

Устойчивость стационарных решений для режима с отражением частиц от потенциальных барьеров в диоде с электрон-позитронной плазмой

© Л.А. Бакалейников, В.И. Кузнецов, Е.Ю. Флегонтова, Д.П. Барсуков, И.К. Морозов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fl.xiees@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 14 мая 2023 г.

В окончательной редакции 18 сентября 2023 г.

Принято к публикации 30 октября 2023 г.

Численно изучается устойчивость стационарных состояний плазмы в диоде со встречными потоками электронов и позитронов для режима, когда часть вылетевших частиц отражается от потенциальных барьеров и возвращается обратно на электрод. Построены стационарные решения для потоков заряженных частиц с немонотонным распределением по скоростям. Установлено, что решения с отражением частиц от потенциальных барьеров, расположенных вблизи эмиттирующих электродов, устойчивы, когда межэлектродное расстояние меньше некоторой пороговой величины. Все остальные решения являются неустойчивыми.

Ключевые слова: плазменный диод, пучки электронов и позитронов, устойчивость решений.

Пульсары — источники импульсного радиоизлучения, всплески которого следуют друг за другом с очень медленно изменяющимся периодом, — были обнаружены более 50 лет назад. Однако до сих пор нет ясного представления ни о механизме этого излучения, ни о причине перескока между модами [1,2]. Только в последние годы появилось понимание того, что излучение пульсаров связано с коллективными процессами, протекающими в электрон-позитронной плазме пульсарного диода [3].

В работе [4] высказана гипотеза, что излучение пульсара вызвано колебаниями электрического поля в плазме, возникающими из-за неустойчивости стационарных состояний, характерной для диодов с бесстолкновительной плазмой [5]. Стационарные состояния диода со встречными монотонными потоками электронов и позитронов подробно изучены в [6]. Их можно разделить на два типа: 1) все заряженные частицы долетают до противоположной границы; 2) часть частиц отражается от потенциального барьера в плазме. Изучение устойчивости стационарных решений без отражения проведено в [4,7]. Отметим, что аналитические методы исследования устойчивости состояний диода с пучком электронов для неоднородной плазмы предложены в [8,9].

В настоящей работе численно изучается устойчивость стационарных решений в плоском диоде для режима с отражением частиц от потенциальных барьеров. Рассчитывается начальная стадия развития малого возмущения решений. Для валидации полученных результатов расчеты проводятся с использованием двух численных кодов: ЕК-кода и РИС-кода.

Считаем, что нерелятивистский поток электронов поступает с левого электрода, а поток позитронов —

с правого электрода с функциями распределения по скоростям (ФРС), слабо отличающимися от монотонных, с одинаковыми по модулю средними скоростями: $\bar{v}_{p,0} = -\bar{v}_{e,0}$. Частица, достигшая какого-либо электрода, поглощается на нем. Разность потенциалов между электродами U полагаем равной нулю.

Переходим к безразмерным единицам, выбирая энергию частиц W_0 и длину Дебая–Хюккеля $\lambda_D = [(2\tilde{\epsilon}_0 W_0)/(e^2 n_{e,0})]^{1/2}$ (e — заряд электрона, $n_{e,0}$ — концентрация электронов при вылете с эмиттера, а $\tilde{\epsilon}_0$ — диэлектрическая проницаемость вакуума) в качестве единиц энергии и длины. Для безразмерных координаты, потенциала и напряженности электрического поля имеем: $\xi = z/\lambda_D$, $\eta = e\Phi/(2W_0)$ и $\varepsilon = eE\lambda_D/(2W_0)$. В безразмерном виде ФРС частиц задаем в виде „воротиков“ малой ширины $\Delta \ll 1$: $f_0^{(\pm)}(u) = (2\Delta)^{-1}$ в интервале скоростей $u \in [\mp 1 - \Delta, \mp 1 + \Delta]$ и $f_0^{(\pm)}(u) = 0$ вне этого интервала (здесь знаки „минус“ и „плюс“ соответствуют электронам и позитронам).

Сначала рассмотрим стационарные решения. В случае $\Delta \ll 1$ они близки к решениям для монокинетических ФРС и определяются тремя безразмерными параметрами: межэлектродным расстоянием $\delta = d/\lambda_D$, разностью потенциалов между электродами $V = eU/(2W_0)$ и напряженностью электрического поля на левом электроде ε_0 .

Решения будем представлять точками на плоскости (ε_0, δ) . Эти точки образуют отдельные кривые, которые называются ветвями решений [6]. Для случая $\Delta = 0$ решения показаны на рис. 1, а.

