

02,13

## Температурные зависимости критических параметров окруженного несверхпроводящими слоями неоднородного сверхпроводящего слоя

© П.И. Безотосный, К.А. Дмитриева

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН,  
Москва, Россия

E-mail: bezpi@lebedev.ru

Поступила в Редакцию 29 мая 2023 г.

В окончательной редакции 8 августа 2023 г.

Принята к публикации 9 августа 2023 г.

Рассматривается сверхпроводящее состояние неоднородного по толщине слоя, граничащего с несверхпроводящими слоями, которые оказывают на него влияние. В рамках теории Гинзбурга–Ландау (ГЛ) сформулирована методика, позволяющая оценить критические параметры сверхпроводящего слоя для описанной задачи. В разложении свободной энергии по степеням модуля параметра порядка учтен дополнительный член и более точные зависимости коэффициентов разложения от температуры, что позволяет проводить количественные оценки на более широком температурном интервале, чем классическая теория ГЛ. С использованием методики проведено моделирование температурных зависимостей плотности критического тока и критического магнитного поля слоя. Показано, что одновременный учет в расчете неоднородности сверхпроводящего слоя по толщине и влияния граничащих слоев на его состояние позволяет ощутимо улучшить оценку плотности критического тока в сравнении с экспериментальными данными. При этом вид температурной зависимости плотности критического тока изменяется при удалении от критической температуры.

**Ключевые слова:** сверхпроводящие пленки, критический ток, теория Гинзбурга–Ландау, неоднородность.

DOI: 10.61011/FTT.2023.10.56313.94

### 1. Введение

Теория Гинзбурга–Ландау (ГЛ) имеет большую важность для современной физики конденсированного состояния [1–5]. Преимущество данной теории заключается в том, что она может быть модифицирована под огромное количество задач: например, с ее помощью можно изучать поведение вихрей Абрикосова в различных сверхпроводниках и сверхпроводящих структурах [6–8]. Кроме того, с ее помощью можно изучать как статические, так и динамические состояния с использованием время-зависимых уравнений ГЛ [4,9–11].

Сегодня теория ГЛ часто используется при моделировании реальных объектов, сделанных из сверхпроводящих материалов [6,7,9,11–15]. Среди них можно отметить сверхпроводящие пленки и слои. На их базе можно создать элементы электроники, а также различные датчики [16–19]. Сверхпроводящие слои могут быть составной частью слоистых структур, например, токопроводящих лент, содержащих сверхпроводящий материал [20–23]. Теория ГЛ часто применяется при расчете параметров сверхпроводящих пленок и слоев. Однако необходимо учесть, что сверхпроводящее состояние пленки или слоя очень зависит от многих факторов, таких как наличие дефектов и неоднородности по толщине, а также окружение пленки/слоя, будь то слой окисла на поверхности пленки или соседние слои

в слоистой структуре. Все это необходимо иметь в виду при расчете критических параметров. Учет описанных факторов может быть осуществлен с помощью обобщенных уравнений ГЛ, где учитывается неоднородность свойств по толщине пленки/слоя [24,25], а также за счет использования граничных условий общего вида на параметр порядка, описывающих влияние внешнего окружения [26].

В литературе описаны простые формулы, полученные в рамках теории ГЛ, позволяющие оценить критические магнитное поле и ток (ток распаривания ГЛ) сверхтонких пластин толщиной много меньше как длины когерентности  $\xi$ , так и лондоновской глубины проникновения магнитного поля  $\lambda$  [27]. Рассматриваемый предел позволяет сделать допущение о том, что параметр порядка  $\Psi$  не изменяется по толщине пластины, что значительно упрощает уравнения ГЛ и дает возможность получить простые аналитические выражения для тока распаривания и критического магнитного поля. Отметим, что такое допущение неприменимо для пластин толщиной порядка  $\xi$  (см., например, распределения параметра порядка из работы [28]), и тем более пластин больших толщин. Исходя из этого, простые аналитические выражения для критического магнитного поля и тока распаривания не применимы для пластин/слоев толщиной порядка  $\xi$  и более.

В настоящей работе представлены расчеты критических параметров для неоднородного сверхпроводящего слоя толщиной порядка  $\xi$  и  $\lambda$ , для которого с помощью специально выведенных граничных условий на параметр порядка вводится учет влияния соседствующих несверхпроводящих слоев. Неоднородность сверхпроводящего слоя заложена в модифицированных уравнениях ГЛ. При выводе модифицированных уравнений в разложении свободной энергии по степеням модуля параметра порядка учтен дополнительный член  $|\Psi|^6$  и более точные зависимости коэффициентов разложения от температуры, что позволяет проводить количественные оценки с использованием данных уравнений на более широком температурном интервале, чем классическая теория ГЛ.

## 2. Описание модели

В рамках настоящей работы рассматривается сверхпроводящий слой толщиной  $D$  (длина и ширина слоя много больше его толщины), граничащий с одинаковыми несверхпроводящими слоями и неоднородный по толщине (в данной постановке задачи, неоднородный вдоль оси  $x$ ). Геометрия задачи, а также направления протекающего по слою транспортного тока  $I_t$  и внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$  показаны на рис. 1. Декартова система координат  $(x, y, z)$  введена как показано на рисунке. Границы слоя соответствуют  $x = 0$  и  $x = D$ . В представленной геометрии векторный потенциал имеет вид  $\mathbf{A} = e_y A(x)$ .

