

01

Способ определения конфигурации защитной пленки при численном моделировании пульсационных режимов конвективно-пленочного охлаждения

© А.Л. Тукмаков, А.А. Ахунов, Н.А. Тукмакова, В.В. Харьков

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева-КАИ,
420111 Казань, Россия
e-mail: tukmakov@imm.knc.ru

Поступило в Редакцию 15 февраля 2023 г.
В окончательной редакции 10 апреля 2023 г.
Принято к публикации 11 апреля 2023 г.

Представлен способ определения конфигурации защитной пленки при численном моделировании систем конвективно-пленочного охлаждения на примере двустороннего обтекания пластины высокотемпературным и охлаждающим потоками, сообщаемыми через наклонный щелевой канал, который соединяет области течения охлаждающего и высокотемпературного газа. Выполнены расчеты газодинамических полей по обе стороны пластины, и описана конфигурация охлаждающей пленки при пульсационной подаче охлаждающего воздуха.

Ключевые слова: численное моделирование, уравнения Навье–Стокса, схема Мак–Кормака, многосвязные области, пристеночные функции, конвективно-пленочное охлаждение.

DOI: 10.21883/JTF.2023.06.55599.26-23

Введение

Системы конвективно-пленочного охлаждения применяются для защиты сопловых и рабочих лопаток турбин, работающих в высокотемпературных газовых потоках [1]. Эффективность пленочного охлаждения зависит как от формы каналов, соединяющих область течения охлаждающего и высокотемпературного потоков, так и от режима подачи охладителя — стационарного или пульсационного. С целью повышения эффективности охлаждения разработаны каналы различного вида: цилиндрические, настильные, веерные, консольные, конические, настильно-веерные, антивихревые, парные, жалюзийные и т. д. [2]. Эффективность охлаждения зависит от конфигурации защитной пленки, создаваемой охлаждающими струями вблизи защищаемой поверхности. Исследование таких систем и поиск наилучшей формы каналов как при стационарных, так и при пульсационных режимах часто ведется методами математического моделирования. В этом случае желательно знать, какой будет форма защитной пленки при том или ином режиме течения и профиле канала, по которому подается охлаждающий газ. Оценить форму пленки можно по конфигурации теплового поля в окрестности выходного сечения канала, но в этом случае результат является интегральным и определяется взаимодействием высокотемпературного и охлаждающего потоков. В то же время интересна форма струи холодного газа, инжектируемой в основной поток, которая создает завесу [3–6] и может изменяться в пульсационных режимах [7,8]. В настоящей работе предлагается оценивать конфигурацию пленки не только на основе температурного поля, но также и

на основе пространственного распределения холодного компонента газовой смеси, вдуваемой в область течения горячего потока. Расчет в этом случае может вестись на основе модели динамики двухкомпонентного газа, а форма пленки — сопоставляться с распределением плотности низкотемпературного компонента в области горячего потока.

1. Уравнения движения газа, постановка задачи и методика ее решения

Для описания нестационарного процесса формирования защитной пленки применялась система уравнений движения вязкого сжимаемого теплопроводного двухкомпонентного газа, которая записывалась в обобщенных криволинейных координатах $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, где (x, y) — физические, а ξ, η — расчетные координаты [9–11]. Система уравнений и метод ее решения описаны в Приложении.

Защитная пленка образуется при взаимодействии струи охлаждающего газа с высокотемпературным потоком. На рис. 1 приведены результаты верификационного расчета течения плоской затопленной воздушной струи в стационарном режиме. Расчетная область показана на рис. 1, а. Параметры струи задаются при помощи граничных условий. При $y = 0$, $0 < x < 0.48$ м, 0.52 м $< x < 1$ м для скорости газа задаются условия прилипания. При $y = 0$, 0.48 м $< x < 0.52$ м задается скорость газа: $u = 0$, $v = 4$ м/с, где u, v — составляющие скорости газа в направлении осей Ox, Oy .

