

05,12

# Управление бистабильностью в системе двух одноосных спин-трансферных осцилляторов с полевой связью и RLC-нагрузкой

© П.В. Купцов

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Саратов, Россия

E-mail: kuprav@mail.ru

Поступила в Редакцию 17 апреля 2023 г.

В окончательной редакции 17 апреля 2023 г.

Принята к публикации 11 мая 2023 г.

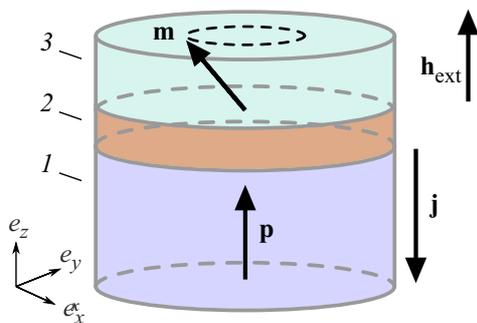
Рассматриваются два связанных через магнитные поля одноосных спин-трансферных осциллятора с RLC-нагрузкой. Осцилляторы могут демонстрировать как синхронные так и не синхронные колебания. Имеется диапазон параметров в котором наблюдается бистабильность, когда эти два режима сосуществуют. Показано, что если настроить RLC-цепочки таким образом, что после включения ток в них монотонно и медленно убывает от больших отрицательных значений до нуля, можно добиться „забывания“ спин-трансферными осцилляторами своих произвольных начальных состояний. Это обеспечивает контролируемый запуск колебаний: бистабильность может быть подавлена как в пользу синхронного так и не синхронного режимов.

**Ключевые слова:** прецессия магнитного момента, связанные осцилляторы, дипольное взаимодействие, бистабильность, управление начальными условиями.

DOI: 10.21883/FTT.2023.06.55648.05H

## 1. Введение

Спин-трансферный осциллятор — это наноразмерное устройство, которое состоит из трех слоев: два ферромагнитных слоя разделены изолирующим слоем из немагнитного материала, см. рис. 1. Нижний слой, который называют закрепленным, имеет достаточно большую толщину и поэтому его намагниченность  $\mathbf{p}$  остается постоянной. Верхний слой тонкий. Его называют свободным, так как его намагниченность  $\mathbf{m}$  может меняться. Через эти слои течет ток, направление которого показано на рисунке вектором плотности тока  $\mathbf{j}$ . Кроме того может быть приложено внешнее магнитное поле  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$ . Электроны проходят сначала через закрепленный слой с постоянной намагниченностью, в результате чего ток приобретает спиновую поляризацию. При попадании



**Рис. 1.** Устройство спин-трансферного осциллятора. Цифрами обозначены: 1 — закрепленный слой; 2 — изолирующий слой; 3 — свободный слой.

тока в верхний свободный слой его поляризация разрушается, но при этом за счет эффекта передачи спинового момента возникает прецессия вектора намагниченности слоя  $\mathbf{m}$ . Это приводит к генерации маломощного микроволнового излучения. Более подробное описание физики этого явления можно найти, например, в работах [1,2].

Первые экспериментальные наблюдения колебаний в спин-трансферных осцилляторах были представлены в работах [3,4]. Теоретическая модель этого осциллятора описывается уравнением Ланату–Лифшица–Гильберта–Слончевского, которое впервые было получено независимо Слончевским [5] и Бергером [6]. В безразмерной форме это уравнение имеет вид [1]:

$$\dot{\mathbf{m}} - \alpha \mathbf{m} \times \dot{\mathbf{m}} = -\mathbf{m} \times \mathbf{h}_{\text{eff}} + \frac{\beta}{1 + c_p(\mathbf{m} \cdot \mathbf{p})} \mathbf{m} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{p}). \quad (1)$$

Здесь „ $\cdot$ “ и „ $\times$ “ обозначают, соответственно, скалярное и векторное произведение;  $\mathbf{m}$  — вектор намагниченности свободного слоя нормированный на единицу,  $\|\mathbf{m}\| = 1$ ;  $\mathbf{p}$  — также нормированная на единицу намагниченность постоянного слоя,  $\|\mathbf{p}\| = 1$ ;  $\alpha$  — параметр Гильберта, отвечающий за затухание прецессии; параметр  $\beta$  пропорционален величине плотности тока  $\mathbf{j}$ . Эффективное магнитное поле  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  равно сумме внешнего поля, полей размагничивания и анизотропии (более подробное описание этого можно найти в работах [1,7]).

Можно считать что свободный слой представляет собой плоский эллипсоид, кристаллическая анизотропия одноосная, и ось совпадает с одной из осей эллипсоида. Отметим, что это упрощение физически релевантно и достаточно часто используется, см. например уже

упоминавшуюся работу [1], а также целый ряд других: [8–12]. В этом случае эффективное поле может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{h}_{\text{eff}} = \mathbf{h}_{\text{ext}} - \mathcal{D}\mathbf{m}, \quad (2)$$

где  $\mathcal{D}$  — диагональный тензор, отвечающий за анизотропию и размагничивание, а  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$  — внешнее поле. Коэффициент  $c_p$  в уравнении (1) зависит от свойств материала осциллятора, а также от степени поляризации, приобретаемой током в закреплённом слое. Он может принимать значения в диапазоне  $-1 < c_p < 1$  [8]. В теоретических исследованиях его часто принимают равным нулю, см. например [8–12]. Мы также будем считать что  $c_p = 0$ . Достаточно легко проверить, что для уравнения (1) справедливо тождество  $\dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{m} = 0$ , т. е. норма вектора  $\mathbf{m}$  сохраняется. Мы всегда будем задавать начальные условия в виде единичного вектора, так что  $\|\mathbf{m}(t)\| = 1$  для любого  $t$ .