Неоднородность сверхпроводящего слоя в модели обусловлена изменением длины свободного пробега электронов  $l$  по его толщине. Распределение длины свободного пробега задается выражением

$$l(x) = l_0 \left( 1 - \eta \left( \frac{x}{D} - 0.5 \right)^2 \right), \quad (1)$$

где  $l_0$  — длина свободного пробега в центре слоя, а  $\eta$  — параметр, показывающий отличие длины свободного пробега в центре слоя от значения на его границах. Если  $\eta = 0$ , то  $l(x) = l_0$ , что соответствует случаю однородного сверхпроводящего слоя. Исходя из описанного выше, видно, что  $\eta$  характеризует степень неоднородности слоя.

Выбор зависимости  $l(x)$  в виде (1) обусловлен следующими соображениями. В центре сверхпроводящего слоя или пленки параметры материала близки или даже совпадают с теми, которые характерны для данного материала в объеме массивного сверхпроводника. При приближении к границам слоя из-за технологических причин, обусловленных, в частности, наличием границы раздела между различными материалами, свойства слоя изменяются. Структурный и элементный анализ сверхпроводящих пленок показывает, что на границах с подложкой и внешней средой состав сверхпроводящего слоя может совпадать с составом материала, из которого он сделан, при этом атомы, образующие материал,

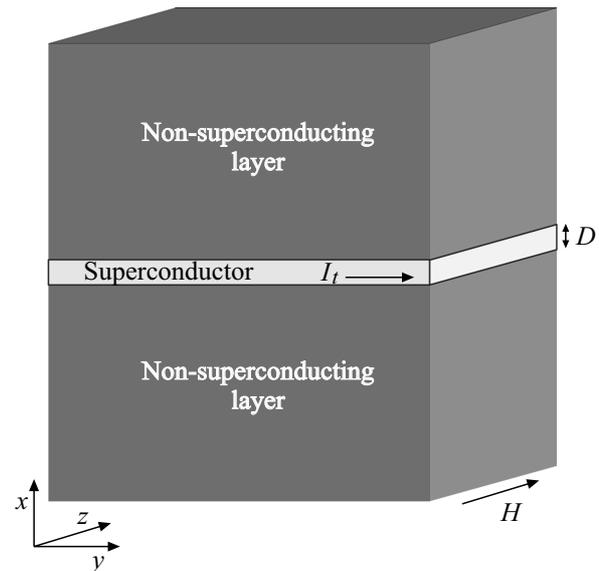


Рис. 1. Геометрия задачи.

могут быть разупорядочены (см., например, [29]). На основании разупорядочения кристаллической решетки у границ пленки в предложенной модели делается допущение, что длина свободного пробега уменьшается при приближении к границам пленки (см. выражение (1)).

Чтобы вывести уравнения ГЛ для описанной задачи, рассмотрим функционал свободной энергии:

$$F_1 \propto \int_0^D \left[ -a_1(T) |\Psi(x)|^2 + \frac{a_2(T)}{2} |\Psi(x)|^4 - \frac{a_3(T)}{3} |\Psi(x)|^6 + b(T, x) \left( \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|^2 + \frac{4e^2}{c^2} A(x)^2 |\Psi(x)|^2 \right) + \frac{(\partial A / \partial x - H)^2}{8\pi} \right] dx, \quad (2)$$

где  $\Psi$  — параметр порядка,  $e$  — заряд электрона,  $c$  — скорость света,  $T$  — температура сверхпроводящего слоя,  $a_{1, \dots, 3}(T)$  и  $b(T, x)$  — коэффициенты в разложении функционала свободной энергии. Согласно микроскопическим расчетам в рамках теории Бардина–Купера–Шриффера (БКШ), температурные зависимости  $a_{1, \dots, 3}(T)$  имеют следующий вид [30]:

$$a_1 = \alpha_1 \left( 1 - \frac{T}{T_{cm}} \right) \left( 1 + 0.5 \left( 1 - \frac{T}{T_{cm}} \right) \right), \\ a_2 = \alpha_2 \left( \frac{T}{T_{cm}} \right)^2, \quad a_3 = \alpha_3 \left( \frac{T}{T_{cm}} \right)^4, \quad (3)$$

где  $\alpha_{1, \dots, 3}$  — коэффициенты, численные значения которых можно рассчитать,  $T_{cm}$  — критическая температура массивного сверхпроводника, из которого сделан слой.

В свою очередь, коэффициент разложения  $b(T, x)$  в „грязном пределе“  $l \ll \xi_0$ , где  $\xi_0$  — длина когерентности в чистом сверхпроводнике в теории БКШ, пропорционален длине свободного пробега электронов  $l$  [31].

Учитывая допущение о виде зависимости  $l(x)$  (1),  $b(T, x)$  будет иметь вид

$$b(T, x) = b_{cn} \left( \frac{T_{cm}}{T} \right)^2 \left( 1 - \eta \left( \frac{x}{D} - 0.5 \right)^2 \right), \quad (4)$$

где  $b_{cn}$  — коэффициент, не зависящий от  $T$  и  $x$ .

