

# Решение системы уравнений нелинейной электродинамики, минимально связанной с гравитацией, в аксиально симметричном случае

© Е.В. Галактионов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: evgalakt@mail.ru

Поступило в Редакцию 11 мая 2023 г.

В окончательной редакции 26 августа 2023 г.

Принято к публикации 30 октября 2023 г.

Основные свойства электромагнитных полей следуют из анализа регулярных решений системы уравнений нелинейной электродинамики, минимально связанной с гравитацией (NED-GR). Найдено представление для производной лагранжиана по инварианту поля, обеспечивающее совместность системы уравнений NED-GR, и получено точное решение этой системы уравнений. Приведены выражения для компонент электромагнитного поля.

**Ключевые слова:** нелинейная электродинамика, условие совместности системы уравнений, компоненты электромагнитного поля.

DOI: 10.61011/JTF.2023.12.56799.f229-23

## Введение

Электрически заряженные объекты, связанные электромагнитным и гравитационным взаимодействиями, описываются в общей постановке нелинейной электродинамикой, связанной с гравитацией (NED-GR). Нелинейная электродинамика (NED) была предложена Борном и Инфельдом в 1934 г. для того, чтобы рассмотреть электромагнитное поле и частицы в пределах одной физической системы и обеспечивать конечные значения физических величин [1]. Эти цели достигнуты в NED-GR, которая допускает регулярные решения, описывающие компактные объекты конечной энергии, связанные электромагнитными и гравитационными взаимодействиями [2]. Подробный обзор литературы приведен в [2]. В работе [3] было установлено, что система уравнений NED-GR несовместна в случае произвольного лагранжиана.

В настоящей работе, во-первых, найдено аналитическое выражение для параметрической функции  $L_F(r, \theta)$  (производной лагранжиана по инварианту поля), при которой система уравнений NED-GR совместна, во-вторых, получены точные решения этой системы для найденной функции.

## 1. Необходимое и достаточное условие совместности системы уравнений

Система уравнений NED-GR относительно двух компонент электромагнитного поля  $F_{10}(r, \theta)$ ,  $F_{20}(r, \theta)$  в аксиально симметричном случае имеет вид [3]:

$$\frac{\partial}{\partial r} [(r^2 + a^2) \sin(\theta) L_F F_{10}] + \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) L_F F_{20}] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} [a \sin(\theta) L_F F_{10}] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{a \sin(\theta)} L_F F_{20} \right] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial F_{20}}{\partial r} - \frac{\partial F_{10}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [a^2 \sin^2(\theta) F_{10}] - \frac{\partial}{\partial r} [(r^2 + a^2) F_{20}] = 0, \quad (3)$$

где  $a$  — это угловой импульс (параметр Керра),  $(r, \theta)$  — координаты Бойера–Линдквиста (декартовы координаты  $x, y, z$  связаны с координатами Бойера–Линдквиста соотношениями  $x^2 + y^2 = (r^2 + a^2) \sin^2(\theta)$ ;  $z = r \cos(\theta)$ ). Здесь  $L_F(r, \theta)$  — искомая функция, играющая роль параметра. Уравнение, которому должна удовлетворять функция  $L_F(r, \theta)$ , чтобы обеспечить необходимое и достаточное условие совместности системы уравнений (1)–(3), имеет вид [3]:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{L_F} \frac{\partial L_F}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{L_F} \frac{\partial L_F}{\partial r} \right) + \frac{4a^2 \sin^2(\theta)}{\Sigma^2} \frac{1}{L_F^2} \times \left[ r \frac{\partial L_F}{\partial r} + \cot(\theta) \frac{\partial L_F}{\partial \theta} \right]^2 = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2(\theta)$ . Если функция  $L_F(r, \theta)$  дважды непрерывно дифференцируема, то сумма квадратов должна быть равна нулю, следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{L_F} \frac{\partial L_F}{\partial \theta} \right) = 0$$

и

$$r \frac{\partial L_F}{\partial r} + \cot(\theta) \frac{\partial L_F}{\partial \theta} = 0$$

одновременно. Решая систему этих уравнений, находим общее решение уравнения (4)

$$L_F(r, \theta) = C_0 (r \cos(\theta))^u, \quad (5)$$

где  $C_0, \mu$  — произвольные вещественные числа. Таким образом, система уравнений (1)–(3) совместна тогда и только тогда, когда параметрическая функция  $L_F$  имеет вид (5). В дальнейшем работаем только с совместной системой.