В общем случае система, описываемая уравнением (1), имеет несколько выделенных направлений: ось тока  $\mathbf{j}$ , ось намагниченности закреплённого слоя  $\mathbf{p}$ , ось внешнего поля  $\mathbf{h}_{\text{ext}}$ , оси, связанные с анизотропией и размагничиванием, учитываемые через тензор  $\mathcal{D}$ . Интересный и физически реализуемый частный случай имеет место, когда все эти выделенные направления ориентированы так, что система симметрична относительно оси  $z$  [1]. Тогда диагональные элементы тензора  $\mathcal{D}$  становятся равными  $(0, 0, 1)$ , эффективное поле приобретает вид  $\mathbf{h}_{\text{eff}} = h_z \mathbf{e}_z - m_z \mathbf{e}_z$ , где  $h_z$  — единственная ненулевая компонента внешнего поля вдоль  $z$ , а уравнение (1) сводится к значительно более простой форме:

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= m_z A m_x + B m_y, \\ \dot{m}_y &= -B m_x + m_z A m_y, \\ \dot{m}_z &= A(m_z^2 - 1), \\ A &= \alpha \frac{m_z - h_z + \beta/\alpha}{1 + \alpha^2}, \\ B &= \frac{m_z - h_z - \beta\alpha}{1 + \alpha^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $m_x, m_y, m_z$  — компоненты вектора  $\mathbf{m}$ .

Эта система уравнений подробно исследована в книге [1]. Видно, что она распадается на две подсистемы: уравнение для  $m_z$  не зависит от  $m_x$  и  $m_y$ . При этом уравнения для  $m_x$  и  $m_y$  линейны относительно этих переменных. Нетривиальное поведение возникает благодаря тому, что  $m_z$  описывается кубическим уравнением и входит в уравнения для  $m_x$  и  $m_y$  как параметр.

Уравнение для  $m_z$  имеет три неподвижные точки:  $m_z = \pm 1$  и  $m_z = h_z - \beta/\alpha$ . Всегда одна из них устойчива, а две другие неустойчивы. В силу условия  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$  в неподвижных точках  $m_z = \pm 1$  компоненты  $m_x$  и  $m_y$  равны нулю, т. е. колебания отсутствуют. Условия их устойчивости следующие:

$$\begin{aligned} m_z = -1 & \text{ устойчива при } h_z - \beta/\alpha < -1, \\ m_z = 1 & \text{ устойчива при } h_z - \beta/\alpha > 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Колебания имеют место, когда устойчива третья неподвижная точка

$$m_z = h_z - \beta/\alpha \text{ устойчива при } -1 < h_z - \beta/\alpha < 1. \quad (5)$$

В этой точке решение системы (3) имеет вид

$$\begin{aligned} m_x &= \sqrt{1 - a^2} \cos(\omega t + f), \\ m_y &= \sqrt{1 - a^2} \sin(\omega t + f), \quad m_z = a. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $f$  — произвольная начальная фаза, которая зависит от выбора начальных условий и в силу осевой симметрии может быть устранена поворотом осциллятора вокруг оси  $z$ . Собственная частота колебаний  $\omega$  и стационарная амплитуда  $a$  задаются формулами

$$\omega = \beta/\alpha, \quad (7)$$

$$a = h_z - \beta/\alpha. \quad (8)$$

Отметим, что (6) — это точное решение системы уравнений (3). Оно чисто синусоидальное, без гармоник, в силу того, что подсистема для колебательных переменных  $m_x$  и  $m_y$  линейна.

При рассмотрении взаимодействия спин-трансферных осцилляторов связь между ними вводится обычно двумя способами: либо через общий ток, либо через магнитные поля. В первом случае осцилляторы включают последовательно или параллельно друг другу и их взаимодействие происходит благодаря тому, что сопротивление каждого осциллятора зависит от косинуса угла между намагниченностями верхнего и нижнего слоев  $\cos \theta = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{p})$  (эффект гигантского магнитного сопротивления) [8,9,11,12].

В настоящей работе мы рассматриваем второй случай, когда связь между осцилляторами осуществляется через магнитные поля. Если рассматривать магнитное поле в дипольном приближении, то член отвечающий за связь добавляется как поправка к эффективному полю  $\mathbf{h}_{\text{eff}}$  пропорциональная намагниченности. В случае двух осцилляторов эффективное поле (2) первого осциллятора приобретает вид

$$\mathbf{h}_{\text{eff},1} = \mathbf{h}_{\text{ext}} - \mathcal{D}\mathbf{m}_1 + \varepsilon\mathbf{m}_2. \quad (9)$$

Эффективное поле второго осциллятора записывается аналогично. Так как поле одиночного осциллятора достаточно мало, естественно считать, что и величина связи между осцилляторами  $\varepsilon$  мала.

Такой тип связи исследовался в работе [13] экспериментально и в [14,15] теоретически. В статье [16] выводится амплитудное уравнение для связанных спин-трансферных осцилляторов и помимо прочего рассматривается полевая связь.

Основной интерес при изучении связанных спин-трансферных осцилляторов вызывает вопрос об условиях их синхронизации. Как известно, это явление типично для связанных колебательных систем [17]. В случае

спин-трансферных осцилляторов, наряду с фундаментальным интересом к этому явлению, большое значение имеет прикладной аспект: одиночный осциллятор генерирует маломощное излучение [18] и очевидный способ получить более высокую мощность состоит в том, чтобы сформировать массив осцилляторов, колеблющихся синхронно с минимальной дисперсией разностей фаз.

В работах [8,9] анализируются эффекты синхронизации массива осцилляторов, связанных общим током. Описан эффект мультистабильности, когда полностью синхронные колебания сосуществуют с несинхронными режимами: квазипериодическими или хаотическими. Кластеризация и химерные состояния в массиве осцилляторов с общим током рассматривается в работах [11,12].

В работе [19] была рассмотрена система двух одноосных спин-трансферных осцилляторов с полевой связью в ситуации, когда через каждый из них течет постоянный ток, причем предполагается, что токи независимы друг от друга и постоянны. Было показано, что имеется диапазон значений величины связи между осцилляторами, в котором сосуществуют два режима колебаний: фазовая синхронизация и несинхронные колебания. Получены аналитические оценки для границ области существования этих режимов в пространстве параметров, выполнен численный анализ области параметров с бистабильностью. Также получена формула для постоянной разности фаз осцилляторов, устанавливающейся в режиме их фазовой синхронизации. Согласно этой формуле на пороге возникновения синхронного режима разность фаз равна  $\pi/2$  и уменьшается с ростом величины связи. Отметим, что аналогичные закономерности поведения фазового сдвига отмечаются в работе [20], в которой исследуется синхронизация магнитных вихрей в обменно-связанных ферромагнитных дисках.