В результате вариации функционала свободной энергии (2) по параметру порядка и векторному потенциалу с учетом вида коэффициентов разложения (3) и (4) получаются уравнения ГЛ в виде

$$\begin{aligned} & \psi - 2p(T)q(T)\psi^3 + p(T)q^2(T)\psi^5 \\ & + \left( 1 - \eta \left( \frac{x_\xi}{d} - 0.5 \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_\xi^2} - \frac{2\eta}{d} \left( \frac{x_\xi}{d} - 0.5 \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_\xi} \\ & - \frac{U^2}{\kappa_0^2} \psi \left( 1 - \eta \left( \frac{x_\xi}{d} - 0.5 \right)^2 \right) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_\xi^2} - 2p(T)q(T) \frac{\psi^2}{\kappa_0^2} U \left( 1 - \eta \left( \frac{x_\xi}{d} - 0.5 \right)^2 \right) = 0, \quad (6)$$

где

$$p(T) = \frac{0.367101}{(1 - T/T_{cm})(1 + 0.5(1 - T/T_{cm}))},$$

$q(T) = 1 - \sqrt{1 - 2.724043(1 - T/T_{cm})(1 + 0.5(1 - T/T_{cm}))}$ ,  
 $\psi$  — нормированный параметр порядка:  $\psi = \Psi/\Psi_0$ ,  
 $\Psi_0 = \sqrt{a_2(1 - \sqrt{(1 - 4a_1a_3/a_2^2)})/2a_3}$  — параметр порядка в массивном сверхпроводнике в отсутствии внешнего магнитного поля [30],  $\kappa_0$  — параметр ГЛ в центре сверхпроводящего слоя. Вместо размерных значений координаты  $x$  и потенциала  $A$  введены безразмерные величины  $x_\xi$  и  $U(x_\xi)$  соответственно

$$x_\xi = \frac{x}{\xi_{cn}}, \quad U = \frac{2\pi\kappa_0\xi_{cn}}{\phi_0} A,$$

где  $\phi_0$  — квант магнитного потока,  $\xi_{cn}$  — длина когерентности ГЛ однородного сверхпроводника или длина когерентности ГЛ в центре неоднородного сверхпроводника, при этом

$$\begin{aligned} \xi_{cn} &= \sqrt{b_{cn} \left( \frac{T_{cm}}{T} \right)^2 / a_1} \\ &= \frac{\xi_{cn0}}{(T/T_{cm})\sqrt{(1 - T/T_{cm})(1 + 0.5(1 - T/T_{cm}))}}, \end{aligned} \quad (7)$$

$\xi_{cn0}$  — длина когерентности в центре слоя при  $T = 0$ . В других частях сверхпроводящего слоя зависимость длины когерентности от температуры аналогична (7).

При выводе уравнений использовалась калибровка векторного потенциала  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ .

Отметим, что использование при выводе уравнений (5) и (6) функционала свободной энергии (2)

с температурными зависимостями коэффициентов разложения в виде (3) и (4) позволяет проводить количественные оценки с использованием данных уравнений при температурах  $T > 0.7T_{cm}$  [30].

Поскольку транспортный ток  $I_t$  в слое создает магнитное поле

$$H_I = \frac{2\pi}{c} I_t, \quad (8)$$

то полное поле вблизи его поверхностей равно  $H \pm H_I$ , и граничные условия для уравнения (6) имеют вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial x_\xi} \right|_{x_\xi=0} &= h - h_I, \\ \left. \frac{\partial U}{\partial x_\xi} \right|_{x_\xi=d} &= h + h_I, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$h = \frac{H}{H_\xi}, \quad h_I = \frac{H_I}{H_\xi}, \quad H_\xi = \frac{\phi_0}{2\pi\kappa_0^2\xi_{cn}^2}.$$

Более подробно остановимся на граничных условиях к уравнению (5). Рассмотрим функционал свободной энергии  $F_2$ :

$$F_2 \propto F_1 + \gamma|\Psi(0)|^2 + \gamma|\Psi(D)|^2. \quad (10)$$

Последние два слагаемых по аналогии с [26] описывают вклад энергии поверхностей сверхпроводящего слоя в его свободную энергию. В свою очередь,  $\gamma$  — коэффициент в разложении энергии поверхностей сверхпроводящего слоя по степеням параметра порядка. Для целей данной работы считаем, что поверхности слоя (соответствуют  $x = 0$  и  $x = D$ ) одинаковы.

В результате вариации функционала свободной энергии (10) по параметру порядка могут быть получены обобщенные граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\psi}{dx_\xi} \right|_{x_\xi=0} &= \frac{\psi(0)}{\Lambda(1 - 0.25\eta)}, \\ \left. \frac{d\psi}{dx_\xi} \right|_{x_\xi=d} &= -\frac{\psi(d)}{\Lambda(1 - 0.25\eta)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\Lambda = \frac{1}{\gamma} \sqrt{b_{cn} \left( \frac{T_{cm}}{T} \right)^2 a_1}$$

— параметр размерности длины, который, по аналогии с [26], будем называть длиной экстраполяции.

