности радиационного перехода $J_{np} = \langle 1s_0 \| \hat{r} \| np_+ \rangle$ имеет вид:

$$J_{np} = N_{1s} \left(\langle 1s_0 | \hat{r} | np_+ \rangle - \frac{\langle 1s_0 | \hat{r} | 2p_+ \rangle \langle 2p_0 | np_+ \rangle}{\langle 2p_0 | 2p_+ \rangle} \right), \quad (14)$$

$$N_{1s} = \langle 1s_0 | 1s_+ \rangle \langle 2s_0 | 2s_+ \rangle^2 \langle 2p_0 | 2p_+ \rangle^6. \quad (15)$$

В (14) реализована форма длины для одноэлектронного оператора радиационного перехода. Возможное расхождение форм длины и скорости в одноконфигурационном приближении Хартри-Фока может быть снято переходом, например, к многоконфигурационному приближению Хартри-Фока при построении полных волновых функций состояний рассеяния в (3). Индексы

„0“ и „+“ соответствуют радиальным частям волновых функций электронов, полученных решением уравнений самосогласованного поля Хартри-Фока для конфигураций начального ($[0]$) и возбужденного ($[1s+np_+]$) состояний иона. Аксиально-симметричный (относительно \mathbf{k} — волнового вектора падающего фотона) поляризационный множитель η в (6) определяет эффект угловой анизотропии дифференциального сечения рассеяния. Он конкретизирован для трёх схем предполагаемого эксперимента. Первая схема — векторы поляризации фотонов перпендикулярны (\perp) плоскости рассеяния. Вторая схема — векторы поляризации фотонов параллельны (\parallel) плоскости рассеяния. Третья схема — схема с неполяризованными (NP) фотонами. Плоскость рассеяния проходит через волновые векторы падающего и рассеянного (\mathbf{k}_i) фотонов. Тогда получаем:

$$\eta^\perp = 1, \quad (16)$$

$$\eta^\parallel = \cos^4 \theta, \quad (17)$$

$$\eta_{NP} = \frac{1}{2}(\eta^\perp + \eta^\parallel), \quad (18)$$

где θ — угол рассеяния (угол между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}_i). Как и следовало ожидать, сечение (6) удовлетворяет асимптотическому условию $\sigma^{(3)} \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$ и QED-теоремам Фарри [30] и Ландау-Янга [31,32] о нулевой вероятности процесса с нечетным числом внешних фотонных линий на „петле“ в представлении диаграмм Фейнмана: $\sigma^{(3)} \rightarrow 0$ при $\omega_1 \rightarrow 0$ (запрещается упругое слияние двух ω -фотонов в один, $\omega_2 \rightarrow 2\omega$).

3. Результаты и обсуждение

Результаты расчета представлены на рис. 2–4. Для параметров сечения (6) приняты следующие значения: $I_{1s} = 7699.23$ eV, $\Gamma_{1s} = 1.046$ eV [33], $\omega = 12400$ eV [34]. В этом случае выполнен критерий применимости дипольного приближения для \hat{R} - и \hat{Q} -операторов перехода: $\lambda_\omega/r_{1s} \gg 1$, где средний радиус $1s^2$ -оболочки иона $\text{Fe}^{16+} r_{1s} = 0.031$ Å и длина волны падающего на ион излучения $\lambda_\omega \cong 1$ Å. Значения I_{1snp} и J_{np} для $n \in [3; 10]$ получены расчетом в одноконфигурационном приближении Хартри-Фока. Для $n \in [11; \infty)$ энергии переходов получены аппроксимацией вида

$$I_{1snp} = I_{1s} - \frac{1}{n^2} \left(\alpha + \frac{1}{n} \beta \right), \quad (19)$$

где числа α и β определяются значениями I_{1smp} для $m = 9, 10$. Для $n \in [11; \infty)$ амплитуды вероятности радиационного перехода получены аппроксимацией вида

$$J_{np} = \frac{1}{n^2} \left(\xi + \frac{1}{n} \rho + \frac{1}{n^2} \chi \right), \quad (20)$$

где числа ξ , ρ и χ определяются значениями J_{mp} для $m = 8, 9, 10$. Суммирование в формулах (11) и (12) ограничено значением главного квантового числа $n_{\max} = 500$.