В этой работе мы рассматриваем два одноосных спин-трансферных осциллятора с поевым взаимодействием, когда параллельно каждому из них подключена RLC-цепочка. Так как электрическое сопротивление спин-трансферного осциллятора зависит от направления вектора намагниченности  $\mathbf{m}$ , вместе с RLC-цепочкой осциллятор образует колебательный контур с активным элементом. Будет показано, что в такой системе, также как при отсутствии RLC-цепочек, возможна бистабильность. Будет предложен способ управления ею — подбором параметров RLC-цепочек и начальных напряжений на конденсаторах можно добиться, чтобы осцилляторы всегда выбирали одно из двух сосуществующих решений, либо синхронное, либо несинхронное.

## 2. Уравнения спин-трансферных осцилляторов с RLC-цепочками и полевой связью

Спин-трансферный осциллятор имеет электрическое сопротивление  $r$ , которое зависит от косинуса угла

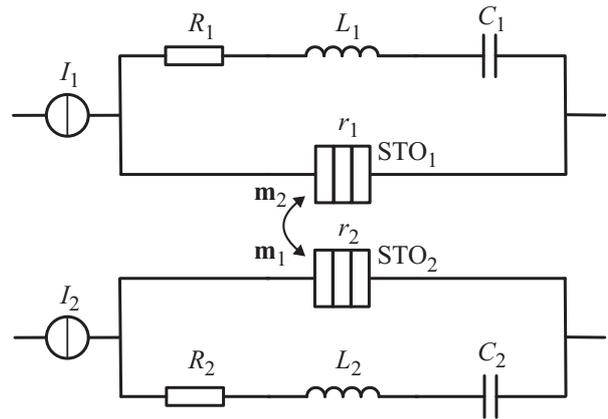


Рис. 2. Схема включения двух спин-трансферных осцилляторов с RLC-цепочками и взаимодействием посредством магнитных полей.

между вектором его намагниченности  $\mathbf{m}$  и намагниченностью закрепленного слоя [21].

$$r = \frac{r_p + r_{ap}}{2} \left( 1 - (\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}) \left( \frac{r_{ap} - r_p}{r_{ap} + r_p} \right) \right). \quad (10)$$

Здесь  $r_p$  — минимальное сопротивление, которое осциллятор имеет, когда вектора  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{p}$  параллельны, а  $r_{ap}$  — максимально возможное сопротивление, которое достигается при антипараллельной ориентации этих векторов.

Рассмотрим два спин-трансферных осциллятора, параллельно каждому из которых включена RLC-цепочка, а сами осцилляторы расположены рядом друг с другом и взаимодействуют посредством магнитных полей, рис. 2.

Уравнение для каждого из контуров имеет вид

$$L_i C_i \Gamma^2 \dot{U}_i + (R_i + r_i) C_i \Gamma \dot{U}_i + U_i - I_i r_i = 0, \quad (11)$$

где  $U_i$  — напряжение на конденсаторе, а  $\Gamma$  — множитель, который вводится, чтобы согласовать время контура и перенормированное время спин-трансферного осциллятора. Это уравнение удобно переписать в виде системы двух уравнений для безразмерных напряжения  $u_i$  и тока  $w_i$  следующим образом:

$$\dot{u}_i = \chi_i w_i,$$

$$\dot{w}_i = \frac{\Omega_i^2}{\chi_i} \left( (1 - \kappa_i m_{i,z})(1 - w_i) - u_i - \rho_i w_i \right). \quad (12)$$

Здесь учтено, что  $(\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}) = m_{i,z}$  в силу того, что  $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ . Сделаны следующие замены:

$$w_i = \frac{\dot{U}_i C_i \Gamma}{I_i}, \quad u_i = \frac{2U_i}{I_i(r_{i,ap} + r_{i,p})}, \quad \rho_i = \frac{2R_i}{r_{i,ap} + r_{i,p}},$$

$$\Omega_i = \frac{1}{\Gamma \sqrt{L_i C_i}}, \quad \chi_i = \frac{2}{C_i \Gamma (r_{i,ap} + r_{i,p})}, \quad \kappa_i = \frac{r_{i,ap} - r_{i,p}}{r_{i,ap} + r_{i,p}}. \quad (13)$$

Отметим, что аналогичным образом безразмерные уравнения контура с включенными в него спин-трансферными осцилляторами записываются в работе [12].

Так как в безразмерном уравнении спин-трансферного осциллятора параметр  $\beta$  пропорционален току, уравнение с учетом подключения контура получается из (3) заменой  $\beta \rightarrow \beta(1-w)$ . Члены, отвечающие за связь между осцилляторами, остаются такими же как и при отсутствии контура. Соответствующие формулы совпадают с выведенными в работе [19]. В итоге для  $i$ -ого осциллятора связанного с осциллятором  $j$  по полю имеем

$$\begin{aligned} \dot{m}_{i,x} &= m_{i,z}A_i m_{i,x} + B_i m_{i,y} \\ &+ \frac{\varepsilon}{1+\alpha_i^2} \{ \alpha_i [m_{j,x} - (\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j) m_{i,x}] - m_{i,y} m_{j,z} + m_{j,y} m_{i,z} \}, \\ \dot{m}_{i,y} &= -B_i m_{i,x} + m_{i,z}A_i m_{i,y} \\ &+ \frac{\varepsilon}{1+\alpha_i^2} \{ \alpha_i [m_{j,y} - (\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j) m_{i,y}] + m_{i,x} m_{j,z} - m_{j,x} m_{i,z} \}, \\ \dot{m}_{i,z} &= A_i (m_{i,z}^2 - 1) \\ &+ \frac{\varepsilon}{1+\alpha_i^2} \{ \alpha_i [m_{j,z} - (\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j) m_{i,z}] - m_{i,x} m_{j,y} + m_{j,x} m_{i,y} \}, \\ A_i &= \alpha_i \frac{m_{i,z} - h_z + \beta_i (1-w_i) / \alpha_i}{1+\alpha_i^2}, \\ B_i &= \frac{m_{i,z} - h_z - \beta_i (1-w_i) \alpha_i}{1+\alpha_i^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь  $m_{i,x}$ ,  $m_{i,y}$ ,  $m_{i,z}$  — компоненты вектора  $\mathbf{m}_i$ , а индекс  $j$  подразумевает другой осциллятор, т.е. когда  $i = 1$  нужно положить  $j = 2$  и наоборот.