Анализ выражений (11) показывает следующее. Если положить  $\eta = 0$ , то граничные условия переходят к виду, который используется для расчетов в случае однородных пленок (см., например, [32–34]). Если длина экстраполяции  $\Lambda = \infty$ , то граничные условия (11) переходят в вид, который не учитывает влияния граничащих слоев [28,35]. Дополнительно стоит упомянуть, что в работе [26] указана необходимость применения в расчетах граничных условий общего вида на параметр порядка

для высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП). Это обусловлено тем, что длина когерентности для данных материалов, как правило, мала по сравнению с низкотемпературными сверхпроводниками. При этом, согласно [26], длина экстраполяции  $\Lambda \propto \xi$  на границе сверхпроводника, что приводит к малости значений  $\Lambda$  для ВТСП, и появляется необходимость применения граничных условий общего вида на параметр порядка. В случае неоднородных сверхпроводящих слоев на их границах длина свободного пробега уменьшается относительно своего значения в объеме слоя из-за разупорядочения атомов на границе (см., например, [29]). В связи с этим, в рамках „грязного предела“ уменьшается значение  $\xi$  на границе относительно ее величины в объеме. Это приводит к уменьшению значения  $\Lambda$  и необходимости учета граничных условий общего вида на параметр порядка не только для слоев из ВТСП-материалов, но и для слоев из низкотемпературных сверхпроводников.

Обсудим изменение отношения толщины сверхпроводящего слоя  $D$  и длины когерентности  $\xi$  с изменением температуры ( $D/\xi(T)$ ). Как упоминалось выше, параметры сверхпроводящего слоя изменяются по его толщине, поэтому будем рассматривать усредненное по толщине слоя значение длины когерентности

$$\langle \xi \rangle(T) = \frac{1}{D} \int_0^D \xi(x, T) dx,$$

где

$$\xi(x, T) = \xi_{\text{cn}}(T) \sqrt{\left(1 - \eta \left(\frac{x}{D} - 0.5\right)^2\right)}.$$

Зависимость  $\xi_{\text{cn}}(T)$  определяется соотношением (7). Здесь также учтена справедливая для „грязного предела“ взаимосвязь  $\xi \propto \sqrt{l}$ . Отметим, что при проведении экспериментов, как правило, для пленки/слоя определяется усредненное значение  $\xi$ . В настоящей работе рассматривается сверхпроводящий слой толщиной  $D = 2\xi_{\text{cn}0}$ . Расчеты проводились для значения степени неоднородности  $\eta = 3$  и при температурах  $T > 0.7T_{\text{cm}}$ . На границах рассматриваемого температурного интервала отношение  $D/\langle \xi \rangle(0.7T_{\text{cm}}) \approx 0.96$  и уменьшается с увеличением температуры. Для однородного по толщине слоя (случай  $\eta = 0$ )  $D/\xi(0.7T_{\text{cm}}) \approx 0.82$  и также уменьшается с ростом  $T$ . Таким образом, соотношение  $D < \xi(T)$  для моделируемого сверхпроводящего слоя выполняется на всем рассматриваемом диапазоне температур.

Стоит отметить, что все приведенные ниже значения длины и толщины представлены в единицах длины когерентности в центре сверхпроводящего слоя при нулевой температуре  $\xi_{\text{cn}0}$ , а значения магнитного поля — в единицах  $H_{\xi_{\text{cn}0}}$  (см. (9)). В частности, толщина слоя  $d = D/\xi_{\text{cn}0}$ . Использование таких единиц облегчает сравнение свойств неоднородных сверхпроводящих слоев со свойствами однородных, в которых  $\eta = 0$ . Значения силы тока в рамках модели представляются

через  $H_I$  (8) и поэтому также, как и магнитное поле, выражены в единицах  $H_{\xi_{\text{cn}0}}$ . Плотность критического тока  $J_c$  определяется как  $H_I$  критического тока, деленное на толщину сверхпроводящего слоя. Итерационная процедура решения системы уравнений (5) и (6) с граничными условиями (9) и (11) аналогична описанной в работе [34].

