

03
Расчет обтекания колеблющегося цилиндра с соосным диском в головной части при малых числах Рейнольдса

© А.Н. Рябинин, Д.В. Кауфман

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: a.ryabinin@spbu.ru

Поступило в Редакцию 4 апреля 2023 г.
В окончательной редакции 5 июня 2023 г.
Принято к публикации 20 июня 2023 г.

Гипотеза искривленных моделей используется для расчета обтекания упруго закрепленного цилиндра, совершающего затухающие вращательные колебания в воздушном потоке. Изучено влияние на колебания диска, соосно закрепленного в головной части цилиндра. Принято, что единственной причиной затухания колебаний являются аэродинамические силы. Определены параметры, характеризующие затухание вращательных колебаний цилиндра, происходящих в потоке несжимаемой жидкости при числе Рейнольдса $Re = 750$. Оказалось, что наличие соосного диска в головной части приводит к более быстрому затуханию колебаний. Этот факт находится в качественном соответствии с результатами эксперимента по определению вращательных производных в аэродинамической трубе при больших числах Рейнольдса. Гипотеза квазистационарности применена при расчете поступательных колебаний цилиндра. Параметр, характеризующий затухание колебаний цилиндра с диском, по абсолютной величине немного превышает аналогичный параметр для цилиндра без диска, что соответствует результатам эксперимента.

Ключевые слова: поступательные и вращательные колебания, воздушный поток, цилиндр, соосный диск, уравнение Навье-Стокса.

DOI: 10.21883/JTF.2023.08.55970.69-23

Введение

В аэродинамике удобообтекаемых тел, таких, как крылья самолетов, для определения устойчивости движения используются производные коэффициентов аэродинамических сил и моментов по компонентам угловой и поступательной скорости [1]. Однако для плохо обтекаемых тел возможность использования таких производных даже в простейшей задаче затухания вращательных или поступательных колебаний неочевидна, поскольку при изменении угла наклона тела происходят резкие изменения аэродинамических сил и моментов, вызванные перестройкой обширных отрывных зон. Даже при малых отклонениях от положения равновесия может отсутствовать область линейной зависимости аэродинамической силы или момента сил от угловой или поступательной скорости. В настоящей работе исследуются затухающие колебания цилиндра без диска и цилиндра, снабженного соосным диском. Целью настоящей работы является описание колебаний тела, у которого зависимость сил и моментов от угловой и поступательной скорости нелинейна и может быть имеет разрывы. Задача решается численно с применением метода Крылова-Боголюбова.

Решение задачи обтекания вращающихся цилиндров проводится в рамках гипотезы искривленных тел. В задаче о поступательных колебаниях цилиндров используется гипотеза стационарности.

Метод искривленных моделей впервые применен в работе Г.А. Гуржиенко [2]. Г.А. Гуржиенко работал по

данной теме по предложению профессора В.П. Ветчинкина, написавшего предисловие к работе. Принцип фиктивного искривления ранее нашел применение в работах Г. Глауэрта при учете влияния вращения тонкого крылового профиля на его подъемную силу [2]. В основе метода искривленных моделей лежит идея о том, что движение тела по кривой траектории, в котором присутствуют поступательные и вращательные составляющие, можно заменить поступательным движением искривленного тела. При этом местные углы атаки в соответствующих точках тела сохраняют одинаковые значения. Если изготовить искривленную модель тела, то можно в аэродинамической трубе измерить аэродинамические коэффициенты сил и моментов. Метод искривленных моделей был осуществлен в задаче движения дирижабля по дуге окружности. Г.А. Гуржиенко получил, что осевая линия искривленного тела должна принимать форму цепной линии.

Координаты искривленной оси x и z связаны формулой

$$z = R_0 \cos \alpha_0 \left[\operatorname{ch} \left(\frac{x}{R_0 \cos \alpha_0} \right) - 1 \right],$$

где R_0 и α_0 — радиус дуги окружности, по которой движется тело, и угол, который ось тела составляет с вектором относительной скорости газа.

Если $x/(R_0 \cos \alpha_0) \ll 1$, то цепная линия близка к параболе и к дуге окружности радиуса $R_0 \cos \alpha_0/2$.

Метод искривленных моделей прошел апробацию на примере прямоугольного крыла с профилем NASA

0012 [3]. Испытания крыла, проведенные на ротативной машине в ЦНИИ им. А.Н. Крылова, и эксперименты, выполненные в аэродинамической трубе с искривленной моделью в ЦАГИ, дали близкие результаты как в линейной, так и в нелинейной областях зависимостей коэффициентов подъемной силы и момента тангажа от угла атаки и угловой скорости.