### 3. Управление согласованным стартом колебаний в спин-трансферных осцилляторах

Случай, когда в системе двух одноосных спин-трансферных осцилляторов с полевой связью RLC-цепочки отсутствуют, был подробно рассмотрен в работе [19]. Показано что при определенных значениях  $\varepsilon$  и  $\beta_i$  (сила связи и собственные частоты, соответственно) возможен режим полной синхронизации. Колебания происходят в плоскости  $xu$ , они синфазны, а компоненты  $m_z$  совпадают друг с другом и остаются постоянными. Существует область в пространстве параметров, в которой с синхронным режимом сосуществует несинхронный. В этом режиме частоты колебаний осцилляторов в плоскости  $xu$  близки к собственным, а компоненты  $m_z$  колеблются с частотами, близкими к разности собственных частот.

Чтобы оценить, как на динамику влияет подключение RLC-цепочек, рассмотрим сначала один из контуров (12), считая  $m_z$  постоянным параметром. Такое рассмотрение имеет смысл в силу того, что  $m_z$  всегда меняется достаточно медленно.

Неподвижной точка этого уравнения имеет вид

$$w = 0, \quad u = 1 - \kappa m_z, \quad (15)$$

а собственные значения можно найти по формуле

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\Omega}{2\chi} \left( \Omega(\rho - \kappa m_z + 1) \pm \sqrt{\Omega^2(\rho - \kappa m_z + 1)^2 - 4\chi^2} \right). \quad (16)$$

Так как  $m_z \leq 1$ ,  $\kappa < 1$ ,  $\rho > 0$ ,  $\chi > 0$ ,  $\Omega > 0$ , выражение  $(\rho - \kappa m_z + 1)$  всегда положительно и в контуре всегда присутствует затухание. При выполнении условия

$$\Omega(\rho - \kappa m_z + 1) < 2\chi \quad (17)$$

собственные числа (16) образуют комплексно сопряженную пару с отрицательной вещественной частью  $\text{Re } \lambda = -\frac{\Omega}{2\chi} (\Omega(\rho - \kappa m_z + 1))$ . Когда

$$\Omega(\rho - \kappa m_z + 1) > 2\chi, \quad (18)$$

оба собственных числа вещественные и отрицательные.

Рассмотрим сначала случай, когда выполняется неравенство (17). Зададим параметры осцилляторов равенствами (19),

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.001, \quad \beta_1 = 0.0055, \\ \beta_2 &= 0.005, \quad \varepsilon = 0.0005, \quad h_z = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

а параметры контуров — формулами (20a). Для удобства сравнения приведем здесь же другие значения параметров контуров, формулы (20b) и (20c), которые рассматриваются ниже.

$$\rho = 1, \quad \Omega = 1.5, \quad \chi_{1,2} = 1, \quad \kappa = 0.3, \quad (20a)$$

$$\rho = 10, \quad \Omega = 0.1, \quad \chi_1 = 0.02, \quad \chi_2 = 0.01, \quad \kappa = 0.3, \quad (20b)$$

$$\rho = 10, \quad \Omega = 0.1, \quad \chi_1 = 0.01, \quad \chi_2 = 0.02, \quad \kappa = 0.3. \quad (20c)$$

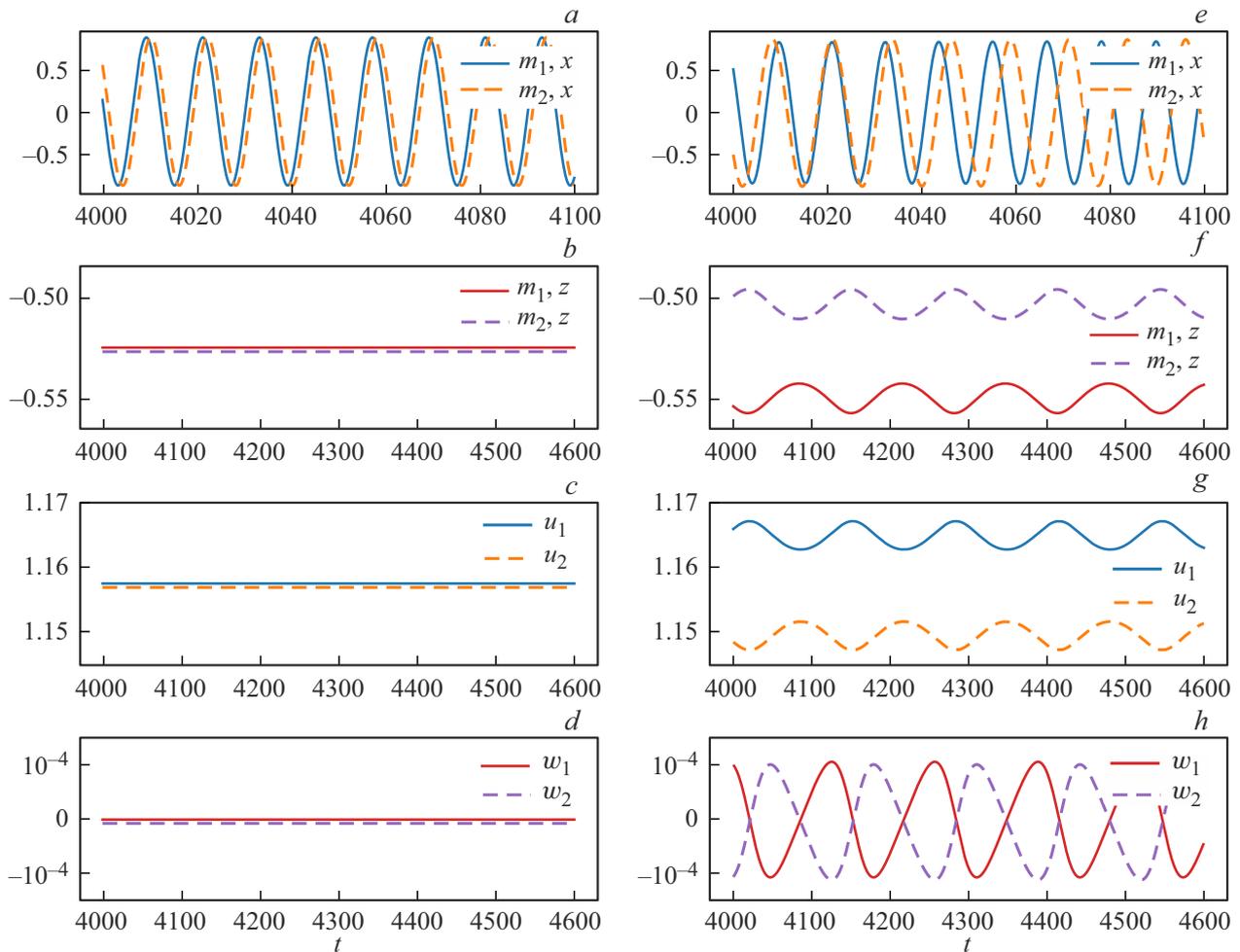
Можно проверить, что при выбранных числовых значениях, условие (17) выполняется независимо от величины  $m_z$ . Поведение системы (12), (14) при этом качественно аналогично случаю отсутствия RLC-цепочек, рассмотренному в работе [19]. В частности, система может демонстрировать бистабильность, когда вид решения зависит от выбора начальных условий.