В случае, когда $V = 0$, а частицы поступают в плазму с противоположных электродов с одинаковыми по модулю зарядами, массами и кинетическими энергиями, распределения потенциала (РП) должны обладать нечетной симметрией относительно центра промежутка [4], что

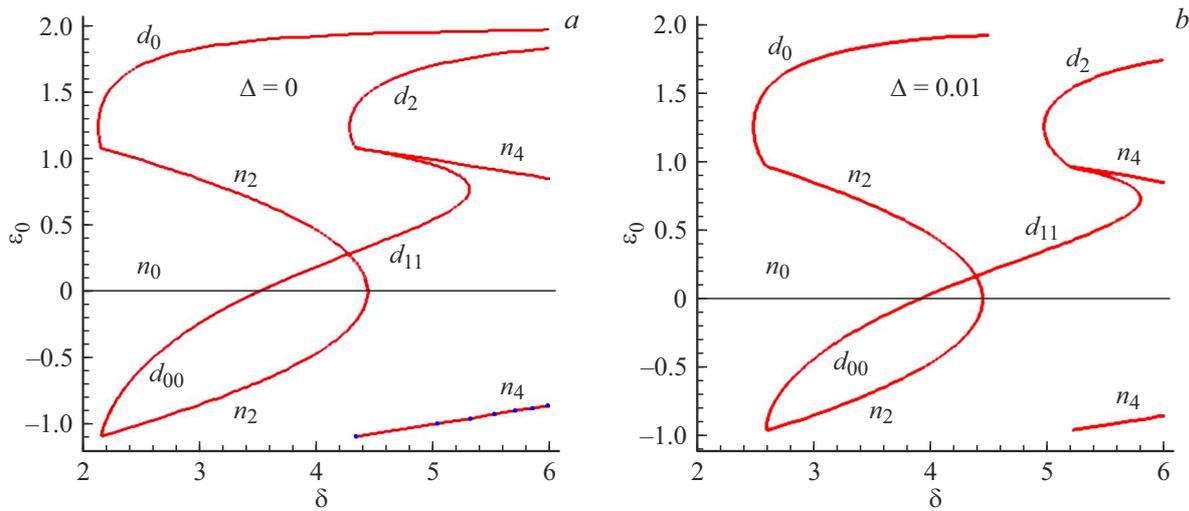


Рис. 1. Ветви решений для $\Delta = 0$ (a) и 0.01 (b).

позволяет уменьшить количество ветвей решений по сравнению с общим случаем $V \neq 0$ [6], а также корректировать расчет при моделировании.

Стационарные решения характеризуются волнообразными РП. Ветви решений для режима без отражения частиц от экстремумов потенциала на рис. 1 обозначены n_k , где индекс k — количество экстремумов на РП. В том случае, когда имеется отражение электронов, назовем потенциальный минимум на РП виртуальным электронным эмиттером (e -ВЭ), а потенциальный максимум — виртуальным позитронным эмиттером (p -ВЭ). Имеется два типа РП с отражением частиц. Когда e -ВЭ расположен левее p -ВЭ, соответствующие ветви на рис. 1 обозначены d_k , где индекс k — количество экстремумов на РП, лежащих между e -ВЭ и p -ВЭ. В противоположном случае, когда p -ВЭ расположен левее e -ВЭ, соответствующие ветви на рис. 1 обозначены d_{ij} , где индекс i — количество минимумов на РП, лежащих слева от p -ВЭ, а индекс j — количество максимумов на РП, лежащих справа от e -ВЭ. Благодаря симметрии в случае $V = 0$ могут существовать только решения, принадлежащие ветвям n_k и d_k с $k = 0, 2, 4, \dots$, а также d_{ss} с $s = 0, 1, \dots$. Примеры РП, соответствующих ветвям n_2 и d_0 , приведены на рис. 2, a, а ветвям d_{00} и d_{11} — на рис. 2, b.

Стационарные концентрации электронов и позитронов определяются из закона сохранения энергии. Чтобы найти РП для каждого типа решений, концентрации заряженных частиц подставляются в уравнение Пуассона, после чего оно интегрируется по потенциалу между характерными точками (потенциалами на левой и правой границах и экстремумами). Интегралы берутся аналитически. Полученные уравнения для производной потенциала $\eta'(\xi)$ позволяют связать значения потенциала в экстремумах и напряженность электрического поля у левого электрода ε_0 , которая выступает в качестве параметра. Интервалы изменения ε_0 , соответствующие

каждому типу решений, как функции Δ определяются значениями потенциала в экстремумах, при которых отражение начинается или становится полным. Распределения потенциала находятся в результате численного интегрирования $\eta'(\xi)$ по координате с учетом симметрии относительно середины диода. Ветви решений строятся варьированием ε_0 на соответствующих этим ветвям интервалах.