В статье [4] метод искривленных моделей применялся в численном расчете двумерного обтекания аэродинамического профиля NASA 0012, совершающего установившееся вращение.

В дальнейшем метод был распространен на расчет гиперзвукового обтекания тел [5]. В работе [6] с помощью численных расчетов с применением метода искривленных моделей производилось определение нестационарных аэродинамических характеристик цилиндрических моделей в дозвуковом и сверхзвуковом потоке.

1. Формулировка проблемы. Численный метод

Рассматривалось обтекание кругового цилиндра, совершающего в потоке воздуха угловые колебания по гармоническому закону с небольшой амплитудой θ_0 и частотой Ω . Отношение длины цилиндра к диаметру $\Lambda = L/D = 9$. В равновесном положении ось цилиндра совпадает с направлением скорости набегающего потока. Изучалось влияние диска, расположенного в головной части цилиндра. Диск имеет диаметр $d < D$ и соосно закреплен на расстоянии g от переднего торца цилиндра. Известно, что такой соосный диск перед цилиндром существенно снижает лобовое сопротивление [7–9]. В момент времени t , когда его ось составляет с направлением скорости набегающего потока малый угол $\theta = \theta_0 \sin \Omega t$, а угловая скорость есть $\omega = \dot{\theta} = \Omega \theta_0 \cos \Omega t = \omega_0 \cos \Omega t$. Рассмотрим условие равенства локальных углов атаки вращающегося прямого и искривленного неподвижного цилиндров, примененное к оси цилиндра. Пусть вращающийся цилиндр ориентирован горизонтально. На рис. 1 приведены изображения вращающегося цилиндра (слева) и искривленного неподвижного цилиндра (справа).

Определим локальный угол между осью вращающегося с угловой скоростью ω цилиндра и скоростью переднего торца относительно среды. Относительная скорость v_r является суммой двух векторов. Один вектор

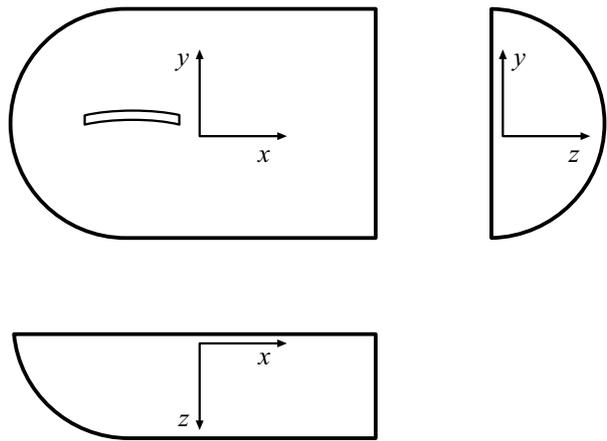


Рис. 2. Расчетная область с половиной цилиндра, разрезанного пополам плоскостью симметрии.

равен по абсолютной величине скорости набегающего потока v и направлен горизонтально. Вторым представляет собой вектор, вызванный вращением цилиндра относительно оси, проходящей через его центр. Он направлен вверх на рис. 1, а его длина равна $\omega L/2$. Угол между осью цилиндра и относительной скоростью переднего торца определяется формулой $\tan \alpha = \omega L/(2v)$. Этот угол должен совпадать с углом между относительной скоростью v_r и осью искривленного цилиндра на рис. 1 справа. Для искривленного цилиндра угол равен отношению длины дуги AB к радиусу дуги R . Полагаем, что углы малы. Оставляем только члены первого порядка малости: $\alpha \approx \tan \alpha$, $v_r = v$. Сравнивая выражения для угла α вращающегося и искривленного цилиндров, получаем выражение для определения радиуса изгиба R оси искривленного цилиндра:

$$\frac{\omega L}{2v} = \frac{L}{2R}. \tag{1}$$

Проведенные рассуждения справедливы для любой другой точки оси цилиндра. Из формулы (1) следует, что $R = v/\omega$. Чтобы выяснить, как меняются аэродинамические коэффициенты момента тангажа угловой скорости во время одного периода колебания, мы задали несколько углов наклона $\theta_i \leq \theta_0$, и для соответствующих им значений угловой скорости ω_i и радиуса кривизны R_i построили расчетные сетки.

Симметрия задачи позволила ограничиться рассмотрением обтекания половины цилиндра. Форма расчетного объема представляла собой комбинацию четверти сферы и половины цилиндра. Расчетные сетки были сгенерированы с использованием свободно распространяемой программы Gmsh [10].