Это иллюстрирует рис. 3. Здесь на рис. 3, *a, b, c* и *d* (панели слева) начальные условия для осцилляторов задаются формулами (21a), а на рис. 3, *e, f, g* и *h* (панели справа) — формулами (21b),

$$\mathbf{v}_1 = (0.1, -0.1, 0.7), \quad \mathbf{v}_2 = (-0.2, 0.2, -0.7), \quad (21a)$$

$$\mathbf{v}_1 = (0.1, -0.1, -0.7), \quad \mathbf{v}_2 = (-0.2, 0.2, 0.7). \quad (21b)$$

Видно, что в первом случае компоненты  $x$  осцилляторов колеблются синхронно с практически нулевым сдвигом по фазе, см. рис. 3, *a*. Компоненты  $y$  совершают такие же колебания и поэтому не показаны. Компоненты  $z$  осцилляторов, а также напряжения и токи в RLC-цепочках остаются постоянными, см. рис. 3, *b, c* и *d*. Во втором случае осцилляторы не синхронизированы, см. рис. 3, *e*. При этом компоненты  $z$  осцилляторов, а также



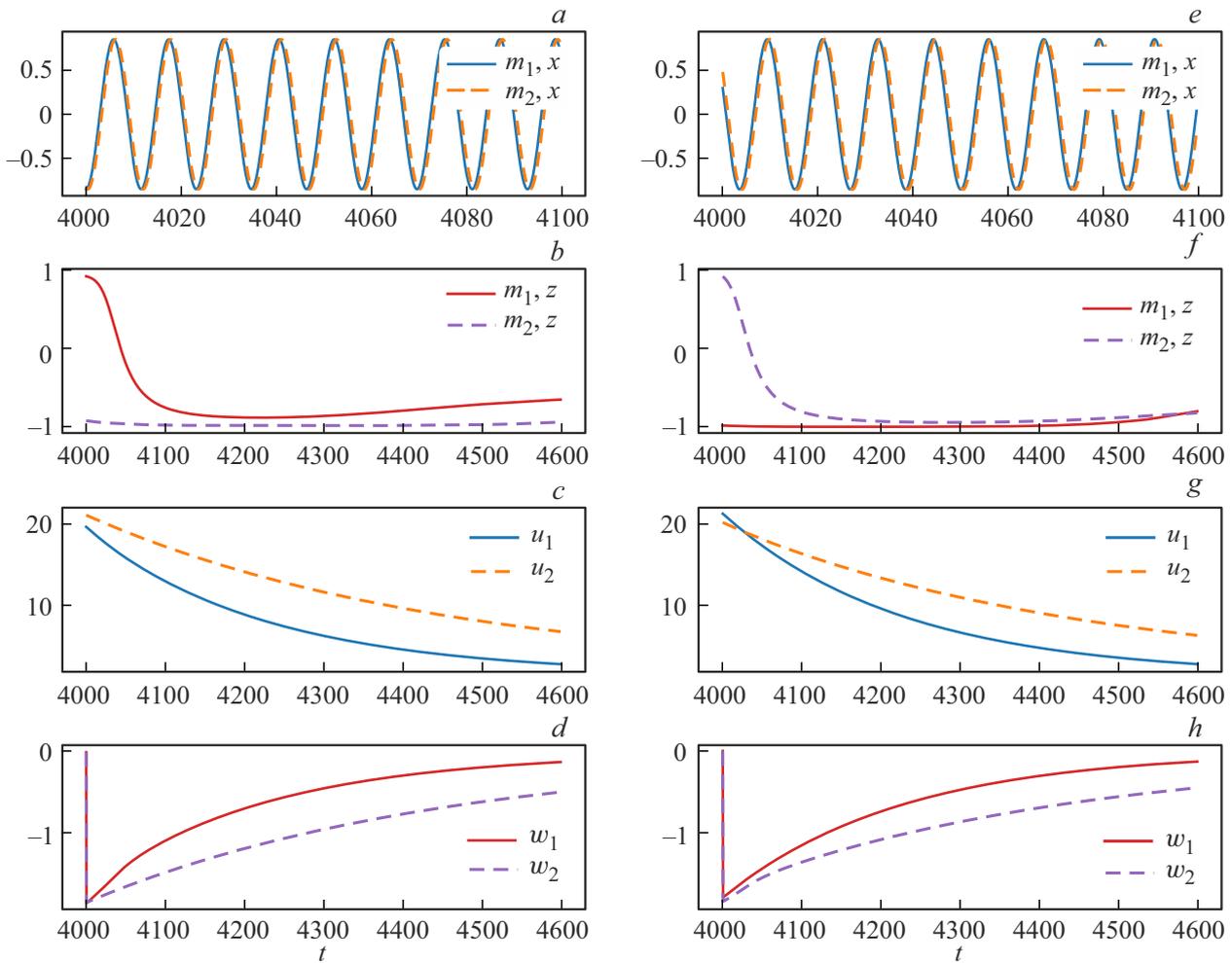
**Рис. 3.** Бистабильность в системе (12), (13): панели (a)–(d) — синхронизация, панели (e)–(h) — несинхронный режим. Решения получены при одних и тех же параметрах (19), (20a), но с разными начальными условиями. Начальные условия берутся как  $\mathbf{m}_{1,2} = \mathbf{v}_{1,2}/\|\mathbf{v}_{1,2}\|$ , где  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  для панелей (a)–(d) заданы равенствами (21a), а для (e)–(h), — равенствами (21b). Начальные токи и напряжения заданы контуров в обоих случаях заданы как  $w_1 = w_2 = 0$ ,  $u_1 = 1.1$ ,  $u_2 = 1.2$  соответственно.