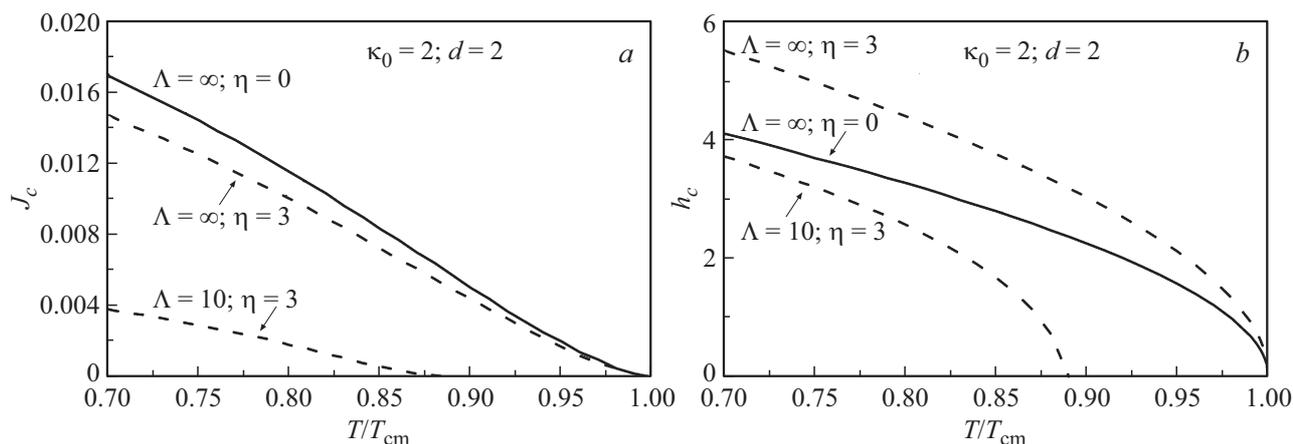
### 3. Результаты численных расчетов

На рис. 2, *a* представлены зависимости плотности критического тока  $J_c$  от температуры для сверхпроводящего слоя толщиной  $d = 2$ . Учет влияния границ производится через параметр  $\Lambda$ . Далее рассмотрены два случая: соседние слои не влияют на сверхпроводящий слой ( $\Lambda = \infty$ ), и соседние слои оказывают влияние ( $\Lambda = 10$ ). Значение длины экстраполяции  $\Lambda = 10$  взято для примера. Меньшие значения длины экстраполяции отвечают более сильному влиянию граничащих слоев на сверхпроводящее состояние слоя. Соответственно, в этом случае описанные ниже эффекты, связанные с влиянием слоев, будут проявляться сильнее. Сам же сверхпроводящий слой может быть однородным ( $\eta = 0$ , на рис. 2, *a* соответствует сплошной кривой) и неоднородным ( $\eta = 3$ , штриховые линии на рис. 2, *a*).

Рассмотрим сначала однородный и неоднородный слой без учета влияния граничащих слоев ( $\Lambda = \infty$ ,  $\eta = 0$  и 3). Как видно из графика, учет неоднородности ощутимо уменьшает величину плотности критического тока, при этом величина критической температуры не меняется, что согласуется с полученным ранее [36]. Если же учесть влияние граничащих слоев ( $\Lambda = 10$ ), то можно видеть, что значения плотности критического тока и критической температуры сильно уменьшаются относительно случая  $\Lambda = \infty$ .

На рис. 2, *b* представлены зависимости критического магнитного поля  $h_c$  от температуры для слоя толщиной  $d = 2$ . Рассматривались однородный слой ( $\eta = 0$ ), а также неоднородный слой ( $\eta = 3$ ) с учетом и без учета влияния граничных слоев. Наблюдается закономерность: чем больше степень неоднородности, тем выше величина критического магнитного поля. Данный результат для неоднородных пленок был получен в [36]. Если же учесть влияние граничащих слоев, то величина критического поля уменьшается по сравнению со случаем, где такое влияние не учитывается. Таким образом, неоднородность слоя и граничащие слои оказывают разнонаправленное влияние на критическое магнитное поле.

Описанные в литературе эксперименты показывают, что теория ГЛ дает хорошие оценки параллельного поверхности пленки критического магнитного поля, совпадающие с экспериментальными данными [27,37]. С другой стороны, оценки тока распаривания ГЛ существенно завышены относительно экспериментальных



**Рис. 2.** Зависимости: *a* — плотности критического тока  $J_c$  и *b* — критического магнитного поля  $h_c$  от отношения  $T/T_{cm}$  для однородных ( $\eta = 0$ , сплошные линии) и неоднородных ( $\eta = 3$ , штриховые линии) сверхпроводящих слоев толщиной  $d = 2$ . Представленные зависимости также отвечают как случаю влияния граничащих слоев ( $\Lambda = 10$ ), так и отсутствию влияния ( $\Lambda = \infty$ ). Параметр ГЛ в центре слоя  $\kappa_0 = 2$ ,  $T_{cm}$  — критическая температура массивного сверхпроводника.

данных даже для пленок, находящихся в безвихревом состоянии [38].

