

Международная конференция ФизикА.СПб  
23–27 октября 2023 г., Санкт-Петербург

## Поведение линеаризованной баллистико-кондуктивной модели теплопроводности в трехмерном пространстве

© С.А. Руколайне

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: rukol@ammp.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 5 мая 2023 г.  
В окончательной редакции 22 июня 2023 г.  
Принято к публикации 30 октября 2023 г.

Уравнение теплопроводности, основанное на законе Фурье, широко применяется при описании теплопроводности. Однако закон Фурье справедлив только при выполнении условия локального термодинамического равновесия, которое нарушается на микро- и наноуровне, в сверхбыстрых процессах и при очень низких температурах. В качестве замены закону Фурье предложено немало моделей в рамках различных теорий. В этой статье в рамках линеаризованной баллистико-кондуктивной модели теплопроводности изучена задача Коши в трехмерном пространстве. Обнаружен эффект, когда при добавлении в систему тепловой энергии температура в тепловой волне принимает значения ниже фоновой температуры.

**Ключевые слова:** неклассическая теплопроводность, гиперболическая теплопроводность, баллистико-кондуктивная модель теплопроводности, задача Коши.

DOI: 10.61011/JTF.2023.12.56797.f206-23n

### Введение

Для описания теплопроводности обычно используется классическое уравнение теплопроводности, основанное на законе Фурье. Однако закон Фурье справедлив лишь при выполнении условия локального термодинамического равновесия, которое нарушается на микро- и наноуровне, в сверхбыстрых процессах, а также при очень низких температурах [1–5]. В качестве замены закону Фурье предложено немало моделей в рамках различных теорий [1–13]. Однако ни одна из этих моделей не может служить полноценной заменой закону Фурье.

В диэлектриках теплоперенос осуществляется фонами, поскольку вклад электронов в теплоперенос пренебрежимо мал [2–4]. Транспорт фононов описывается уравнением Больцмана для фононов (уравнением Пайерлса–Больцмана). Однако решение этого уравнения представляет собой крайне сложную задачу. Поэтому значительный интерес представляют приближения к уравнению Пайерлса–Больцмана.

В статье [14] была предложена баллистико-кондуктивная (ballistic-conductive, БК) модель теплопроводности в рамках неравновесной термодинамики с внутренними переменными. В статьях [15,16] линеаризованная форма этой модели была протестирована на экспериментальных данных и показала количественное описание теплопереноса трансверсальными баллистическими фонами, демонстрируя при этом качественное описание второго звука (second sound). Линеаризованная форма БК модели описывается гиперболической системой

уравнений в частных производных, что обеспечивает конечность скорости распространения тепловой энергии. Исследование линеаризованной БК модели представляет существенный интерес, поскольку она может рассматриваться не только в рамках неравновесной термодинамики, но и как гиперболическое приближение к уравнению Пайерлса–Больцмана, которое само является гиперболическим интегро-дифференциальным уравнением в частных производных. С этой точки зрения модель Каттанео (гиперболическое уравнение теплопроводности) это первое гиперболическое приближение к уравнению Пайерлса–Больцмана, а линеаризованная БК модель — второе.

В настоящей работе в рамках линеаризованной БК модели изучается задача Коши в трехмерном пространстве. Обнаружен эффект, когда при добавлении в систему тепловой энергии температура в тепловой волне принимает значения ниже фоновой.