На рис. 2 изображена в трех проекциях схема расчетной области. Передняя граница расчетного объема и верхняя его граница находятся на расстоянии 4 м от центра цилиндра. Задняя граница расчетного объема находится на расстоянии 8 м от центра цилиндра. Длина

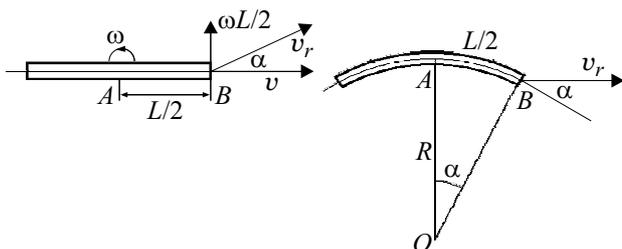


Рис. 1. К определению радиуса искривления оси цилиндра.

цилиндра $L = 0.9$ м, его диаметр $D = 0.1$ м. Соосный диск в головной части цилиндра имел диаметр $d = 0.6D$ и находился на расстоянии $g = 0.5D$ от переднего торца. Расчетная сетка гибридная. Элементы, примыкающие к стенке, представляют собой шестигранники, толщина которых в геометрической прогрессии уменьшается по мере приближения к стенке. Остальная часть расчетного объема заполнена неструктурированной сеткой с элементами, имеющими форму тетраэдров, призм и пирамид. Основная часть расчетов проводилась с сетками, насчитывающими от 650 до 800 тысяч элементов. Часть расчетов осуществлена с сетками, содержащими от 380 до 1300 тысяч элементов, с целью установления сеточной независимости. Сетки в этих расчетах измельчались или огрублялись в районе пограничного слоя и в других областях расчетного объема.

Численные расчеты проводились с помощью свободно распространяемого пакета программ SU2 [11], версия 7.2.1 „Blackbird“. Уравнения Навье-Стокса при числе Рейнольдса $Re = 750$ решались методом конечных объемов. Использовался решатель для несжимаемой среды. Число Куранта-Фридрихса-Леви для мельчайшей сетки не превосходило четырех.

На внешней границе расчетного объема задавались направление и скорость воздушного потока. Плотность газа, вязкость и число Прандтля полагались постоянными. Визуализация результатов осуществлялась с помощью свободно распространяемой программы Paraview.

Амплитуда колебаний принималась равной $\theta_0 = 0.1$ рад. Безразмерная частота колебаний $Sh = \Omega L / (2\pi\nu)$ принимала два значения — 0.286 и 0.057, что соответствует амплитуде колебаний безразмерной угловой скорости $\omega^* = \omega_0 L / \nu$ 0.18 и 0.036 соответственно.

Числами подобия в работе являются число Рейнольдса Re , удлинение цилиндра L/D , безразмерный диаметр диска d/D , отношение промежутка между цилиндром и диском к диаметру цилиндра g/D , амплитуда вращательных колебаний, безразмерная амплитуда колебаний угловой скорости. Таким образом, результаты относятся к широкому классу объектов, у которых указанные числа подобия совпадают. Пропорции цилиндра с диском L/D , d/D , g/D выбраны из следующих соображений: существуют экспериментальные результаты по затуханию вращательных колебаний, полученные с цилиндрами и дисками таких пропорций (при других числах Рейнольдса); упруго закрепленные цилиндры более малого удлинения вступают в поток в колебания с постоянной амплитудой, затухающие колебания не характерны для цилиндров малого удлинения; выбранные размеры соосного диска и расстояние от цилиндра до диска обеспечивают существенное уменьшение лобового сопротивления. Расчет обтекания при больших числах Рейнольдса представляет, в частности, практический интерес для моделирования переноса груза под вертолетом на внешней подвеске. В этом случае требуются расчеты турбулентных течений. В самом простом варианте в

расчете турбулентных течений используются уравнения Навье-Стокса, осредненные по Рейнольдсу. Для замыкания используются дополнительные уравнения, моделирующие турбулентность. Однако такой подход в случае плохо обтекаемых тел может приводить к неправильным результатам [12]. Для правильного моделирования необходимо применять вихререзающие подходы, требующие значительных вычислительных ресурсов, поэтому мы ограничились только рассмотрением обтекания при малых числах Рейнольдса, следуя в этом примере статьи [9].