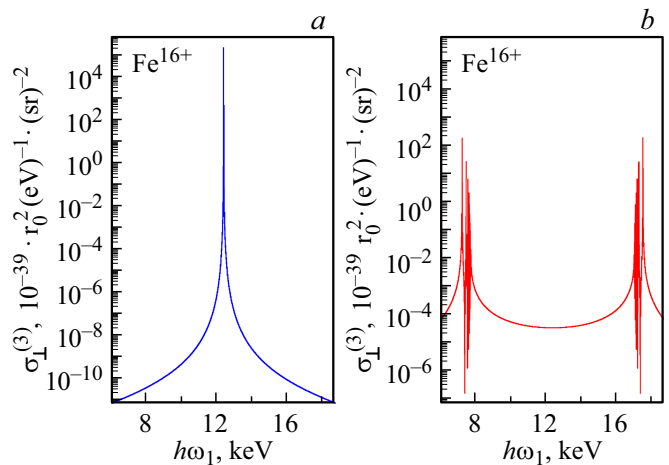


Рис. 2. Парциальные трижды дифференциальные сечения упругого фотон-фотонного рассеяния в поле иона Fe^{16+} для \perp -схемы эксперимента ($\eta^\perp = 1$): (a) сечение томсоновского (учтена лишь амплитуда M_1) рассеяния, (b) сечение „зеркально-симметричного“ резонансного (учтены лишь амплитуды M_2 и M_3) рассеяния. Энергия падающего фотона $\hbar\omega = 12.40$ keV, $\hbar\omega_1$ — энергия рассеянного фотона.

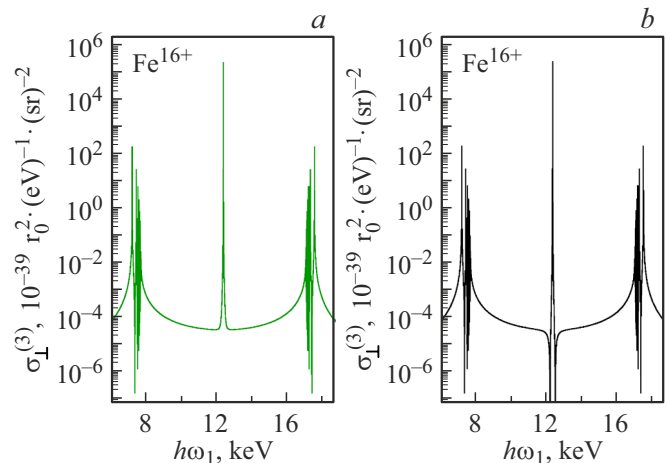


Рис. 3. Полные трижды дифференциальные сечения упругого фотон-фотонного рассеяния в поле иона Fe^{16+} для \perp -схемы эксперимента ($\eta^\perp = 1$): (a) без учета (сумма сечений на рис. 2, a, b), (b) с учетом квантовой интерференции (9) амплитуд M_1 и M_2 . Энергия падающего фотона $\hbar\omega = 12.40$ keV, $\hbar\omega_1$ — энергия рассеянного фотона.

Результат на рис. 2, a демонстрирует лидирующую роль томсоновского резонанса в сечении рассеяния. „Зеркально-симметричные“ резонансные структуры сечения рассеяния на рис. 2, b в области „холодных“ ($\omega_1 \sim I_{1snp}$) и „горячих“ ($\omega_1 \sim 2\omega - I_{1snp}$) фотонов демонстрируют эффект деструктивной (гасящей) квантовой интерференции парциальных амплитуд вероятности $1s \rightarrow np$ фотовозбуждения в амплитуде (11), содержащей отрицательную часть. Обнаруженные новые „зеркально-симметричные“ структуры сечения рас-