Типичное РП, соответствующее ветви n_2 , показано на рис. 2, a красной кривой. РП, характерное для ветви d_0 , показано на рис. 2, a синей кривой.

На рис. 1, b показаны ветви решений для диода с ФРС, имеющей полуширину $\Delta = 0.01$, в области $\delta < 6$. Сравнение с аналогичными кривыми для диода с $\Delta = 0$ показывает, что переход к узкой прямоугольной ФРС приводит к сдвигу этих зависимостей вправо и небольшому растяжению по оси δ .

При численном исследовании устойчивости стационарных решений в электрон-позитронном диоде мы изучаем эволюцию малого возмущения стационарного распределения электрического поля. Во всех описанных далее расчетах полуширина ФРС $\Delta = 0.01$. В том случае, когда решение оказывается неустойчивым, эволюция возмущения приводит к уходу решения от стационарного. В противоположном случае решение возвращается на стационарное. Для моделирования эволюции РП в электрон-позитронном диоде мы использовали два разных численных кода: РИС-код и ЕК-код.

В РИС-коде при моделировании ФРС рассматриваются отдельные частицы, движущиеся в электрическом поле, заданном в N_ξ равноотстоящих узлах сетки. Для плотности заряда в узлах сетки используется модель „облако в ячейке“ (линейный вклад частицы в плотность в соседних узлах) [10]. Электрическое поле в узлах сетки находится из уравнения Пуассона, а между узлами используется линейная аппроксимация [10]. Положение частиц в следующий момент времени рассчитывается

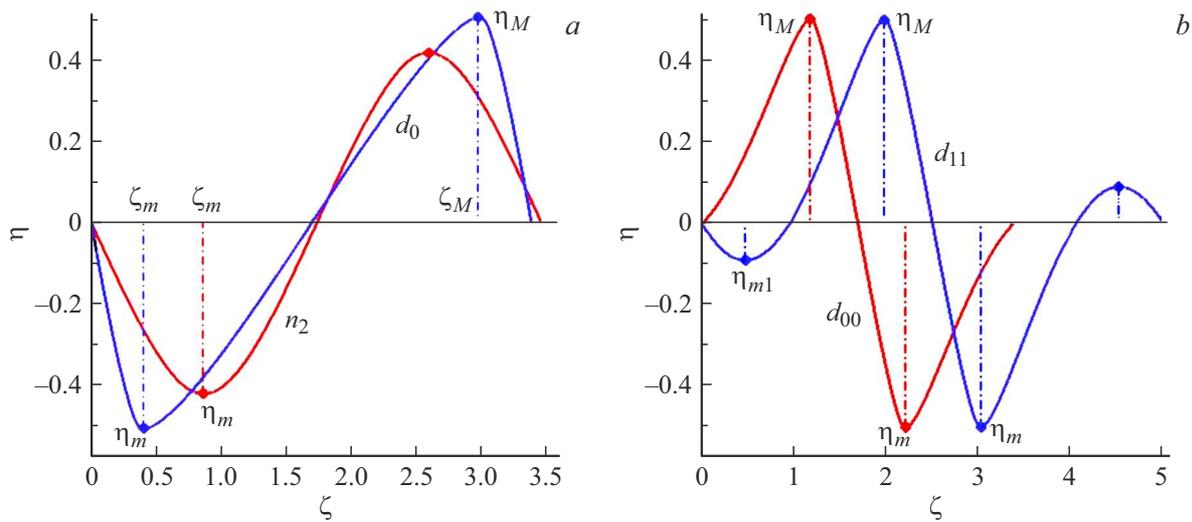


Рис. 2. Типичные РП для ветвей n_2 (красная) и d_0 (синяя кривая) (a) и d_{00} (красная) и d_{11} (синяя кривая) (b); $V = 0$. Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

методом „перешагивания“ [10] с постоянным шагом по времени h_τ . В конце каждого шага из расчета удаляются частицы, попавшие на электроды, и добавляются частицы, поступившие с электродов в случайный момент времени, распределенный равномерно по интервалу h_τ , со случайными скоростями, равномерно распределенными в интервалах $[\mp 1 - \Delta, \mp 1 + \Delta]$.

В качестве начального распределения поля в момент времени $\tau = \tau_0$ задается стационарное распределение поля с наложенным на него возмущением $\tilde{\eta}(\xi, \tau_0) = C \sin(2\pi\xi/\delta)$, где $C \ll 1$. Начальная ФРС частиц в каждой точке ξ возмущенного стационарного поля имеет вид „воронков“, границы которых определяются из закона сохранения энергии.