2. Обтекание цилиндра, совершающего вращательные колебания

Рассмотрим колебания угловой скорости цилиндра с безразмерной амплитудой $\omega^* = 0.18$. На рис. 3 представлено распределение скоростей воздушного потока вблизи цилиндра в плоскости симметрии искривленного цилиндра. Цилиндр находится в потоке воздуха, угол наклона цилиндра $\theta = 3.17^\circ$. Этому углу соответствует радиус искривления оси цилиндра $R = 6$ м.

На верхнем изображении цилиндр без диска, на нижнем — цилиндр с соосно закрепленным диском. Сравнение картин обтекания позволяет выявить закономерность: диск существенно уменьшает размер отрывных зон, примыкающих к цилиндру вблизи головной части. Уменьшение размера отрывных зон при установке соосного диска наблюдается для всего набора углов наклона цилиндра и угловых скоростей. Изменение размера отрывных зон и обтекания кормовой части цилиндра сказывается на изменении распределения давления по поверхности цилиндра и изменении коэффициента момента. Эти изменения при разных углах обтекания приводят к разным последствиям. В частности, для угла наклона и отрицательной угловой скорости, соответствующих рис. 3, коэффициент момента меняется незначительно.

Пусть цилиндр имеет момент инерции I_z и может вращаться вокруг оси OZ , проходящей через центр масс. Цилиндр упруго закреплен, и его движение, представляющее собой колебания, затухающие под действием аэродинамического момента, описывает следующее

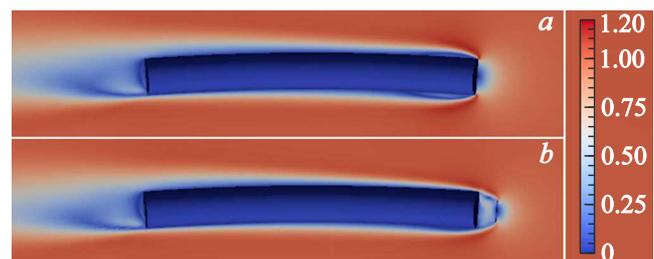


Рис. 3. Относительные скорости потока v/v_∞ вблизи цилиндра без диска (а) и цилиндра с диском (б).

уравнение:

$$I_z \ddot{\theta} + k\theta = sL \frac{\rho_0 v^2}{2} m_z(\theta, \omega), \quad (2)$$

где k — жесткость упругой подвески, m_z — аэродинамический коэффициент момента, s — площадь поперечного сечения цилиндра, ρ_0 — плотность воздуха.

Введем обозначения

$$\mu = sL \frac{\rho_0 v^2}{2I_z}, \quad \Omega^2 = \frac{k}{I_z}.$$

Уравнение (2) запишется в виде

$$\ddot{\theta} + \Omega^2 \theta = \mu m_z(\theta, \omega). \quad (3)$$

В реальной упругой подвеске всегда присутствует трение, которое способствует затуханию колебаний. Однако в вычислительном эксперименте существует возможность не учитывать сопротивление подвески и считать аэродинамические силы единственной причиной затухания колебаний.

Параметр $\mu \ll \Omega^2$. Это означает, что момент аэродинамических сил мал по сравнению с моментом упругих сил. Тогда колебания будут близки к гармоническим, а малый аэродинамический момент будет вызывать медленное изменение амплитуды колебаний θ_0 и медленное изменение сдвига фаз φ :

$$\theta = \theta_0 \cos \psi, \quad \psi = \Omega t + \varphi.$$

Получить уравнения для амплитуды и фазы можно, применив метод Крылова-Боголюбова в первом приближении [13]:

$$\frac{d\theta_0}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} m_z(\psi) \sin \psi d\psi, \quad (4)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \Omega - \frac{\mu}{2\pi\theta_0\Omega} \int_0^{2\pi} m_z(\psi) \cos \psi d\psi. \quad (5)$$

Интеграл в уравнении (4) можно разбить на сумму двух интегралов с пределами от 0 до π и от π до 2π . Затем совершим замену переменных $\theta = \theta_0 \cos \psi$. После простейших преобразований получим следующее уравнение для амплитуды вращательных колебаний:

$$\frac{d\theta_0}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi\Omega\theta_0} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} [m_{z1}(\theta) - m_{z2}(\theta)] d\theta = -\frac{\mu}{2\pi\Omega\theta_0} S_\theta, \quad (6)$$

где m_{z2} и m_{z1} — коэффициенты момента на промежутках $0 < \psi < \pi$ и $\psi < \varphi < 2\pi$ соответственно, S_θ — площадь замкнутого контура, который представляет собой график зависимости аэродинамического коэффициента момента m_z от угла наклона θ . Этот график представлен на рис. 4.