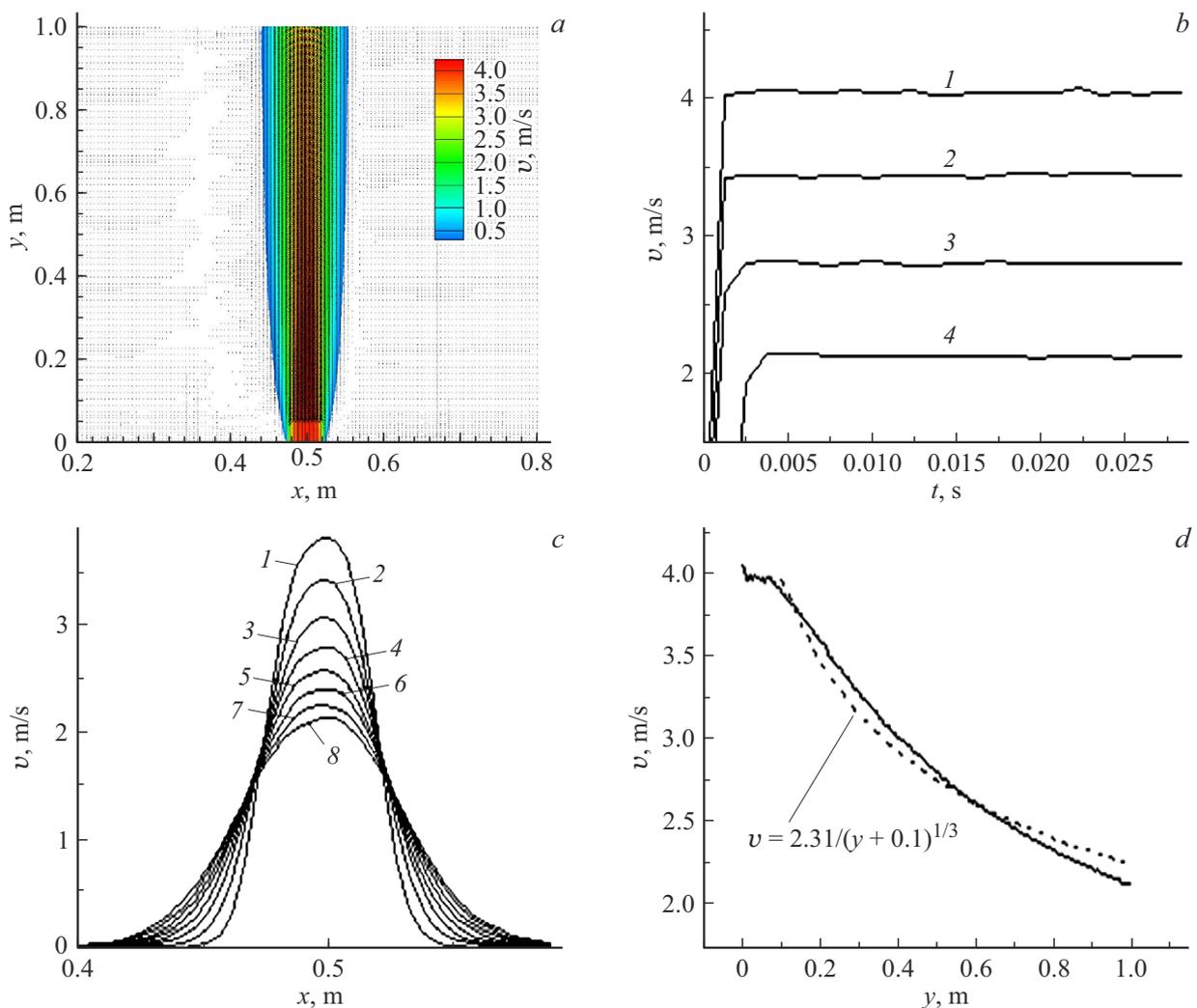


Рис. 1. Плоская затопленная струя: *a* — поле скоростей струи, *b* — процесс установления скорости, *c* — профили скорости в поперечных сечениях струи, *d* — продольное распределение скорости на оси струи.

На остальных границах расчетной области для составляющих скорости задаются однородные условия Неймана. Для плотности, давления, энергии на всех границах расчетной области также задаются условия Неймана. В начальный момент времени газ неподвижен, задаются его температура $T = 400$ К, плотности компонентов $\rho_1 = \rho_2 = 0.645$ kg/m³. На рис. 1, *a* приведена форма струи и распределение скорости в струе в стационарном режиме. На рис. 1, *b* показаны стационарные значения вертикальной составляющей скорости в различных точках на оси струи:

1 — $y = 0.005$ м, 2 — $y = 0.25$ м, 3 — $y = 0.5$ м, 4 — $y \approx 1$ м. Поперечные сечения струи, построенные с шагом $\Delta y = 0.128$ м, показаны на рис. 1, *c*: кривая 1 построена при $y = 0.1$ м, кривая 8 — при $y = 1$ м. Распределение скорости на оси струи показано на рис. 1, *d* сплошной линией. Штриховая линия — аппроксимация функцией $v \approx 2.31/(y + 0.1)^{1/3}$ при $y > 0$. Центр струи находится при $x = 0.5$ м, $y \approx -0.1$ м. Показатель степе-

ни 1/3 в знаменателе полученной аппроксимирующей зависимости соответствует ламинарному режиму течения плоской струи [12,13].

Методика, позволяющая определить конфигурацию защитной пленки по распределению плотности охлаждающего газа, описана ниже на примере решения задачи о конвективно-пленочном охлаждении пластины со щелевым каналом. На рис. 2, *a* представлена схема расчетной области, включающая в себя пластину с наклонным щелевым каналом.