токи и напряжения совершают медленные колебания с небольшой амплитудой, рис. 3,  $f, g$  и  $h$ .

Рассмотрим теперь случай вещественных собственных чисел  $\lambda_{\pm}$ , т.е. когда выполняется неравенство (18). Параметры контуров можно подобрать так, что  $\lambda_-$  будет иметь большое по величине отрицательное значение. Но при этом  $\lambda_+$  может быть очень малой по модулю отрицательной величиной. Это приведет к тому, что ток через RLC-цепочку будет затухать очень медленно. В частности, этому условию отвечают параметры (20b) и (20c) независимо от  $m_z$ . Токи контуров фигурируют в уравнениях (14) как поправки к параметрам  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , от значений которых зависит устойчивость неподвижных точек осцилляторов см. (4) и (5). Это можно использовать для управления запуском колебаний в спин-трансферных осцилляторах.

Идея состоит в задании начальных условий для RLC-цепочек, таких чтобы на старте  $w$  имело большое отрицательное значение. Это можно обеспечить пред-

варительно заряжая конденсаторы  $C_1$  и  $C_2$  до достаточно больших значений. Тогда за счет разрядки они дадут на начальных этапах высокий отрицательный ток в цепи. Вследствие этого эффективное значение параметра  $\beta(1-w)$  будет смещено, и неподвижные точки осцилляторов  $m_{1,2,z} = -1$  станут устойчивыми, см. (4). Следовательно, осцилляторы будут „забывать“ свои начальные условия, которые могут быть произвольными, и выходить на решения  $m_{1,2,x} = m_{1,2,y} = 0$ ,  $m_{1,2,z} = -1$ . Осцилляторы успеют достаточно приблизиться к этим решениям при условии, что затухание в RLC-цепочках достаточно мало, чего мы и добиваемся подбором их параметров. Когда ток  $w$  становится достаточно малым, неподвижная точка на полюсах снова становится неустойчивой, и в осцилляторах начинается раскачка колебаний. Существенно, что она всегда будет начинаться с одних и тех же начальных условий. Однако имеется тонкий момент. Как было показано в работе [11], выбор системой одного из двух реше-



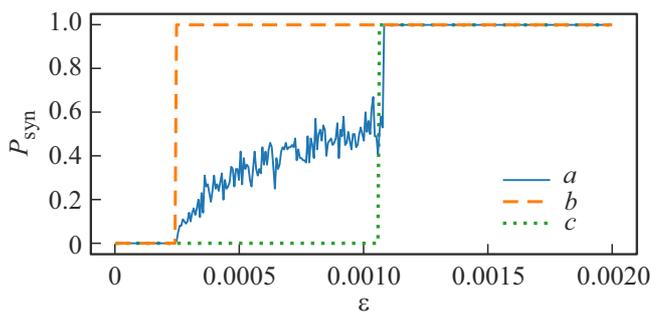
**Рис. 4.** Управление бистабильностью в системе (12), (14). Параметры осцилляторов совпадают с параметрами на рис. 2, а для RLC-цепочек заданы параметры (20b). Начальные значения для  $\mathbf{m}_{1,2}$  те же, что и на рис. 2. Начальные значения токов контуров  $w_{1,2} = 0$ , начальные значения напряжений  $u_{1,2} = 20 \pm 2\xi$ , где  $\xi \in (0, 1)$  — случайное число.

ний в режиме бистабильности зависит от того, какое из начальных значение будет больше,  $m_{1,z}$  или  $m_{2,z}$ . Поэтому если RLC-цепочки идентичные, осцилляторы начнут выходить из неподвижной точки практически одновременно. Это снова приведет к бистабильности: выбор решения теперь будет зависеть от того, какой из двух осцилляторов в силу случайных факторов начал колебаться чуть раньше другого. Чтобы устранить это, нужно сделать RLC-цепочки немного разными. Тогда один из осцилляторов всегда будет немного опережать другой, что устраним неопределенность. Это приведет к тому, что бистабильность будет отсутствовать.