### 1. Постановка задачи Коши

Рассмотрим систему уравнений в трехмерном пространстве, описывающих БК модель теплопроводности [14–17]:

$$\rho c \partial_t T + \nabla \cdot \mathbf{q} = f, \quad (1a)$$

$$-m_1 \partial_t \mathbf{q} + \nabla \frac{1}{T} + l_{21} \nabla \cdot \mathbf{Q} = l \mathbf{q}, \quad (1b)$$

$$-m_2 \partial_t \mathbf{Q} = l_{11} \mathbf{Q} + l_{12} \nabla \mathbf{q}, \quad (1c)$$

где  $T(\mathbf{r}, t)$  — температура,  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$  — вектор теплового потока,  $f(\mathbf{r}, t)$  — источник тепловой энергии,  $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$  — внутренняя переменная (тензорная функция второго порядка),  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\rho$  — плотность,  $c$  — удельная теплоемкость. Уравнение (1а) это стандартное уравнение баланса тепловой энергии. Соотношения (1б) и (1с) — определяющие, полученные в рамках неравновесной термодинамики с внутренними переменными, где  $m_1, m_2$  — положительные материальные параметры,  $l \geq 0, l_{11} \geq 0, l_{12}l_{21} \leq 0$ . После линеаризации система (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \rho c \partial_t T + \nabla \mathbf{q} &= f, \\ \tau_q \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} &= -\lambda \nabla T + \kappa_{21} \nabla \mathbf{Q}, \\ \tau_Q \partial_t \mathbf{Q} + \mathbf{Q} &= -\kappa_{12} \nabla \mathbf{q}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\tau_q = m_1/l, \tau_Q = m_2/l_{11}, \kappa_{21} = l_{21}/l, \kappa_{12} = l_{12}/l_{11}, \lambda = 1/lT_0^2$ , где  $T_0$  — фоновая температура, относительно которой происходит линеаризация. Параметры  $\tau_q$  и  $\tau_Q$  — характеристические времена релаксации переменных  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{Q}$ .

После приведения к безразмерному виду и переобозначения величин система (2) принимает вид

$$\partial_t T + \nabla \mathbf{q} = f, \tag{3a}$$

$$\tau_q \partial_t \mathbf{q} + \mathbf{q} + \nabla T + \kappa \nabla \mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{3b}$$

$$\tau_Q \partial_t \mathbf{Q} + \mathbf{Q} + \kappa \nabla \mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{3c}$$

где все величины и параметры безразмерны,  $\kappa > 0$ . При  $\kappa = 0$  уравнение (3б) принимает вид уравнения Каттанео. При  $\tau_Q = 0$  система (3) приводит к уравнению Гуйера–Крумхансла (Guyer–Krumhansl equation) для температуры. При  $\tau_q = 0$  и  $\kappa = 0$  уравнение (3б) принимает вид закона Фурье. Таким образом, линеаризованная БК модель является обобщением известных моделей.

Исключая в системе (3) переменные  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{Q}$ , мы находим, что температура удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \tau_q \tau_Q \partial_t^3 T + (\tau_q + \tau_Q) \partial_t^2 T + \partial_t T - \Delta T - (\tau_Q + \kappa^2) \partial_t \Delta T \\ = \tau_q \tau_Q \partial_t^2 f + (\tau_q + \tau_Q) \partial_t f + f - \kappa^2 \Delta f. \end{aligned} \tag{4}$$

Уравнение (4) — гиперболическое, его характеристические числа равны  $\lambda_{1,2} = \pm v, v = [(1 + \kappa^2/\tau_Q)/\tau_q]^{1/2}, \lambda_3 = 0$ . Гиперболичность уравнения обеспечивает конечность скорости распространения тепловой энергии, равную  $v$ .

Предположим, что среда находилась в покое до момента  $t = 0$ , и начальная температура равнялась нулю. В этом случае начальные условия для системы (3) имеют вид  $T|_{t=0} = 0, \mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{0}, \mathbf{Q}|_{t=0} = \mathbf{0}$ . После подстановки этих условий в уравнения (3б) и (3с) получаются условия  $\partial_t \mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{0}, \partial_t \mathbf{Q}|_{t=0} = \mathbf{0}$ . В результате мы получаем начальные условия для уравнения (4):

$$T|_{t=0} = 0, \quad \partial_t T|_{t=0} = f|_{t=0}, \quad \partial_t^2 T|_{t=0} = \partial_t f|_{t=0}. \tag{5}$$