Пластина толщиной $h = 0.003$ м разделяет потоки низкотемпературного (область I) и горячего газа (область V). Длина расчетной области $L = 0.16$ м, высоты $h_1 = 0.1$ м, $h_2 = 0.08$ м (рис. 2, *a*). Расстояние вдоль пластины от входного сечения до боковой стенки наклонной щели $\ell = 0.07$ м. На рис. 2, *b* представлен фрагмент расчетной области блочно-структурированной конечно-разностной сетки, построенной методом Томпсона [10].

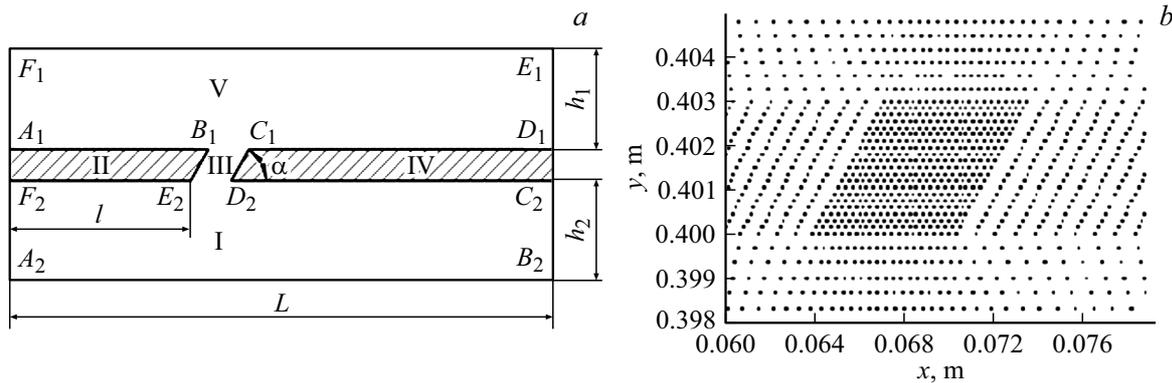


Рис. 2. *a* — схема расчетной области, *b* — фрагмент конечно-разностной сетки в окрестности канала.

Поскольку конфигурация защитной пленки определяется распределением холодного компонента, предлагается в расчетах течения применить односкоростную двухкомпонентную модель движения вязкого сжимаемого теплопроводного газа. В этой модели присутствуют два газовых компонента — высокотемпературный с плотностью ρ_1 и охлаждающий с плотностью ρ_2 . Система уравнений включает в себя уравнение неразрывности для каждой компоненты, а также уравнения сохранения составляющих импульса и уравнение сохранения энергии для смеси в целом. Таким образом, для расчета плотности газа используются два уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} \partial \rho_1 / \partial t + \partial(\rho_1 u) / \partial x + \partial(\rho_1 v) / \partial y &= \text{div}(v_1 \nabla \rho_1), \\ \partial \rho_2 / \partial t + \partial(\rho_2 u) / \partial x + \partial(\rho_2 v) / \partial y &= \text{div}(v_2 \nabla \rho_2), \\ \rho &= \rho_1 + \rho_2. \end{aligned}$$

Воздух в высокотемпературном и в низкотемпературном потоках, таким образом, состоит из двух „компонент“ с одинаковыми свойствами, скоростями и температурами в каждом узле конечно-разностной сетки, но различным образом распределенными в низкотемпературной и в высокотемпературной части расчетной области. Пусть в начальный момент времени плотности компонент распределены следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{— в области V: } \rho_1 &= \rho_{10} - \alpha_{20}, \quad \rho_2 = \alpha_{20}, \\ \rho &= \rho_1 + \rho_2 = \alpha_{10} \text{ при } \alpha_{20} \ll \rho_{10}; \\ \text{— в области I: } \rho_2 &= \rho_{20} - \alpha_{10}, \quad \rho_1 = \alpha_{10}, \\ \rho &= \rho_1 + \rho_2 = \alpha_{20} \text{ при } \alpha_{10} \ll \rho_{20}. \end{aligned}$$

Таким образом, газ в области I состоит из компонента 2 с малой добавкой компонента 1, при этом у них одинаковы физические свойства, температура и составляющие скорости. В области V до перемешивания с охлаждающей струей газ состоит из компонента 1 с малой добавкой компонента 2. При этом физические свойства, температуры и скорости первого и второго компонент в каждом узле одинаковы. Суммарная плотность воздуха равна сумме плотностей компонент: $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Далее суммарная плотность используется в уравнениях сохранения компонент импульса и в уравнении сохранения энергии.