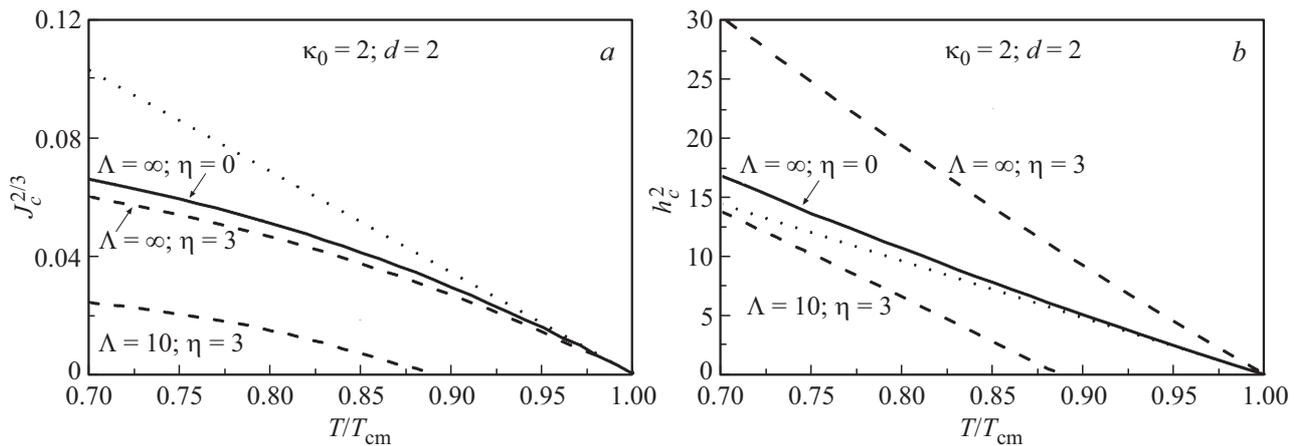
Обсудим количественное изменение критических параметров  $J_c$  и  $h_c$  под влиянием неоднородности и граничащих слоев. Одновременный учет в модели данных факторов приводит к ощутимому уменьшению величины рассчитанного критического тока (плотности критического тока) в сравнении со случаем однородного слоя/пленки без учета влияния границ (рис. 2, *a*). Таким образом, результаты описанных в настоящей работе расчетов показывают, что учет в модели одновременного влияния граничащих слоев и неоднородности слоя/пленки позволяет существенно улучшить оценку критического тока в рамках теории ГЛ относительно экспериментальных данных. Совместное влияние границ и неоднородности тонких пленок/слоев на их сверхпроводящее состояние могут быть одними из факторов, которыми объясняется существенное отличие тока распаривания ГЛ от измеренных значений критического тока для пленок/слоев из сверхпроводников Грода, а также пленок/слоев из сверхпроводников Прода, достаточно тонких, чтобы вихри не проникали в них. Выявление причин, приводящих к существенному завышению оценки критического тока в рамках теории ГЛ является важным аспектом для оценки точности расчетов критического тока реальных сверхпроводящих структур.

Дополнительно приведем информацию о величине измеряемой экспериментально плотности критического тока тонких сверхпроводящих пленок. Измеряемые значения зависят от множества факторов, например, температуры, при которой измеряется критический ток, материала, из которого сделана сверхпроводящая пленка/слой, технологии производства исследуемой структуры и т.д. В этой связи остановимся на тонких пленках из ниобия, параметры которых близки к тем, которые мы использовали в представленных в статье

расчетах. Системные исследования таких пленок были описаны в работах [39,40]. Авторы статьи [39] приводят измеренное для тонкой сверхпроводящей ниобиевой пленки ( $D \approx \xi(0)$ ) значение плотности критического тока  $7.5 \text{ MA/cm}^2$ . Измерения были проведены при температуре  $4.2 \text{ K}$ , в свою очередь, критическая температура пленки составляла  $6.7 \text{ K}$ . Сравнение измеренной плотности тока с рассчитанным значением плотности тока распаривания ( $15.9 \text{ MA/cm}^2$ ) показало более чем двукратное превышение последнего. Подобное отличие авторы связали с неточностью определения параметров структуры, используемых для расчета тока распаривания, а также образованием во время производства пленки тонкого несверхпроводящего металлического слоя на ее поверхности. В работе [40] авторы также связали уменьшение экспериментально определенных критических параметров тонких ниобиевых пленок относительно параметров для объемных образцов с наличием разупорядоченных металлических слоев на границе раздела сверхпроводник-подложка. Это согласуется с выводами, сделанными в настоящей работе.

Влияние граничащих слоев и неоднородности пленок/слоев на величину критического магнитного поля сравнимы по величине (рис. 2, *b*). Разнонаправленность этого влияния приводит к тому, что полученная оценка критического магнитного поля  $h_c$  не так сильно изменяется под действием описанных факторов.

В непосредственной близости от критической температуры  $T_c$  критические ток и поле зависят от температуры как  $(T_c - T)^{3/2}$  и  $(T_c - T)^{1/2}$  соответственно [27,31]. Представленные на рис. 3 зависимости  $J_c^{2/3}$  (*a*) и  $h_c^2$  (*b*) от температуры показывают, что для плотности критического тока такой закон выполняется при  $T > 0.95T_c$ , а для критического магнитного поля — при  $T > 0.9T_c$ . Также отметим, что на рассматриваемом интервале температур ( $T > 0.7T_{cm}$ ) при удалении от



**Рис. 3.** Зависимости  $J_c^{2/3}$  (a) и  $h_c^2$  (b) от отношения  $T/T_{cm}$  для однородных ( $\eta = 0$ , сплошные линии) и неоднородных ( $\eta = 3$ , штриховые линии) сверхпроводящих слоев толщиной  $d = 2$ . Представленные зависимости также отвечают как случаю влияния граничащих слоев ( $\Lambda = 10$ ), так и отсутствию влияния ( $\Lambda = \infty$ ). Параметр ГЛ в центре слоя  $\kappa_0 = 2$ ,  $T_{cm}$  — критическая температура массивного сверхпроводника. Пунктирные линии введены для того, чтобы показать отклонение сплошных линий от линейного закона.

$T_{cm}$  вид зависимости  $J_c(T/T_{cm})$  изменяется сильнее, чем вид зависимости  $h_c(T/T_{cm})$ . Вместе с тем, влияние граничащих слоев и неоднородности не изменяет вида обсуждаемых зависимостей. Более того, полученный вид температурной зависимости критического магнитного поля соответствует наблюдаемому на эксперименте [37].