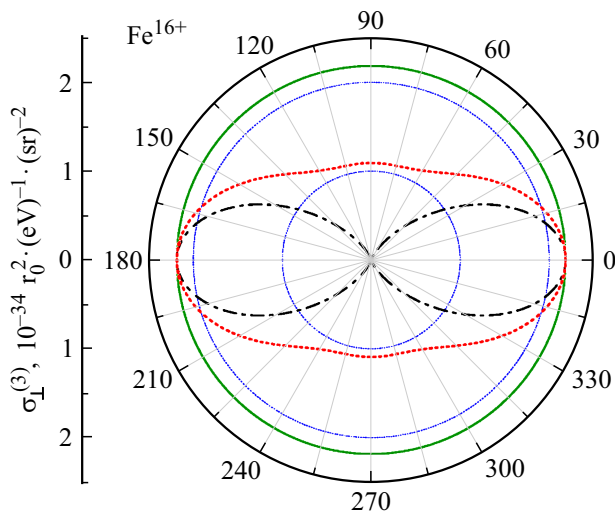


Рис. 4. Индикатрисы упругого фотон-фотонного рассеяния в поле иона Fe^{16+} с полярным радиусом $\sigma_{\perp}^{(3)}$ и полярным углом θ при фиксированных значениях энергий падающего ($\hbar\omega = 12.40 \text{ keV}$) и рассеянных ($\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 = \hbar\omega$; томсоновский резонанс) фотонов. Схемы эксперимента: \perp (сплошная кривая), \parallel (штрихпунктирная кривая), неполяризованные фотоны (пунктирная кривая).

сеяния аналогичны таковым в работах [18–20]. Однако их отличает „обращенность“ по главным квантовым числам резонансов рассеяния и сильная ($\sim 2 \text{ keV}$) энергетическая отделенность внутри областей „холодных“ ($\omega_1 \sim \omega - I_{1snp}[20] \rightarrow \omega_1 \sim I_{1snp}$) и „горячих“ ($\omega_1 \sim \omega + I_{1snp}[20] \rightarrow \omega_1 \sim 2\omega - I_{1snp}$) фотонов. Оценка показывает, что соответствующие сечения резонансного фотон-фотонного рассеяния третьего порядка теории возмущений на ~ 12 порядков величины превосходят таковые второго порядка. Сравнение результатов на рис. 3, *a* и рис. 3, *b* демонстрирует эффект деструктивной квантовой интерференции амплитуд вероятности томсоновского (M_1) и „зеркально-симметричных“ (M_2) резонансов, входящих с разными знаками в полную вероятность рассеяния (G). При этом возникают широкие ($\Delta\omega_1 \sim 5.2 \text{ keV}$) окна „прозрачности“ (резкое падение вероятности упругого фотон-фотонного рассеяния) между томсоновским и „зеркально-симметричными“ резонансами. Результат на рис. 4 для схемы эксперимента с неполяризованными фотонами (18) демонстрирует ярко выраженную угловую анизотропию рассеяния — преимущественное рассеяние в направлении углов $\theta = 0^\circ, 180^\circ$. Этот результат качественно воспроизводит таковой для упругого фотон-фотонного рассеяния через QED-вакуум [35].

4. Заключение

Сформулирован нерелятивистский вариант квантовой теории процесса упругого фотон-фотонного рассеяния в поле многозарядного неоподобного атомного иона.