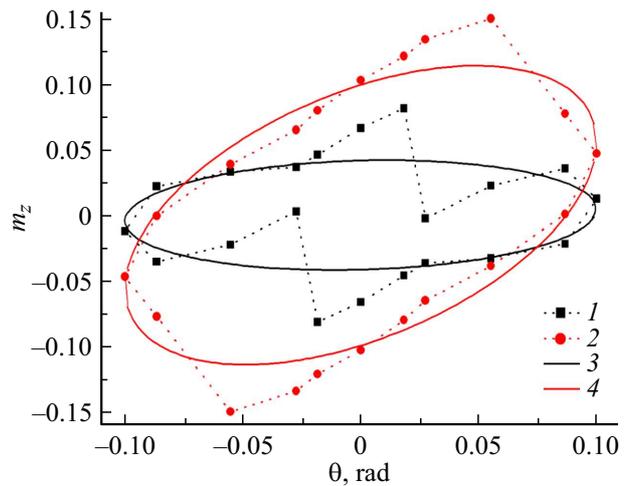


Рис. 4. Зависимость коэффициента момента m_z от угла наклона θ : 1, 3 — цилиндр без диска, 2, 4 — цилиндр с диском; 1, 2 — расчет, 2, 4 — эквивалентные эллипсы. Амплитуда безразмерной угловой скорости — 0.18.

Если колебания затухающие, то площадь, охватываемая замкнутой линией, пропорциональна работе, затрачиваемой аэродинамическими силами в течение одного периода колебаний на уменьшение полной энергии колебательной системы.

Таким же образом можно построить график зависимости коэффициента момента от безразмерной угловой скорости цилиндра $\xi = \omega L/v$. Площадь S_ω , охватываемая замкнутым контуром на этом графике, пропорциональна изменению частоты колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \Omega - \frac{\mu v}{2\pi\Omega^2\theta_0^2 L} \int_{-\omega_0 L/v}^{\omega_0 L/v} [m_{z3}(\xi) - m_{z4}(\xi)] d\xi \\ &= \Omega - \frac{\mu v}{2\pi\Omega^2\theta_0^2 L} S_\omega, \quad \xi = \frac{L}{R}, \end{aligned} \quad (7)$$

где m_{z3} и m_{z4} — коэффициенты момента на промежутках $\pi/2 < \psi < 3\pi/2$ и $3\pi/2 < \varphi < 5\pi/2$ соответственно.

Обычно затухание колебаний описывают вращательной производной коэффициента момента m_z^ω . Полагают, что при малых углах θ справедливо линейное приближение

$$m_z = m_z^\theta \theta + m_z^\omega \xi. \quad (8)$$

В случае плохо обтекаемого тела диапазон углов вблизи нуля, в котором справедливо линейное приближение (8), либо очень мал, либо отсутствует, так как зависимость терпит разрыв. Обобщим понятие вращательной производной на случай нелинейной зависимости коэффициента момента от угла и угловой скорости на диапазоны этих величин, в которых эта нелинейность существенна, и введем параметры m_z^θ и m_z^ω , которые описывают затухание колебаний в некоторых диапазонах углов и угловых скоростей. В общем случае эти параметры не совпадают с вращательными производными.

Подставляя выражение (8) в уравнение (4) и учитывая, что $\theta = \theta_0 \cos \psi$, $\omega = -\theta_0 \Omega \sin \psi$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_0}{dt} &= -\frac{\mu}{2\pi\Omega} \int_0^{2\pi} \left(m_z^\theta \theta_0 \cos \psi - m_z^\omega \theta_0 \Omega \sin \psi \frac{L}{v} \right) \sin \psi d\psi \\ &= \frac{\mu}{2} \theta_0 m_z^\omega \frac{L}{v}. \end{aligned} \tag{9}$$

Подстановка выражения (8) в уравнение (5) дает

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \Omega - \frac{\mu}{2\pi\Omega\theta_0} \int_0^{2\pi} \left(m_z^\theta \theta_0 \cos \psi \right. \\ &\quad \left. - m_z^\omega \theta_0 \Omega \sin \psi \frac{L}{v} \right) \cos \psi d\psi = \Omega - \frac{\mu}{2\Omega} m_z^\theta. \end{aligned} \tag{10}$$

Сравнение уравнений (6) и (7) с уравнениями (9) и (10) дает выражения для параметров m_z^ω и m_z^θ :

$$\begin{aligned} m_z^\omega &= -S_\theta \frac{v}{\pi\Omega\theta_0^2 L} = -S_\theta \frac{R}{\pi\theta_0 L}, \\ m_z^\theta &= S_\omega \frac{v}{\pi\Omega\theta_0^2 L} = S_\omega \frac{R}{\pi\theta_0 L}. \end{aligned} \tag{11}$$

Параметры m_z^ω и m_z^θ , определенные по формулам (11), характеризуют процесс затухания колебаний, а в том случае, когда линейная зависимость (8) справедлива, совпадают с вращательными производными коэффициента момента.