Численный алгоритм, реализованный в ЕК-коде, подробно описан в работах [11,12]. Алгоритм основан на последовательном расчете ФРС заряженных частиц, их концентраций и распределения электрического поля на каждом временном шаге. Для расчета ФРС траектории заряженных частиц прослеживаются в поле, известном во все предыдущие моменты времени, вплоть до вылета с одного из электродов.

Исследование устойчивости решений, принадлежащих ветвям d_{00} и d_{11} , было выполнено при значениях длины диода δ , равных 2.7, 2.8, 3, 3.5, 5, 5.6. Эти значения покрывают практически весь диапазон длин диода, для которых существуют решения такого вида. При $\delta = 5.6$ существует два стационарных решения вида d_{11} , различающихся значением ε_0 (рис. 1). Во всех исследованных случаях решения оказались неустойчивыми. Отметим, что возможны различные сценарии развития начального возмущения.

Мы также исследовали устойчивость решений, принадлежащих ветви d_0 . Расчеты проводились для длин диода δ , равных 2.7, 2.8, 2.85, 2.9, 2.95, 3, 3.1, 3.2. Как и в расчетах для ветвей d_{00} и d_{11} , анализирова-

Таблица 1. Инкремент Γ и частота ω при различных длинах диода δ ($\Delta = 0.01$ расчет ЕК-кодом)

δ	Γ	ω
2.80	-0.18	2.25
2.85	-0.13	2.17
2.90	0.04	2.18
2.95	0.05	2.18
3.00	0.07	2.17
3.05	0.12	2.15
3.10	0.14	2.15
3.20	0.16	2.14

лась зависимость от времени максимального значения отклонения решения от стационарного $\tilde{\eta}_M$. При длине диода 2.7, 2.8 и 2.85 возмущение со временем убывает, стационарные решения оказались устойчивыми. В остальных случаях решения оказались неустойчивыми. При этом для всех длин диода, кроме $\delta = 2.7$, на начальной стадии эволюции возмущения после короткого переходного процесса можно выделить временной интервал, где зависимость $\tilde{\eta}_M(\tau)$ имеет характер экспоненциально затухающих или нарастающих колебаний правильной синусоидальной формы с постоянной частотой: $\eta_M(\tau) = \eta_{M0} + A \exp(\Gamma\tau) \sin(\omega\tau + \phi)$. Отметим, что такой же характер имеют временные зависимости $\varepsilon_0(\tau)$.

По результатам расчетов мы определили инкременты Γ и частоты колебаний ω на выбранных участках. Они представлены в табл. 1. Знак инкремента Γ меняется между точками $\delta = 2.85$ и 2.9. В этом интервале находится порог устойчивости δ_{th}^d для решений, соответствующих ветви d_0 .

В диодах с длиной выше порога устойчивости экспоненциальный рост амплитуды колебаний продолжа-

Таблица 2. Амплитуда установившихся в диоде нелинейных колебаний ($\Delta = 0.01$)

δ	$\eta_M^{\max} - \eta_M^{\min}$	$0.35\sqrt{\delta - 2.896}$
2.9	0.022	0.022
2.95	0.081	0.081
3.0	0.112	0.113
3.5	0.235	0.272
4.0	0.289	0.368
4.5	0.302	0.443

ется до значений порядка десятых. После этого рост амплитуды начинает замедляться, и в конце концов колебания превращаются в периодические. При длине диода δ вблизи порога устойчивости зависимости $\eta(\tau)$ и $\xi(\tau)$ близки к синусоидальным, с увеличением δ форма колебаний искажается.

В табл. 2 приведены значения амплитуды нелинейных периодических колебаний максимума РП в окрестности ветви d_0 для разных длин диода $\eta_M^{\max}(\delta) - \eta_M^{\min}(\delta)$. Вблизи δ_{th}^d зависимость амплитуды колебаний от δ хорошо аппроксимируется функцией $f_H(\delta) = A\sqrt{\delta - \delta_{th}^d}$ при $A = 0.35$, $\delta_{th}^d = 2.896$. Это указывает на то, что δ_{th}^d — положение порога устойчивости — является точкой бифуркации Хопфа.