#### 4. Заключение

В работе в рамках теории ГЛ сформулирована модель, позволяющая рассчитывать критические параметры сверхпроводящего слоя толщиной порядка длины когерентности  $\xi$  и лондоновской глубины проникновения  $\lambda$ . В модели учтены такие факторы, как влияние граничащих слоев и неоднородность слоя по толщине. Учет дополнительного члена в разложении свободной энергии и более точных температурных зависимостей коэффициентов разложения при выводе уравнений позволило расширить диапазон температур, где модель дает количественно точные оценки. Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом:

- показано, что учет влияния граничащих несверхпроводящих слоев и неоднородности на сверхпроводящее состояние слоя существенно корректирует оценку его плотности критического тока, приводя к ее уменьшению. Вместе с тем значение плотности критического тока, рассчитанное с учетом упомянутых факторов, ближе к измеряемому экспериментально, чем без их учета;

- в случае критического магнитного поля учет влияния границ и неоднородности сверхпроводящего слоя будет влиять на оценку  $h_c$ , но не так существенно, как в случае плотности критического тока;

- при удалении от критической температуры  $T_c$  в сторону низких температур вид модельной температур-

ной зависимости  $h_c$  изменяется незначительно, и строгое соответствие закону  $(T_c - T)^{1/2}$  соблюдается при  $T > 0.9T_c$ . В свою очередь, зависимость  $J_c(T)$  изменяется существенно, и закон  $(T_c - T)^{3/2}$  применим только при  $T > 0.95T_c$ . Неоднородность сверхпроводящего слоя и граничащие несверхпроводящие слои не изменяют вида температурных зависимостей  $J_c$  и  $h_c$ . Вид  $h_c(T)$  согласуется с наблюдаемым на эксперименте.

Таким образом, в настоящей статье показано, что учет таких факторов, как влияние граничащих слоев и неоднородности на сверхпроводящий слой толщиной порядка  $\xi$  и  $\lambda$  существенно улучшает оценку плотности критического тока в сравнении с экспериментальными данными, вместе с этим не так значительно изменяя оценку и качественное поведение температурной зависимости критического магнитного поля, которые и без учета этих факторов согласуются с данными экспериментов.

Результаты настоящей работы позволяют проводить более точные вычисления сверхпроводящих параметров для различных пленок и сверхпроводящих структур (например, структур S—I—S и S—N—S) из ниобия и содержащих ниобий материалов (NbC, Nb<sub>3</sub>Sn, NbTi), а также других похожих материалов. При использовании подходящих параметров расчетов описанная в работе методика может быть использована для моделирования структур из ВТСП-материалов с длиной когерентности порядка нескольких десятков нанометров (например, KВаBiO<sub>3</sub>).

#### Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема „Физика высокотемпературных сверхпроводников и новых квантовых материалов“, № 0023-2019-0005).