Площади замкнутых контуров на рис. 4, составленных из отрезков прямых, соединяющих точки, полученные в результате расчета, равны площадям эллипсов, нанесенных на рис. 4. Площадь эллипса, соответствующего цилиндру с соосным диском, больше площади эллипса, соответствующего цилиндру без диска. Это означает, что колебания цилиндра с диском будут затухать быстрее. Этот факт находится в качественном согласии с результатами, полученными в ходе эксперимента, проведенного при больших числах Рейнольдса [14].

Во всех рассмотренных случаях существует угол наклона цилиндра, при котором резко меняется коэффициент момента. Наиболее отчетливо это выражено для медленных колебаний, в которых безразмерная амплитуда

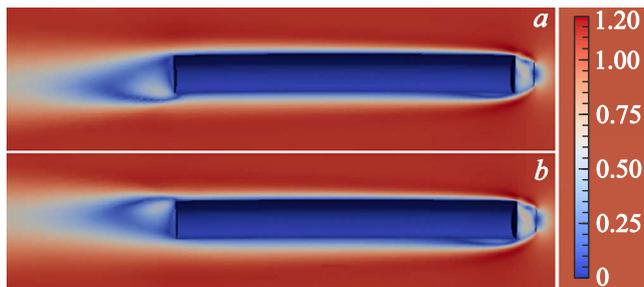


Рис. 5. Относительные скорости потока v/v_∞ для двух близких углов наклона цилиндра с диском: a — угол наклона 0.5° , b — угол наклона 1.05° .

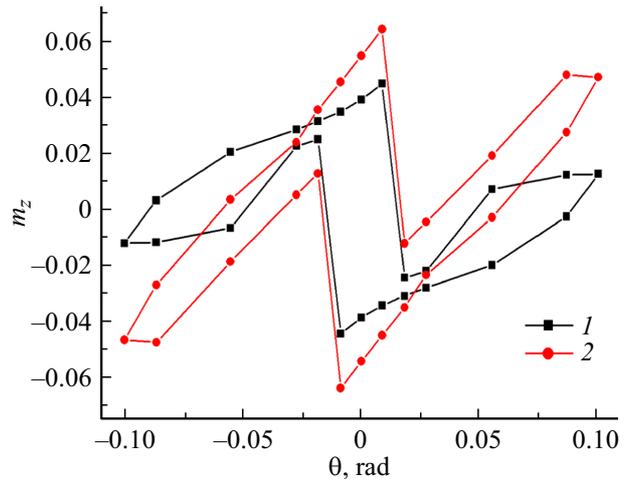


Рис. 6. Зависимость коэффициента момента m_z от угла наклона θ : 1 — цилиндр без диска, 2 — цилиндр с диском. Амплитуда безразмерной угловой скорости — 0.036.

Коэффициенты m_z^ω , m_z^θ

Коэффициенты	Коэффициенты m_z^ω , m_z^θ	
	Быстрые колебания	Медленные колебания
m_z^ω без диска	-0.23	-0.42
m_z^ω с диском	-0.55	-0.56
m_z^θ без диска	0.046	0.015
m_z^θ с диском	0.56	0.35

угловой скорости составляет $\omega^* = 0.036$. На рис. 5 показаны картины обтекания цилиндра с диском при двух близких углах наклона -1.05 и -0.5° . Радиусы искривления оси цилиндра при этом составляют 25.4 и 25.1 m соответственно. На двух изображениях рис. 5 картины обтекания существенно различаются. При изменении угла наклона от -0.5 до -1.05° область пониженного давления в кормовой части перемещается с нижней поверхности цилиндра на верхнюю. Коэффициент момента m_z при этом меняет знак и резко возрастает с -0.064 до 0.025.

Зависимость коэффициента момента m_z от угла наклона θ цилиндра с диском, которая для быстрых колебаний представляла собой фигуру, близкую к эллипсу, для медленных колебаний превращается в зигзагообразную кривую. Она представлена на рис. 6.

Площади замкнутых кривых, относящихся к цилиндрам без диска и с соосным диском, как и в случае быстрых колебаний, различаются. Оценка площадей замкнутых контуров позволяет сделать вывод, что соосный диск ускоряет затухание вращательных колебаний цилиндра.