## 2. Нахождение точного решения системы

Введем обозначения  $U_{10} = L_F F_{10}, U_{20} = L_F F_{20}$ . С учетом этих обозначений, система уравнений (1), (2) может быть приведена к следующему виду:

$$U_{10} = \frac{1}{2a^2 r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\Sigma}{\sin(\theta)} U_{20} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\sin(\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Sigma}{r} U_{20} \right) + 2U_{20} \right] \right\} = 0. \quad (6)$$

Общее решение второго уравнения (6) можно записать в виде

$$U_{20}(r, \theta) = \frac{r}{\Sigma^2} \left[ \Psi(\theta) + \sin(\theta) \int \Phi(r) \Sigma(r, \theta) dr \right], \quad (7)$$

где  $\Phi(r)$  — произвольная функция  $r$ ,  $\Psi(\theta)$  — произвольная функция  $\theta$ . Систему уравнений (3) можно привести к виду

$$F_{10} = \frac{1}{a^2 \sin(2\theta)} \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma F_{20}),$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\Sigma}{\sin(2\theta)} F_{20} \right) - a^2 F_{20} \right\} = 0. \quad (8)$$

Перейдем в уравнениях (8) к функциям  $U_{10}, U_{20}$  и будем считать, что функция  $L_F$  имеет вид (5), тогда первое из уравнений (8) можно записать как

$$U_{10} = \frac{1}{a^2 \sin(2\theta)} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma U_{20}) - \mu \frac{\Sigma}{r} U_{20} \right].$$

С другой стороны, функция  $U_{10}$  удовлетворяет первому из уравнений (6). Приравнявая эти два выражения, получаем первое дополнительное уравнение, которому должна удовлетворять функция  $U_{20}$ , являющаяся решением системы (1), (2):

$$r \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma U_{20}) - \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\Sigma}{\sin(\theta)} U_{20} \right) = \mu \Sigma U_{20}. \quad (9)$$

Второе из уравнений (8) после перехода к функции  $U_{20}$  и с учетом (5) дает второе дополнительное уравнение для нахождения функции  $U_{20}(r, \theta)$ . Это уравнение после упрощения примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} (\Sigma U_{20}) + (r^2 - a^2 \cos^2(\theta) - \mu \Sigma) U_{20} \right\} - \mu \frac{r^2 - a^2 \cos^2(\theta)}{r} U_{20} = 0. \quad (10)$$

Итак, есть два дополнительных уравнения (9) и (10), которым должна удовлетворять функция  $U_{20}$ . Эта функция, как общее решение второго уравнения (6), зависит от двух произвольных функций  $\Phi(r), \Psi(\theta)$  (выражение (7)). Подставив представление (7) во второе дополнительное уравнение (10), получим (в предположении  $\sin(\theta) \neq 0$ ) линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения функции  $\Phi(r)$  следующего вида:

$$\frac{d}{dr} (r^2 \Phi(r)) - \mu r \Phi(r) = 0.$$

Его общее решение будет иметь вид

$$\Phi(r) = D_1 r^{\mu-2},$$

где  $D_1$  — произвольная постоянная. Подставив (7) в первое дополнительное уравнение (9), получим интегродифференциальное уравнение относительно функций  $\Phi(r)$  и  $\Psi(\theta)$  с параметром  $\mu$  следующего вида:

$$\Psi'(\theta) + [(1 + \mu) \tan(\theta) - \cot(\theta)] \Psi(\theta) = \sin(\theta) \tan(\theta) \times \left[ r^3 \Phi(r) - (1 + \mu) \int \Phi(r) r^2 dr \right] + a^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \times \left[ (1 - \mu) \int \Phi(r) dr + r \Phi(r) \right]. \quad (11)$$

Подставим найденную функцию  $\Phi(r)$  в правую часть уравнения (11). Пусть  $\mu \neq \pm 1$ , тогда

$$\int \Phi(r) dr = D_1 \frac{r^{\mu-1}}{\mu-1}, \quad \int \Phi(r) r^2 dr = D_1 \frac{r^{\mu+1}}{\mu+1},$$

правая часть уравнения (11) обратится в нуль, и уравнение (11) примет вид

$$\Psi'(\theta) + [(1 + \mu) \tan(\theta) - \cot(\theta)] \Psi(\theta) = 0. \quad (12)$$

Общее решение этого уравнения

$$\Psi(\theta) = D_2 \sin(2\theta) (\cos(\theta))^\mu, \quad (13)$$

где  $D_2$  — произвольная постоянная. Таким образом, в случае  $\mu \neq \pm 1$  формула (13) дает  $\Psi(\theta)$ , а  $\Phi(r) = D_1 r^{\mu-2}$ .

Пусть  $\mu = +1$ , тогда

$$\Phi(r) = D_1 r^{-1},$$

$$\int \Phi(r) dr = D_1 \ln(r), \quad \int \Phi(r) r^2 dr = 0.5 D_1 r^2,$$

а уравнение (11) приобретает следующий вид:

$$\Psi'(\theta) + [2 \tan(\theta) - \cot(\theta)] \Psi(\theta) = D_1 a^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta).$$

Его общее решение

$$\Psi(\theta) = \sin(2\theta) \cos(\theta) \{ D_2 - 0.5 D_1 a^2 \ln |\cos(\theta)| \}. \quad (14)$$

Таким образом, в случае  $\mu = +1$  формула (14) дает  $\Psi(\theta)$ , а  $\Phi(r) = D_1 r^{-1}$ .