Установлено следующее: лидирующая роль томсоновского резонанса в сечении рассеяния; наличие ярко выраженных резонансных структур сечения рассеяния в областях энергий „холодных“ ($\omega_1 \sim I_{1snp}$) и „горячих“ ($\omega_1 \sim 2\omega - I_{1snp}$) рассеянных фотонов; наличие деструктивной квантовой интерференции как между компонентами „зеркально-симметричных“ структур сечения, так и между амплитудами вероятности переходов в виртуальные электронные состояния сплошного и дискретного спектров; наличие угловой анизотропии (в соответствующих схемах предполагаемого эксперимента) рассеяния. Выход за рамки дипольного приближения для \hat{R} - и \hat{Q} -операторов перехода и учет следующих порядков приближения Тамма-Данкова является предметом будущего развития теории. Наконец, оценим сечение „наблюдаемого“ томсоновского резонанса (рис. 3, 4) в XFEL-эксперименте. При средней яркости излучения лазера (число фотонов в лазерном импульсе $N = 10^{17}$ [34], European XFEL) в силу теоремы о сумме вероятностей несовместных событий (выбор двух из N падающих на ион фотонов) имеем

$$\frac{N!}{2!(N-2)!} \cdot \sigma_{\perp}^{(3)} \cong 80 \left(\frac{\text{mbarn}}{\text{eV} \cdot \text{sr}^2} \right).$$

Для дифференциального сечения, проинтегрированного по углам рассеяния фотонов в аксиально-симметричной схеме эксперимента, имеем

$$\frac{N!}{2!(N-2)!} \left(\frac{d\sigma_{\perp}}{d\omega} \right) \cong 2.6 \left(\frac{\text{barn}}{\text{eV}} \right).$$

Полученные значения вполне доступны измерению.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов

Список литературы

- [1] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. *Quantum Electrodynamics* (Oxford: Butterworth-Heinemann, 2008).
- [2] H. Euler. *Ann. Phys. (Leipzig)*, **26**, 398 (1936).
- [3] A. Akhiezer, L. Landau, I. Pomeranchuk. *Nature*, **138**, 206 (1936).
- [4] A. Akhiezer. *Physik Z. Sowjetunion*, **11**, 263 (1937).
- [5] R. Karplus, M. Neuman. *Phys. Rev.*, **83**, 776 (1951). DOI: 10.1103/PhysRev.83.776
- [6] B. DeTollis. *Nuovo Cimento* **35**, 1182 (1965). DOI: 10.1007/BF02735534
- [7] D. Bernard, F. Moulin, F. Amiranoff, A. Braun, J.P. Chambaret, G. Darpentigny, G. Grillon, S. Ranc, F. Perrone. *Eur. Phys. J. D*, **10**, 141 (2000). DOI: 10.1007/s100530050535
- [8] T. Inada, T. Yamaji, S. Adachi, T. Namba, S. Asai, T. Kobayashi, K. Tamasaku, Y. Tanaka, Y. Inubushi, K. Sawada, M. Yabashi, T. Ishikawa. *Phys. Lett. B*, **732**, 356 (2014). DOI: 10.48550/arXiv.1403.2547