В таблицу сведены значения вычисленных параметров.

Гипотеза искривленных тел является приближенной для неустановившегося вращательного движения тел. В частности, в настоящей работе не учитывается, что возмущения потока, создаваемые головной частью ци-

линдра, доходят до других фрагментов цилиндра не мгновенно, а в течение какого-то промежутка времени. Если меняется угол наклона тела, то учет времени прихода возмущений в случае удобообтекаемых тел осуществляется введением еще одной вращательной производной m_z^θ . В колебательных движениях тела демпфирующий эффект описывается суммой двух вращательных производных $m_z^\omega + m_z^\theta$. Для самолета вращательная производная m_z^θ составляет от 40 до 60% от m_z^ω [15]. Таким образом, в настоящей работе оценка демпфирующего эффекта занижена, и полученные результаты имеют качественный характер.

3. Обтекание цилиндра, совершающего поступательные колебания

Для моделирования поступательных колебаний плохо обтекаемых тел часто используется квазистационарное приближение, при котором предполагается, что аэродинамическая нормальная сила, действующая на тело, зависит лишь от мгновенных углов атаки [16]. Коэффициенты нормальной силы можно определять в аэродинамической трубе, либо рассчитывать численно.

Пусть затухающие поступательные колебания цилиндра происходят вдоль оси OY , направленной перпендикулярно вектору скорости набегающего потока v и оси цилиндра, y — координата центра масс цилиндра. При поступательных колебаниях тангенс местного угла атаки α представляет собой отношение вертикальной скорости тела, взятой с обратным знаком, к скорости набегающего потока. Для малого угла атаки

$$\alpha \approx \tan \alpha = -\frac{\dot{y}}{v}.$$

Если коэффициент нормальной силы связан линейной зависимостью с безразмерной скоростью движения тела вдоль оси OY $\frac{\dot{y}}{v}$, то в рамках квазистационарного приближения колебательная производная $c_y^{\dot{y}}$ равна вращательной производной c_y^α , взятой с обратным знаком:

$$c_y = c_y^{\dot{y}} \frac{\dot{y}}{v} = -c_y^\alpha \alpha.$$

Численно были определены значения коэффициента нормальной силы c_y в зависимости от угла атаки α для неискривленного цилиндра с диском и без. Результаты представлены на рис. 7. Точки на графике существенно отклоняются от линейных зависимостей, проходящих через начало координат. Отклонения максимальны в окрестности начала координат. Поэтому мы оценили эффективные коэффициенты, описывающие затухание поступательных колебаний, используя метод, изложенный выше для вращательных колебаний.

Пусть гармонические поступательные колебания $y = y_0 \cos \psi_y$, где $\psi_y = \Omega_y t + \phi_y$, происходят с амплитудой, при которой максимальный мгновенный угол

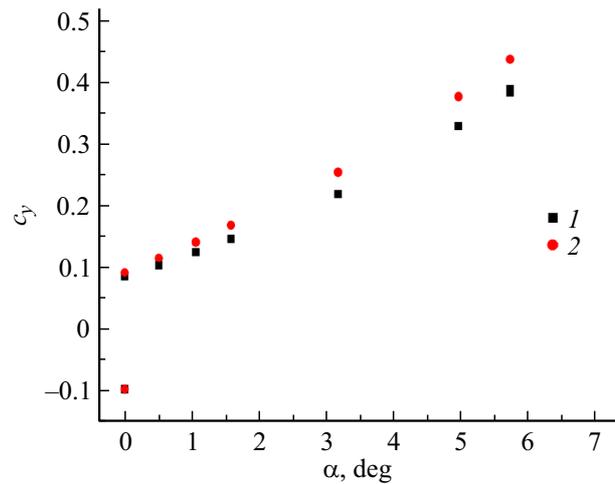


Рис. 7. Зависимость коэффициента нормальной силы c_y от угла атаки α : 1 — цилиндр без диска, 2 — цилиндр с диском.

атаки $\alpha_0 = 0.05 \text{ rad}$. Тогда, применяя метод Крылова-Боголюбова, получим, что эффективная вращательная производная определяется выражением

$$c_y^\alpha = \frac{v}{y_0 \Omega_y \pi} S_y = \frac{1}{\alpha_0 \pi} S_y,$$

где S_y — площадь замкнутого контура, который образует зависимость коэффициента нормальной силы c_y от безразмерной координаты $\eta = y/y_0$.