## 2. Решение задачи Коши

Из уравнения (4) и начальных условий (5) следует, что преобразование Фурье–Лапласа решения задачи Коши имеет вид

$$\mathcal{LFT}(\xi, s) = \frac{[\tau_q \tau_Q s^2 + (\tau_q + \tau_Q)s + 1 + \kappa^2 \xi^2] \mathcal{L}\mathcal{F}f(\xi, s)}{\tau_q \tau_Q s^3 + (\tau_q + \tau_Q)s^2 + [1 + (\tau_Q + \kappa^2)\xi^2]s + \xi^2},$$

где  $\mathcal{F}$  — преобразование Фурье, определяемое формулой  $\mathcal{F}\Phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(\mathbf{r}) e^{i\xi \mathbf{r}} d\mathbf{r}$ ,  $\mathcal{L}$  — преобразование Лапласа, выражаемое формулой  $\mathcal{L}\Phi(s) = \int_0^\infty \Phi(t) e^{-st} dt$ .

Ниже мы предполагаем, что источник мгновенный, а именно  $f = \varphi(\mathbf{r})\delta(t)$ , где  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция Дирака. В этом случае  $\mathcal{L}\mathcal{F}f(\xi, s) = \mathcal{F}\varphi(\xi)$ , и преобразование Фурье–Лапласа решения задачи Коши выражается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{LFT}(\xi, s) &= \frac{s^2 + as + (\tau_q \tau_Q)^{-1}(1 + \kappa^2 \xi^2)}{s^3 + as^2 + bs + c} \mathcal{F}\varphi(\xi) \\ &= \frac{u^2 + Cu + D}{(u - 2A)[(u + A)^2 + B^2]} \mathcal{F}\varphi(\xi) \\ &= \left[ \frac{E}{u - 2A} + \frac{F(u + A) + G}{(u + A)^2 + B^2} \right] \mathcal{F}\varphi(\xi), \end{aligned}$$

где

$$a = \tau_q^{-1} + \tau_Q^{-1}, \quad b(\xi) = (\tau_q \tau_Q)^{-1} + v^2 \xi^2, \quad c(\xi) = (\tau_q \tau_Q)^{-1} \xi^2,$$