Это иллюстрирует рис. 4. Параметры на этом рисунке таковы, что решение не зависит от выбора начальных условий. Но для сравнения этот рисунок построен с теми же начальными условиями для  $\mathbf{m}_{1,2}$ , что и на рис. 3. Начальные токи, также как и на рис. 3 равны нулю,  $w_{1,2} = 0$ , а стартовые напряжения задаются как  $u_{1,2} = 20 \pm 2\xi$ , где  $\xi \in (0, 1)$  — случайное число. Из рис. 4, d и h видно что это дает достаточно большой

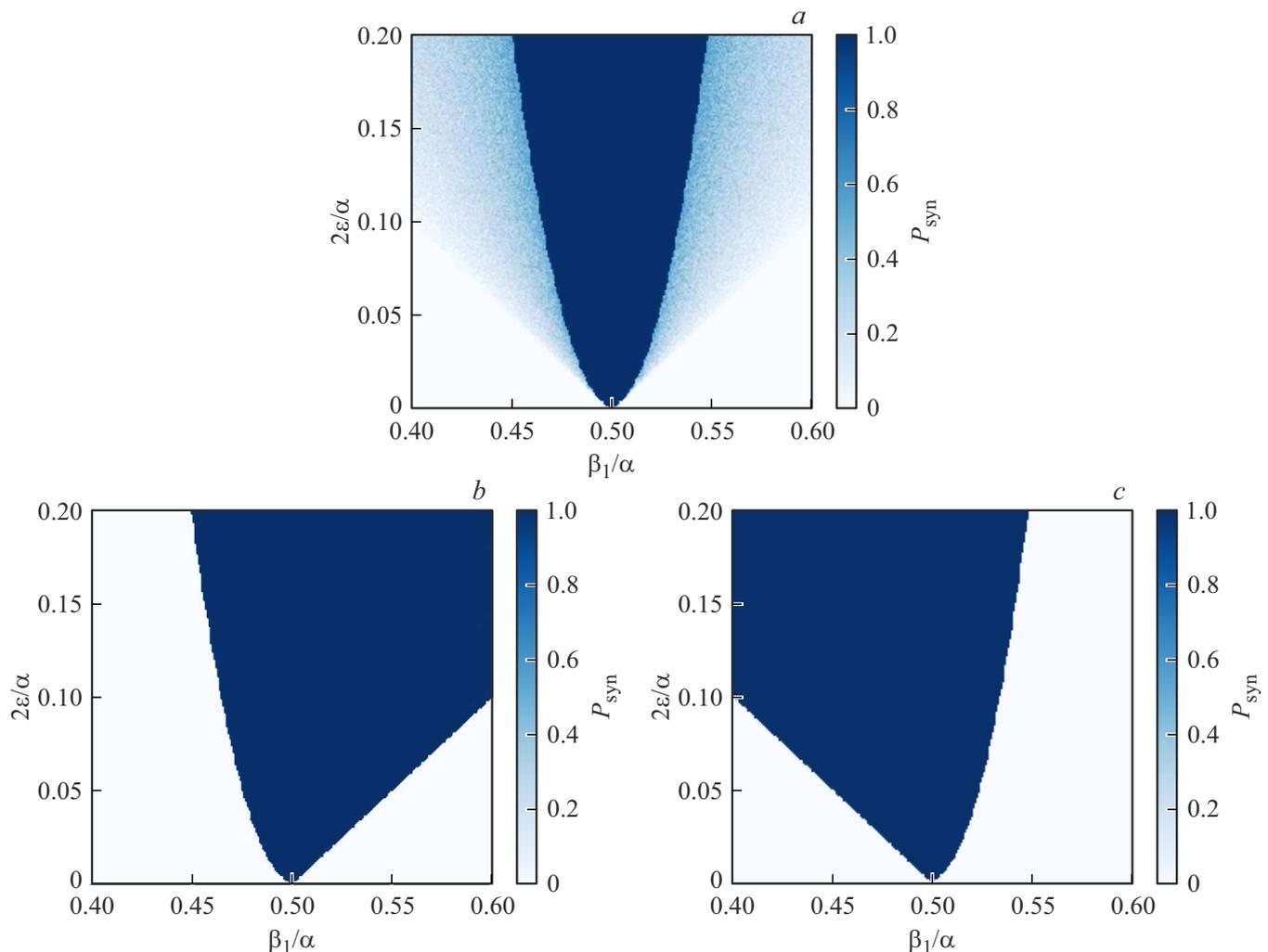
отрицательный начальный ток, что заставляет осцилляторы приближаться к неподвижным точкам  $m_{1,2,z} = -1$ , см. рис. 4, b и f. Затем, когда эффективное условие устойчивости этих точек нарушается за счет убыли токов  $w_{1,2}$ , начинается раскачка колебаний. При этом, независимо от начальных условий, первым от нуля всегда отходит первый осциллятор. Это обеспечивает выход системы на один и тот же, в данном примере синхронный, режим независимо от начальных условий. На рис. 4, a и e мы наблюдаем синхронизацию в обоих случаях.

Чтобы получить более полную картину, будем задавать начальные условия случайным образом и подсчитывать относительную частоту появления синхронного решения  $P_{\text{syn}}$ . В нашем случае синхронизацию удобно идентифицировать по размаху компонент  $m_{1,2,z}$  — в синхронном режиме он равен нулю. На рис. 5 показано как  $P_{\text{syn}}$  зависит от силы связи для трех разных наборов параметров RLC-цепочки. Кривая (a) соответствует случаю, когда RLC-цепочки имеют параметры (20a), то



**Рис. 5.** Относительная частота получить синхронное решение при случайном выборе начальных условий. Кривая (а) построена для значений параметров (20а) (RLC-контур с быстрым затуханием), а кривые (b) и (c) для (20b) и (20c), соответственно (медленное затухание в контуре). Параметры осцилляторов для всех трех случаев заданы формулами (19) (за очевидным исключением  $\varepsilon$ , которое меняется по горизонтальной оси).