Коэффициенты c_y^α равны 2.41 для цилиндра без диска и 2.76 для цилиндра с диском. Присутствие диска увеличивает вращательную производную c_y^α . Этот факт находится в качественном соответствии с результатами экспериментального определения вращательной производной при больших числах Рейнольдса [17].

Гипотеза стационарности (квазистационарная гипотеза) для описания поступательных колебаний плохо обтекаемых тел также является приближенной, но имеются сведения, что она дает результаты, совпадающие с экспериментальными [16].

Заключение

В результате расчетов определены коэффициенты, характеризующие затухание в потоке вращательных и поступательных колебаний упруго закрепленного цилиндра с соосно закрепленным диском и без диска в головной части. Эти коэффициенты являются обобщением аэродинамических производных, характеризующих влияние аэродинамических сил на затухание колебаний удобообтекаемых тел. В расчетах использовались гипотеза искривленных моделей и квазистационарная гипотеза. Предложен метод, в котором численное решение уравнений Навье-Стокса осуществляется совместно с применением метода Крылова-Боголюбова. Рассматривались быстрые и медленные колебания. Оказалось, что

коэффициенты, описывающие затухание вращательных колебаний, зависят от амплитуды колебаний угловой скорости цилиндра. Коэффициенты, описывающие затухание поступательных колебаний, зависят от амплитуды поступательных колебаний. Наличие соосного диска способствует более быстрому затуханию колебаний.

Благодарности

Исследования проведены с использованием оборудования ресурсного центра Научного парка СПбГУ „Вычислительный центр“.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] С.М. Белоцерковский, Б.К. Скрипач, В.Г. Табачников. *Крыло в нестационарном потоке газа* (Наука, М., 1971)
- [2] Г.А. Гуржиенко. Тр. ЦАГИ, **182**, 1 (1934).
- [3] И.Б. Федорова. Тр. ЦАГИ, **940**, 123 (1964).
- [4] А.В. Волков, С.В. Ляпунов, А.Н. Храбров. Ученые записки ЦАГИ, **34** (34), 51 (2003).
- [5] Ю.М. Липницкий, А.В. Красильников, А.Н. Покровский, В.Н. Шманенков. *Нестационарная аэродинамика баллистического полета* (Физматгиз, М., 2003)
- [6] А.Ю. Галактионов, М.С. Антипова. Лесной вестник, **6**, 163 (2015).
- [7] K. Koenig, A. Roshko. *J. Fluid Mech.*, **156**, 167 (1985). DOI: 10.1017/S002211208500204X
- [8] И.А. Белов. *Взаимодействие неравномерных потоков с преградами* (Машиностроение, Л., 1983)
- [9] С.В. Гувернюк, С.А. Исаев, А.Г. Судаков. *ЖТФ*, **68** (11), 138 (1998).
- [10] C. Geuzaine, J.-F. Remacle. *Intern. J. Numerical Methods in Eng.*, **79** (11), 1309 (2009). DOI: 10.1002/nme.2579
- [11] F. Palacios, J. Alonso, K. Duraisamy, M. Colonno, J. Hicken, A. Aranake, A. Campos, S. Copeland, T. Economon, A. Lonkar, T. Lukaczyk, T. Taylor. *AIAA paper*, **2013**, 0287 (2013). DOI: 10.2514/6.2013-287
- [12] P.R. Spalart *Prog. Aerosp. Sci.*, **74**, 1 (2015). DOI: 10.1016/j.paerosci.2014.12.004
- [13] Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (Наука, М., 1974), 4-е изд. [Пер. на англ. 1-го изд.: N.N. Bogoliubov, Y.A. Mitropolski. *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations* (Gordon and Breach, NY, 1961)]
- [14] А.Н. Рябинин, Д.В. Кауфман. *Вестн. СПб. ун-та. Математика. Механика. Астрономия*, **8** (66), 158 (2021). DOI: 10.21638/spbu01.2021.114 [Пер. на англ.: A.N. Ryabinin, D.V. Kaufman. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics*, **55** (4), 497 (2022). DOI: 10.1134/S1063454122040197]
- [15] И.В. Остославский. *Аэродинамика самолета* (Гос. изд-во оборонной промышленности, М., 1957)
- [16] Э. Симиу, Р. Сканлан. *Воздействие ветра на здания и сооружения* (Стройиздат, М., 1984). [Пер. с англ.: E. Simiu, R. Scanlan. *Wind Effect on Structures: An*

Introduction to Wind Engineering (John Wiley & Sons, NY, 1978)]

- [17] Д.В. Кауфман, А.Н. Рябинин. В сб. *Материалы XIV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли* (АММАГ'2022) (Изд-во МАИ, М., 2022), с. 129.