$v$  — скорость распространения тепловой энергии,

$$s^3 + as^2 + bs + c = u^3 + \chi u + \psi,$$

$$s = u - a/3, \quad \chi(\xi) = -a^2/3 + b,$$

$$\psi(\xi) = 2(a/3)^3 - ab/3 + c,$$

$$A = (\alpha + \beta)/2, \quad B = \sqrt{3}(\alpha - \beta)/2, \quad C = a/3,$$

$$D = -2a^2/9 + (\tau_q \tau_Q)^{-1}(1 + \kappa^2 \xi^2),$$

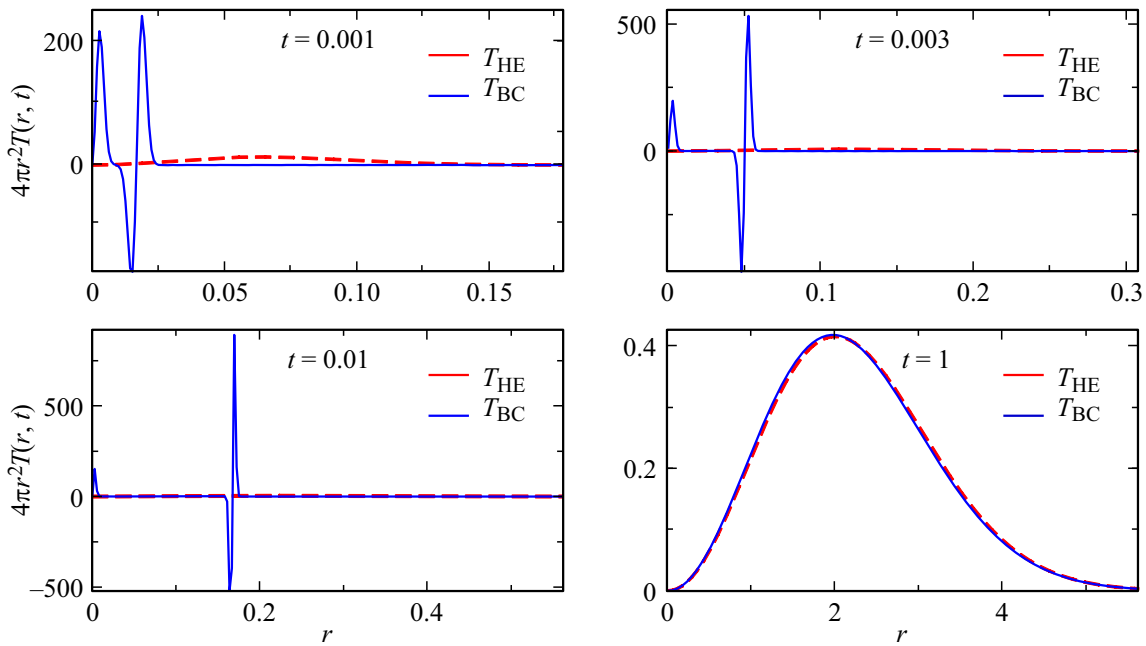
$$\alpha = \sqrt[3]{-\psi/2 + \sqrt{\Delta}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\psi/2 - \sqrt{\Delta}},$$

$$\Delta = (\chi/3)^3 + (\psi/2)^2,$$

корни  $\alpha$  и  $\beta$  выбираются таким образом, чтобы выполнялось равенство  $\alpha\beta = -\chi/3$  и значение  $A$  было вещественным,

$$E = \frac{4A^2 + 2AC + D}{9A^2 + B^2}, \quad F = 1 - E,$$

$$G = \frac{-3A^3 + AB^2 + (3A^2 + B^2)C - 3AD}{9A^2 + B^2}.$$



Решение  $T_{BC}$  задачи Коши (4), (5) в сравнении с решением  $T_{HE}$  задачи Коши для уравнения теплопроводности.

С учетом равенства  $s = u - a/3$  получаем выражение для обратного преобразования Лапласа

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{E}{u - 2A} + \frac{F(u + A) + G}{(u + A)^2 + B^2} \right] = e^{-\mu_1 t} E + e^{-\mu_2 t} \times \left[ F \cos Bt + G \frac{\sin Bt}{B} \right],$$

где  $\mu_1 = -2A + a/3$ ,  $\mu_2 = A + a/3$ . В результате получаем, что преобразование Фурье решения задачи Коши имеет вид

$$\mathcal{F}T(\xi, t) = \{ e^{-\mu_1 t} E + e^{-\mu_2 t} [F \cos Bt + GB^{-1} \sin Bt] \} \times \mathcal{F}\varphi(\xi).$$

Решение задачи (4), (5) находится при помощи обратного преобразования Фурье:

$$T(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{F}T(\xi, t) e^{-i\xi \mathbf{r}} d\xi.$$

Мы предполагаем, что в начальный момент  $t = 0$  в начале координат было выделено единичное количество тепловой энергии, а именно  $f(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})\delta(t)$ , где  $\varphi(\mathbf{r}) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-3} \exp(-r^2/2\sigma^2)$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ ,  $\sigma \ll 1$ . В этом случае  $\mathcal{F}\varphi(\xi) = \exp(-\sigma^2\xi^2/2)$ ,  $\xi = |\xi|$ , распределение температуры сферически симметрично и вычисляется по формуле

$$T(r, t) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \xi \mathcal{F}T(\xi, t) \sin(r\xi) d\xi. \quad (6)$$