- [9] T. Yamaji, T. Inada, T. Yamazaki, T. Namba, S. Asai, T. Kobayashi, K. Tamasaku, Y. Tanaka, Y. Inubushi, K. Sawada, M. Yabashi, T. Ishikawa. *Phys. Lett. B*, **763**, 454 (2016). DOI: 10.48550/arXiv.1608.06369
- [10] I. Nam *et al.* (PAL–XFEL Collaboration). *Nature Phot.*, **15**, 435 (2021). DOI: 10.1038/s41566-021-00777-z
- [11] A. Fedotov, A. Ilderton, F. Karbstein, B. King, D. Seipt, H. Taya, G. Torgrimsson. *Phys. Reports*, **1010**, 1 (2023). DOI: 10.48550/arXiv.2203.00019
- [12] D. d’Enterria, G. Silveira. *Phys. Rev. Lett.*, **111**, 080405 (2013); Erratum: *Phys. Rev. Lett.* **116**, 129901 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.080405
- [13] M. Klusek-Gawenda, P. Lebedowicz, A. Szczurek. *Phys. Rev. C*, **93**, 044907 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevC.93.044907
- [14] L.A. Harland-Lang, V.A. Khoze, M.G. Ryskin. *Eur. Phys. J. C*, **79**, 39 (2019). DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6530-5
- [15] G. Aad *et al.* (ATLAS Collaboration). *Nature Phys.*, **13**, 852 (2017). DOI: 10.17182/hepdata.77761
- [16] G. Aad *et al.* (ATLAS Collaboration). *Phys. Rev. Lett.*, **123**, 052001 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevLett.123.052001
- [17] CMS Collaboration. *Phys. Lett. B*, **797**, 134826 (2019).
- [18] A.N. Hoppersky, A.M. Nadolinsky, S.A. Novikov. *Phys. Rev. A*, **93**, 052701 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevA.93.052701
- [19] A.N. Hoppersky, A.M. Nadolinsky, S.A. Novikov. *Phys. Scr.*, **93**, 105401 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.063424
- [20] A.N. Hoppersky, A.M. Nadolinsky. *JETP Lett.*, **107**, 282 (2018). DOI: 10.7868/S0370274X1805003X
- [21] P. Pradhan, D.P. Huenemoerder, R. Ignace, A.M.T. Pollock, J.S. Nichols. *Astrophys. J.*, **915**, 114 (2021). DOI: 10.48550/arXiv.2103.05053
- [22] A.W. Shaw, J.M. Miller, V. Grinberg, D.J.K. Buisson, C.O. Heinke, R.M. Plotkin, J.A. Tomsick, A. Bahramian, P. Gandhi, G.R. Sivakoff. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **516**, 124 (2022). DOI: 10.48550/arXiv.2208.01732
- [23] S.W. Epp, J.R. Crespo López-Urrutia, G. Brenner, V. Mäkel, P.H. Mokler, R. Treusch, M. Kuhlmann, M.V. Yurkov, J. Feldhaus, J.R. Schneider, M. Wellhöfer, M. Martins, W. Wurth, J. Ullrich. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 183001 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.183001
- [24] P. Micke, S. Kühn, L. Buchauer, J.R. Harries, T.M. Bücking, K. Blaum, A. Cleluch, A. Egl, D. Hollain, S. Kraemer, T. Pfeifer, P.O. Schmidt, R.X. Schüssler, Ch. Schweiger, S. Sturm, R.N. Wolf, S. Bernitt, J.R. Crespo Lorez-Urrutia. *Rev. Sci. Instrum.*, **89**, 063109 (2018). DOI: 10.48550/arXiv.2011.01363
- [25] M. Nrisimhamurthy, G. Aravind, P.C. Deshmukh, S.T. Manson. *Phys. Rev. A*, **91**, 013404 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.91.013404
- [26] A.L. Fetter, J.D. Waleska. *Quantum Theory of Many-Particle System* (McGraw–Hill, N.Y., 1971). DOI: 10.1063/1.3071096
- [27] R. Loudon. *The Quantum Theory of Light* (Oxford Science Publications, 2001).
- [28] A.N. Hoppersky, A.M. Nadolinsky, S.A. Novikov. *Phys. Rev. A*, **98**, 063424 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.063424
- [29] N. Bloembergen. *Nonlinear Optics* (World Scientific, Singapore, 1996).
- [30] W.H. Furry. *Phys. Rev.*, **51**, 125 (1937). DOI: 10.1103/PhysRev.51.125
- [31] L.D. Landau. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **60**, 207 (1948) [in Russian].
- [32] C.N. Yang. *Phys. Rev.*, **77**, 242 (1950). DOI: 10.1103/PhysRev.77.242
- [33] M.H. Chen, B. Crasemann, Kh.R. Karim. *Phys. Rev. A*, **24**, 1845 (1981). DOI: 10.1103/PhysRevA.24.1845
- [34] J. Feldhaus, M. Krikunova, M. Meyer, Th. Möller, R. Moshhammer, A. Rudenko, Th. Tschentscher, J. Ullrich. *J. Phys. B*, **46**, 164002 (2013). DOI: 10.1088/0953-4075/46/16/164002
- [35] A. Rebhan, G. Turk. *Int. J. Mod. Phys. A*, **32**, 1750053 (2017). DOI: 10.48550/arXiv.1701.07375