**Конфликт интересов**

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

**Список литературы**

- [1] B. Rosenstein, D. Li. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1, 109 (2010).
- [2] И.Н. Аскерзаде. *УФН* **176**, 10, 1025 (2006). [I.N. Askerzade. *Phys.-Usp.* **49**, 10, 1003 (2006)].
- [3] P.C. Hohenberg, A.P. Krekhov. *Phys. Rep.* **572**, 1 (2015).
- [4] I.S. Aranson, L. Kramer. *Rev. Mod. Phys.* **74**, 1, 99 (2002).
- [5] V. Garcia-Morales, K. Krischer. *Contemp. Phys.* **53**, 2, 79 (2012).
- [6] G.R. Berdiyrov, M.V. Milošević, F.M. Peeters. *Phys. Rev. B* **74**, 17, 174512 (2006).
- [7] M.L. Latimer, G.R. Berdiyrov, Z.L. Xiao, F.M. Peeters, W.K. Kwok. *Phys. Rev. Lett.* **111**, 6, 067001 (2013).
- [8] A.A. Kopasov, I.M. Tsar'kov, A.S. Mel'nikov. *Phys. Rev. B* **107**, 17, 174505 (2023).
- [9] A.R. Pack, J. Carlson, S. Wadsworth, M.K. Transtrum. *Phys. Rev. B* **101**, 14, 144504 (2020).
- [10] B. Oripov, S.M. Anlage. *Phys. Rev. E* **101**, 3, 033306 (2020).
- [11] A.I. Blair, D.P. Hampshire. *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **28**, 4, 8000205 (2018).
- [12] D.B. Liarte, M.K. Transtrum, J.P. Sethna. *Phys. Rev. B* **94**, 14, 144504 (2016).
- [13] B. Jones. Modeling defects in Nb3Sn Superconductor Resonance Cavities with Ginzburg–Landau Theory. Brigham Young University (2021).
- [14] N. Ng, R. Ahluwalia, D.J. Srolovitz. *Phys. Rev. B* **86**, 9, 094104 (2012).
- [15] F. Rogeri, R. Zadorosny, P.N. Lisboa-Filho, E. Sardella, W.A. Ortiz. *Supercond. Sci. Technol.* **26**, 7, 075005 (2013).
- [16] D.Y. Vodolazov, Y.P. Korneeva, A.V. Semenov, A.A. Korneev, G.N. Goltsman. *Phys. Rev. B* **92**, 10, 104503 (2015).
- [17] M. Shcherbatenko, Y. Lobanov, A. Semenov, V. Kovalyuk, A. Korneev, R. Ozhegov, A. Kazakov, B.M. Voronov, G.N. Goltsman. *Opt. Express* **24**, 26, 30474 (2016).
- [18] Y.P. Korneeva, D.Y. Vodolazov, A.V. Semenov, I.N. Florya, N. Simonov, E. Baeva, A.A. Korneev, G.N. Goltsman, T.M. Klapwijk. *Phys. Rev. Appl.* **9**, 6, 064037 (2018).
- [19] S.B. Kaplan, H. Engseth. *Supercond. Sci. Technol.* **20**, 11, S310 (2007).
- [20] R. Gimaev, Y. Spichkin, B. Kovalev, K. Kamilov, V. Zverev, A. Tishin. *Int. J. Refrig.* **100**, 1 (2019).
- [21] H. Hosono, K. Tanabe, E. Takayama-Muromachi, H. Kageyama, S. Yamanaka, H. Kumakura, M. Nohara, H. Hiramatsu, S. Fujitsu. *Sci. Technol. Adv. Mater.* **16**, 3, 033503 (2015).
- [22] M. Ranot, W.N. Kang. *Curr. Appl. Phys.* **12**, 2, 353 (2012).
- [23] D. Uglietti. *Supercond. Sci. Technol.* **32**, 5, 053001 (2019).
- [24] P.I. Bezotosnyi, K.A. Dmitrieva, S.Y. Gavrilkin, A.N. Lykov, A.Y. Tsvetkov. *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **31**, 3, 7500107 (2021).
- [25] П.И. Безотосный, К.А. Дмитриева, С.Ю. Гаврилкин, А.Н. Лыков, А.Ю. Цветков. Краткие сообщения по физике ФИАН **47**, 2, 20 (2020).
- [26] Е.А. Андришин, В.Л. Гинзбург, А.П. Силин. *УФН* **163**, 9, 105 (1993). [E.A. Andryushin, V.L. Ginzburg, A.P. Silin. *Phys.-Usp.* **36**, 9, 854 (1993).]
- [27] В.В. Шмидт. Введение в физику сверхпроводников. МЦНМО (2000).
- [28] А.Н. Лыков, А.Ю. Цветков, Г.Ф. Жарков. *ЖЭТФ* **128**, 2, 392 (2005). [A.N. Lykov, A.Yu. Tsvetkov, G.F. Zharkov. *JETP* **101**, 2, 341 (2005)].
- [29] S. Richter, S. Aswartham, A. Pukenas, V. Grinenko, S. Wurmehl, W. Skrotzki, B. Büchner, K. Nielsch, R. Hühne. *IEEE Trans. Appl. Supercond.* **27**, 4 Part 3, 7300304 (2017).
- [30] L. Xu, Z. Shu, S. Wang. *Phys. Rev. B* **57**, 18, 11654 (1998).
- [31] P.G. De Gennes. *Superconductivity of Metals and Alloys*. CRC Press (1966).
- [32] П.И. Безотосный, С.Ю. Гаврилкин, А.Н. Лыков, А.Ю. Цветков. Краткие сообщения по физике ФИАН **41**, 6, 3 (2014).
- [33] П.И. Безотосный, С.Ю. Гаврилкин, А.Н. Лыков, А.Ю. Цветков. Краткие сообщения по физике ФИАН **41**, 12, 26 (2014).
- [34] П.И. Безотосный, С.Ю. Гаврилкин, А.Н. Лыков, А.Ю. Цветков. *ФТТ* **57**, 7, 1277 (2015). [P.I. Bezotosnyi, S.Y. Gavrilkin, A.N. Lykov, A.Y. Tsvetkov. *Phys. Solid State* **57**, 7, 1300 (2015).]
- [35] A.N. Lykov, A.Y. Tsvetkov. *Phys. Rev. B* **76**, 14, 144517 (2007).
- [36] П.И. Безотосный, К.А. Дмитриева. *ФТТ* **63**, 8, 1035 (2021). [P.I. Bezotosnyi, K.A. Dmitrieva. *Phys. Solid State* **63**, 7, 1031 (2021)].
- [37] Н.П. Шабанова, С.И. Красносвободцев, А.В. Варлашкин, А.И. Головашкин. *ФТТ* **49**, 6, 990 (2007). [N.P. Shabanova, S.I. Krasnosvobodtsev, A.V. Varlashkin, A.I. Golovashkin. *Phys. Solid State* **49**, 6, 1040 (2007)].
- [38] В.Н. Губанков, К.К. Лихарев, Н.В. Павлов. *ФТТ* **14**, 11, 3186 (1972). [V.N. Gubankov, K.K. Likharev, N.B. Pavlov. *Phys. Solid State* **14**, 11, 3186 (1972)].
- [39] K. Ilin, D. Henrich, Y. Luck, Y. Liang, M. Siegel, D.Y. Vodolazov. *Phys. Rev. B* **89**, 18, 184511 (2014).
- [40] N. Pinto, S.J. Rezvani, A. Perali, L. Flammia, M.V. Milošević, M. Fretto, C. Cassiago, N. De Leo. *Sci. Rep.* **8**, 1, 4710 (2018).

Редактор Е.В. Толстякова