На рисунке представлено решение (6) задачи Коши (4), (5) с источником  $f(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})\delta(t)$ . Значения параметров равны  $\tau_q = 0.0156$ ,  $\tau_Q = 0.0058$ ,  $\kappa^2 = 0.0196$ ,  $\sigma = 0.002$ . Эти значения параметров соответствуют значениям размерных параметров из [16]. На графике видна тепловая волна, распространяющаяся со скоростью  $v$ , причем температура в этой волне принимает значения ниже фоновой температуры ( $T = 0$  соответствует абсолютной температуре, равной фоновой температуре  $T_0$ ). Пик вблизи начала координат соответствует нулевому характеристическому числу уравнения (4). На рисунке представлено также решение задачи Коши для уравнения теплопроводности  $\partial_t T - \Delta T = f$ ,  $T|_{t=0} = 0$  с тем же источником  $f$ .

### Заключение

Обнаружен эффект, когда при добавлении в систему тепловой энергии температура в тепловой волне принимает значения ниже фоновой температуры.

### Благодарности

Автор выражает благодарность рецензентам за критические замечания, которые способствовали улучшению качества статьи.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] D.D. Joseph, L. Preziosi. *Rev. Mod. Phys.*, **61**, 41 (1989). DOI: 10.1103/RevModPhys.61.41
- [2] Y. Guo, M. Wang. *Phys. Rep.*, **595**, 1 (2015). DOI: 10.1016/j.physrep.2015.07.003
- [3] Z.M. Zhang. *Nano/Microscale Heat Transfer* (Springer, Cham, 2020), DOI: 10.1007/978-3-030-45039-7
- [4] G. Chen *Nat. Rev. Phys.*, **3**, 555 (2021). DOI: 10.1038/s42254-021-00334-1
- [5] А.И. Жмакин. *ЖТФ*, **91**, 5 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.01.50267.207-20 [A.I. Zhmakin. *Tech. Phys.*, **91**, 5 (2021). DOI: 10.1134/S1063784221010242]
- [6] R.A. Guyer, J.A. Krumhansl. *Phys. Rev.*, **148**, 766 (1966). DOI: 10.1103/PhysRev.148.766
- [7] W. Dreyer, H. Struchtrup. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **5**, 3 (1993). DOI: 10.1007/BF01135371
- [8] D.Y. Tzou. *Macro- to Microscale Heat Transfer: The Lagging Behavior* (Taylor & Francis, Washington, 1997), DOI: 10.1002/9781118818275
- [9] I. Müller, T. Ruggeri. *Rational Extended Thermodynamics* (Springer, NY., 1998), DOI: 10.1007/978-1-4612-2210-1
- [10] H.C. Öttinger. *Beyond Equilibrium Thermodynamics* (Wiley, Hoboken, 2005), DOI: 10.1002/0471727903
- [11] D. Jou, J. Casas-Vázquez, G. Lebon. *Extended Irreversible Thermodynamics* (Springer, NY., 2010). DOI: 10.1007/978-90-481-3074-0
- [12] Y. Dong, B.-Y. Cao, Z.-Y. Guo. *J. Appl. Phys.*, **110**, 063504 (2011). DOI: 10.1063/1.3634113
- [13] P.Ván, T. Fülöp. *Ann. Phys. (Berlin)*, **524**, 470 (2012). DOI: 10.1002/andp.201200042
- [14] R. Kovács, P. Ván. *Int. J. Heat Mass Transf.*, **83**, 613 (2015). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.12.045
- [15] R. Kovács, P. Ván. *Int. J. Thermophys.*, **37**, 95 (2016). DOI: 10.1007/s10765-016-2100-y
- [16] R. Kovács, P. Ván. *Int. J. Heat Mass Transf.*, **117**, 682 (2018). DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.10.041
- [17] M. Szücs, M. Pavelka, R. Kovács, T. Fülöp, P. Ván, M. Grmela. *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **47**, 31 (2022). DOI: 10.1515/jnet-2021-0022