В настоящей работе мы фактически завершили изучение устойчивости стационарных состояний диода со встречными потоками электронов и позитронов [6], начатое в работах [4,7]. В предыдущих работах эта проблема изучалась для режима без отражения заряженных частиц от экстремумов потенциала, т.е. для ветвей n_k с $k = 0, 2, 4, \dots$. Аналитически и численно было установлено, что такие неоднородные стационарные решения неустойчивы относительно малых возмущений. Кроме того, было найдено, что для однородных решений существует порог по величине безразмерного межэлектродного промежутка (или, что то же самое, по величине плотности тока), при превышении которого в диоде развивается неустойчивость. В этом случае нестационарный процесс завершается в новом состоянии, характеризуемом нелинейными колебаниями, которые происходят около стационарного состояния, соответствующего режиму с отражением частиц. Порог δ_{th}^d оказывается равным $\sqrt{2}\pi\lambda_D$.

В настоящей работе изучена устойчивость стационарных состояний в режиме с отражением частиц от потенциальных барьеров, т.е. решений, соответствующих ветвям d_0 , d_{00} и d_{11} . Установлено, что решения для ветвей d_{00} и d_{11} являются неустойчивыми, а решения, принадлежащие ветви d_0 , оказываются устойчивыми только тогда, когда величина межэлектродного промежутка меньше некоторого порогового значения $\delta_{th}^d \approx 2.896$. Расчет нелинейной стадии эволюции возмущенного решения для ветви d_0 завершается выходом

на нелинейные колебания в окрестности этой ветви, совпадающие с нелинейными колебаниями, в которых завершается развитие возмущения решений, соответствующих ветвям без отражения частиц.

Изучение рассчитанных нелинейных колебаний показало, что их амплитуда вблизи порога пропорциональна $(\delta - \delta_{th}^d)^{1/2}$, т.е. здесь возникает бифуркация Хопфа.

В настоящее время нет теории устойчивости диодов для режима с отражением заряженных частиц от экстремумов потенциала. Поэтому в ходе исследований мы использовали два численных кода: ЕК-код и РИС-код. В тех случаях, когда из данных расчетов удается найти инкременты и частоты колебаний РП, их значения близки при использовании обоих кодов. Тем самым мы продемонстрировали корректность полученных результатов.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] P. Goldreich, W.H. Julian, *Astrophys. J.*, **157** (2), 869 (1969). DOI: 10.1086/150119
- [2] P.A. Sturrock, *Astrophys. J.*, **164** (3), 529 (1971). DOI: 10.1086/150865
- [3] A. Philippov, A. Timokhin, A. Spitkovsky, *Phys. Rev. Lett.*, **124** (24), 245101 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.245101
- [4] V.I. Kuznetsov, L.A. Bakaleinikov, E.Yu. Flegontova, *Phys. Plasmas*, **29** (22), 112115 (2022). DOI: 10.1063/5.0125091
- [5] A.Ya. Ender, V.I. Kuznetsov, H. Schamel, P.V. Akimov, *Phys. Plasmas*, **11** (6), 3212 (2004). DOI: 10.1063/1.1723460
- [6] А.Я. Эндер, В.И. Кузнецов, А.А. Груздев, *Физика плазмы*, **42** (10), 891 (2016). DOI: 10.7868/S0367292116100036 [A.Ya. Ender V.I. Kuznetsov, A.A. Gruzdev, *Plasma Phys. Rep.*, **42** (10), 936 (2016). DOI: 10.1134/S1063780X16100032].
- [7] Л.А. Бакалейников, В.И. Кузнецов, Е.Ю. Флегонтова, Д.П. Барсуков, И.К. Морозов, *Письма в ЖТФ*, **49** (24), 50 (2023).
- [8] V.S. Sukhomlinov, A.S. Mustafaev, H. Koubaji, N.A. Timofeev, O. Murillo, *New J. Phys.*, **23**, 123044 (2021). DOI: 10.1088/1367-2630/ac4125
- [9] V. Sukhomlinov, A. Mustafaev, A. Zaitsev, N. Timofeev, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **91** (2), 024501 (2022). DOI: 10.7566/JPSJ.91.024501
- [10] Р. Хокни, Дж. Иствуд, *Численное моделирование методом частиц* (Мир, М., 1987). [R.W. Hockney, J.W. Eastwood, *Computer simulation using particles* (Taylor & Francis, Philadelphia 1988)].
- [11] В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер, *Физика плазмы*, **36** (3), 248 (2010). [V.I. Kuznetsov, A.Ya. Ender, *Plasma Phys. Rep.*, **36** (3), 226 (2010). DOI: 10.1134/S1063780X10030049].
- [12] V.I. Kuznetsov, E.Yu. Flegontova, L.A. Bakaleinikov, *Phys. Plasmas*, **27** (9), 092304 (2020). DOI: 10.1063/5.0020140