Пусть  $\mu = -1$ , тогда

$$\Phi(r) = D_1 r^{-3},$$

$$\int \Phi(r) dr = -0.5 D_1 (r)^{-2}, \quad \int \Phi(r) r^2 dr = D_1 \ln(r),$$

а уравнение (11) приобретает следующий вид:

$$\Psi'(\theta) - \cot(\theta)\Psi(\theta) = D_1 \sin(\theta) \tan(\theta).$$

Его общее решение

$$\Psi(\theta) = \sin(\theta) \{2D_2 - D_1 \ln |\cos(\theta)|\}. \quad (15)$$

Таким образом, в случае  $\mu = -1$  имеем  $\Phi(r) = D_1 r^{-3}$ , а  $\Psi(\theta)$  дает выражение (15).

После того, как найдены функции  $\Phi(r)$  и  $\Psi(\theta)$ , можно найти функцию  $U_{20}$  по формуле (7),  $U_{10}$  — по первой из формул (6), а далее найти компоненты электромагнитного поля  $F_{10}(r, \theta)$ ,  $F_{20}(r, \theta)$ .

В результате получаем:

компоненты поля в случае  $\mu \neq \pm 1$ :

$$F_{10}(r, \theta) = -D_1 \frac{2r \cos(\theta)}{(\mu^2 - 1)\Sigma^2} (\cos(\theta))^{-\mu} - D_2 \frac{r^2 - a^2 \cos^2(\theta) + \mu\Sigma}{a^2\Sigma^2} (r)^{-\mu},$$

$$F_{20}(r, \theta) = -D_1 \frac{\sin(\theta)}{(\mu^2 - 1)\Sigma^2} \{r^2 - a^2 \cos^2(\theta) - \mu\Sigma\} \times (\cos(\theta))^{-\mu} + D_2 \frac{r \sin(2\theta)}{\Sigma^2} (r)^{-\mu}.$$

В частности, для случая  $\mu = 0$ , будем иметь в отличие от результата, приведенного в [4]:

$$F_{10} = D_1 \frac{2r \cos(\theta)}{\Sigma^2} - D_2 \frac{r^2 - a^2 \cos^2(\theta)}{a^2\Sigma^2},$$

$$F_{20} = D_1 \frac{\sin(\theta)(r^2 - a^2 \cos^2(\theta))}{\Sigma^2} + D_2 \frac{r \sin(2\theta)}{\Sigma^2}.$$

При  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = -qa^2$  получим известное решение [4].

В случае  $\mu = +1$ :

$$F_{10}(r, \theta) = D_1 \frac{1}{2r\Sigma^2} \left\{ 2r^2 + a^2 \cos^2(\theta) - 2r^2 \ln \left( \frac{r}{|\cos(\theta)|} \right) \right\} - D_2 \frac{2r}{a^2\Sigma^2},$$

$$F_{20}(r, \theta) = D_1 \frac{\tan(\theta)}{\Sigma^2} \left\{ 0.5r^2 + a^2 \cos^2(\theta) \ln \left( \frac{r}{|\cos(\theta)|} \right) \right\} + D_2 \frac{\sin(2\theta)}{\Sigma^2}.$$

И, наконец, в случае  $\mu = -1$ :

$$F_{10}(r, \theta) = D_1 \frac{r}{2a^2\Sigma^2} \left\{ r^2 + 2a^2 \cos^2(\theta) + 2a^2 \cos^2(\theta) \times \ln \left( \frac{r}{|\cos(\theta)|} \right) \right\} + D_2 \frac{2r \cos^2(\theta)}{\Sigma^2},$$

$$F_{20}(r, \theta) = D_1 \frac{0.5r^2 \sin(2\theta)}{\Sigma^2} \left\{ -0.5a^2 \cos^2(\theta) r^{-2} + \ln \left( \frac{r}{|\cos(\theta)|} \right) \right\} + D_2 \frac{r^2 \sin(2\theta)}{\Sigma^2}.$$

## Заключение

В работе получено аналитическое выражение для производной лагранжиана по инварианту поля, обеспечивающее выполнение необходимых и достаточных условий совместности системы уравнений NED-GR. Для найденной функции  $L_F(r, \theta)$  получено точное решение этой системы уравнений.

Приведены аналитические выражения для компонент электромагнитного поля, которые открывают возможности для изучения их поведения при различных значениях параметра  $\mu$ , определяющего вид параметрической функции  $L_F(r, \theta)$ . Представляет несомненный интерес исследование асимптотического поведения полученных решений при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ , так, например, асимптотика при  $r \rightarrow 0$  позволит выявить особенности электромагнитной динамики на вакуумном диске де Ситтера. Более детальный анализ этих вопросов составит предмет дальнейших исследований.

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] M. Born, L. Infeld. Proc. R. Soc. London A, **144** (852), 425 (1934). DOI: 10.1098/rspa.1934.0059
- [2] I. Dymnikova. Particles, **4** (2), 129 (2021). DOI: 10.3390/particles4020013
- [3] I.G. Dymnikova, E.V. Galaktionov. Class. Quantum Grav., **32** (16), 165015 (2015). DOI: 10.1088/0264-9381/32/16/165015
- [4] I. Dymnikova. Phys. Lett. B, **639** (3–4), 368 (2006). DOI: 10.1016/j.physletb.2006.