есть осуществляется колебательный режим с быстрым затуханием. Это соответствует рис. 3. Управление бистабильностью отсутствует. При малых  $\varepsilon$  все решения не синхронизированы, а когда  $\varepsilon$  достаточно велико, мы всегда получаем синхронные решения. Область бистабильности находится примерно между  $\varepsilon = 0.00025$  и  $\varepsilon = 0.001$ . Здесь встречаются оба типа решений, и частота появления синхронных решений растет с ростом  $\varepsilon$ . Если задействовать параметры (20b), которые удовлетворяют неравенству (18), и кроме того одно из собственных чисел RLC-цепочки очень мало по модулю и отрицательно, то бистабильность исчезает. Как только  $\varepsilon$  попадает в область, где синхронное решение существует, система начинает всегда выбирать только его. Набор параметров (20c) отличается от предыдущего тем, что обменялись значения  $\chi_1$  и  $\chi_2$ . Это приводит к тому, что теперь  $m_{2,z}$  всегда первой покидает окрест-



**Рис. 6.** Относительная частота получить синхронное решение при случайном выборе начальных условий на плоскости параметров  $(\beta_1, \varepsilon)$ . Панели (а), (b) и (c) построены для параметров (20а), (20b) и (20c), соответственно. Белый цвет представляет несинхронное решение, темно синий — синхронизацию. Промежуточные оттенки демонстрируют бистабильность. Параметры осцилляторов, за исключением меняющихся по осям  $\beta_1$  и  $\varepsilon$ , для всех трех случаев заданы формулами (19), в частности  $\beta_2/\alpha = 0.5$ .

ность неподвижной точки. Как видно из рис. 5 это также блокирует бистабильность, но теперь до тех пор, пока сохраняется возможность выбора несинхронного решения, система выбирает всегда его. Переключение на синхронный режим осуществляется только когда несинхронное решение перестает существовать.

На рис. 6 частота выхода на синхронный режим показана на плоскости параметров  $(\beta_1, \varepsilon)$  при помощи оттенков цвета. Рисунок 6, *a* построен для набора параметров (20a), при которых нет управления бистабильностью. Мы видим здесь темно синий язык, внутри которого осцилляторы синхронизированы. Его окружают более светлые бистабильности — насыщенность цвета кодирует вероятность синхронного режима  $P_{\text{syn}}$ . Ниже располагается белая область, которая представляет режим несинхронизированных колебаний. На рис. 6, *b* выбраны параметры (20b), которые обеспечивают блокировку бистабильности. Напомним, что при этих параметрах первой из неподвижной точки выходит  $m_{1,z}$ . Как видно из рисунка, когда  $\beta_1 > \beta_2$  область бистабильности заменяется на область синхронизации. Если наоборот  $\beta_1 < \beta_2$ , то вместо области бистабильности появляется область несинхронных колебаний. Для параметров (20c) при которых уже  $m_{2,z}$  первой выходит из неподвижной точки ситуация зеркально симметрична: слева от  $\beta_1$  область бистабильности становится областью синхронизации, а справа — областью несинхронных колебаний, рис. 6, *c*.

#### 4. Заключение

Мы рассмотрели систему из двух спин-трансферных осцилляторов с полевой связью, параллельно каждому из которых подключена RLC-цепочка. Такая система может демонстрировать как полностью синхронные так и несинхронные колебания. Имеется область параметров, в которой имеет место бистабильность, при которой эти два решения сосуществуют. Показано, что если подобрать параметры RLC-цепочек таким образом, чтобы ток в них монотонно и медленно убывал от больших отрицательных значений до нуля, можно добиться „забывания“ спин-трансферными осцилляторами своих произвольных начальных условий. Происходит контролируемый запуск колебаний, что позволяет подавить бистабильность как в пользу синхронного так и несинхронного режимов.

#### Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-12-00121 <https://rscf.ru/project/21-12-00121/>

#### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

#### Список литературы

- [1] I.D. Mayergoyz, G. Bertotti, C. Serpico. Nonlinear magnetization dynamics in nanosystems. Elsevier (2009). 466 с.
- [2] Z. Zeng, G. Finocchio, H. Jiang. *Nanoscale* **5**, 6, 2219 (2013).
- [3] S.I. Kiselev, J.C. Sankey, I.N. Krivorotov, N.C. Emley, R.J. Schoelkopf, R.A. Buhrman, D.C. Ralph. *Nature* **425**, 6956, 380 (2003).
- [4] W.H. Rippard, M.R. Pufall, S. Kaka, S.E. Russek, T.J. Silva. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 027201 (2004).
- [5] J.C. Slonczewski. *JMMM* **159**, 1, L1 (1996).
- [6] L. Berger. *Phys. Rev. B* **54**, 9353 (1996).
- [7] R. Skomski. Simple models of magnetism. Oxford University Press (2008). 336 с.
- [8] D. Li, Y. Zhou, C. Zhou, B. Hu. *Phys. Rev. B* **82**, 140407 (2010).
- [9] A. Pikovsky. *Phys. Rev. E* **88**, 032812 (2013).
- [10] M.A. Zaks, A. Pikovsky. *Physica D* **335**, 33 (2016).
- [11] M.A. Zaks, A. Pikovsky. *Sci. Rep.* **7**, 1, 4648 (2017).
- [12] M.A. Zaks, A. Pikovsky. *Eur. Phys. J. B* **92**, 7, 160 (2019).
- [13] S. Kaka, M.R. Pufall, W.H. Rippard, T.J. Silva, S.E. Russek, J.A. Katine. *Nature* **437**, 7057, 389 (2005).
- [14] S.M. Rezende, F.M. de Aguiar, R.L. Rodriguez-Suarez, A. Azevedo. *Phys. Rev. Lett.* **98**, 087202 (2007).
- [15] M. Lakshmanan. *Phil. Trans. Royal Soc. A* **369**, 1939, 1280 (2011).
- [16] A. Slavin, V. Tiberkevich. *IEEE Transact. Magn.* **45**, 4, 1875 (2009).
- [17] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press (2002) 500 с.
- [18] B. Georges, J. Grollier, M. Darques, V. Cros, C. Deranlot, B. Marcilhac, G. Faini, A. Fert. *Phys. Rev.* **101**, 017201 (2008).
- [19] P.V. Kuptsov. *Regular Chaotic Dynam.* **27**, 6, 697 (2022).
- [20] Д.А. Татарский, В.Л. Миронов, А.А. Фраерман. *ЖЭТФ* **163**, 3, 366 (2023).
- [21] J. Grollier, V. Cros, A. Fert. *Phys. Rev. B* **73**, 060409 (2006).

Редактор Т.Н. Василевская