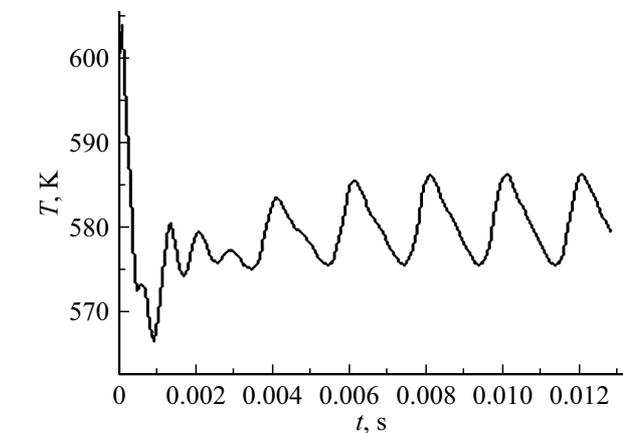


Рис. 3. Временная зависимость температуры в точке ($x = L/2$, $y = h_2 + h + h_1/2$) при частоте колебаний $f = 500$ Hz.

Так как носителем низкой температуры газа в области V является второй компонент смеси, его распределение в области V определяет конфигурацию защитной пленки. Носителем высокой температуры в области I является первый компонент смеси. Его присутствие в области I говорит о затекании горячего воздуха в область охлаждающего потока, что возможно при подаче охладителя в пульсационных режимах.

Пусть в начальный момент времени температуры и плотности неподвижного газа в узлах газодинамической сетки: $T_{20} = 400$ K, $\rho_{20} = 1.2$ kg/m³, $T_{10} = 600$ K, $\rho_{10} = 0.58$ kg/m³ и температура в узлах твердотельной сетки $T = T_{20}$. Давление газа на входе и выходе области I составляло: $p_+ = (1.1 + 0.3 \sin(2\pi f \times t))p_{20}$, $p_- = 0.9p_{20}$, где $p_{20} = 128$ kPa — начальное давление газа в области I (рис. 2, *a*), f — линейная частота колебаний. В области V $p_+ = 1.1p_{10}$, $p_- = 0.9p_{10}$, где $p_{10} = 120.5$ kPa — начальное давление газа в области V.

Приведенные ниже расчеты производились на сетках с числом узлов $N_j \times N_k = 200 \times 200$. При этом ближайшие к поверхности пластины пристеночные узлы сетки по обе стороны пластины располагались в начале логарифмического масштаба.

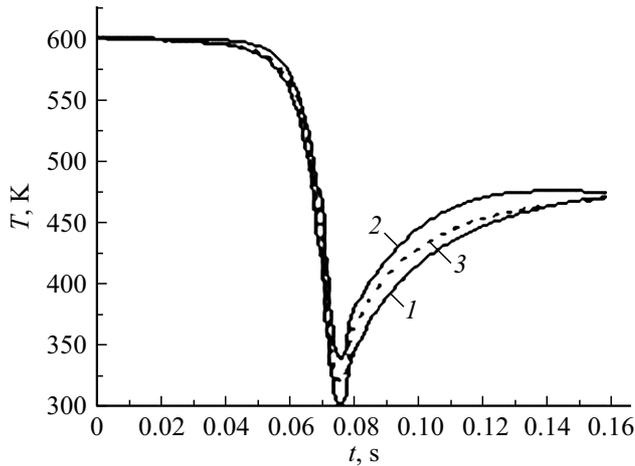


Рис. 4. Распределение температуры газа вблизи внешней поверхности пластины в моменты времени, t : 1 — 0.0052, 2 — 0.0057 s, 3 — стационарное распределение температуры.

рифмических областей скоростных пограничных слоев при $30 \leq y^+ \leq 60$.

2. Результаты расчетов

На рис. 3 в качестве примера показан процесс установления температуры в точке $(x = L/2, y = h_2 + h + h_{1/2})$, расположенной на продольной оси высокотемпературной области V, над выходным сечением щелевого канала для частоты колебаний давления газа в охлаждающем канале $f = 500$ Hz и при амплитуде колебаний давления $0.3p_{20}$.

Колебания носят нелинейный характер, имеют несимметричные передний и задний фронты. Сопоставление временных зависимостей для скорости с зависимостями для температуры, плотности, давления показывает, что колебания скорости по фазе опережают колебания температуры, плотности и давления приблизительно на $T/4$, где $T = 0.002$ s — период колебаний. На рис. 4 приведено распределение температуры газа в пристеночном слое узлов вдоль верхней поверхности пластины (рис. 2, a) в моменты времени $t_1 = 0.0052$ s, $t_2 = 0.0057$ s, разнесенные на $T/4$ в течение периода колебаний. Минимальная температура достигается у выходного сечения щелевого канала. Вверх по потоку от выходного сечения в течение периода колебаний

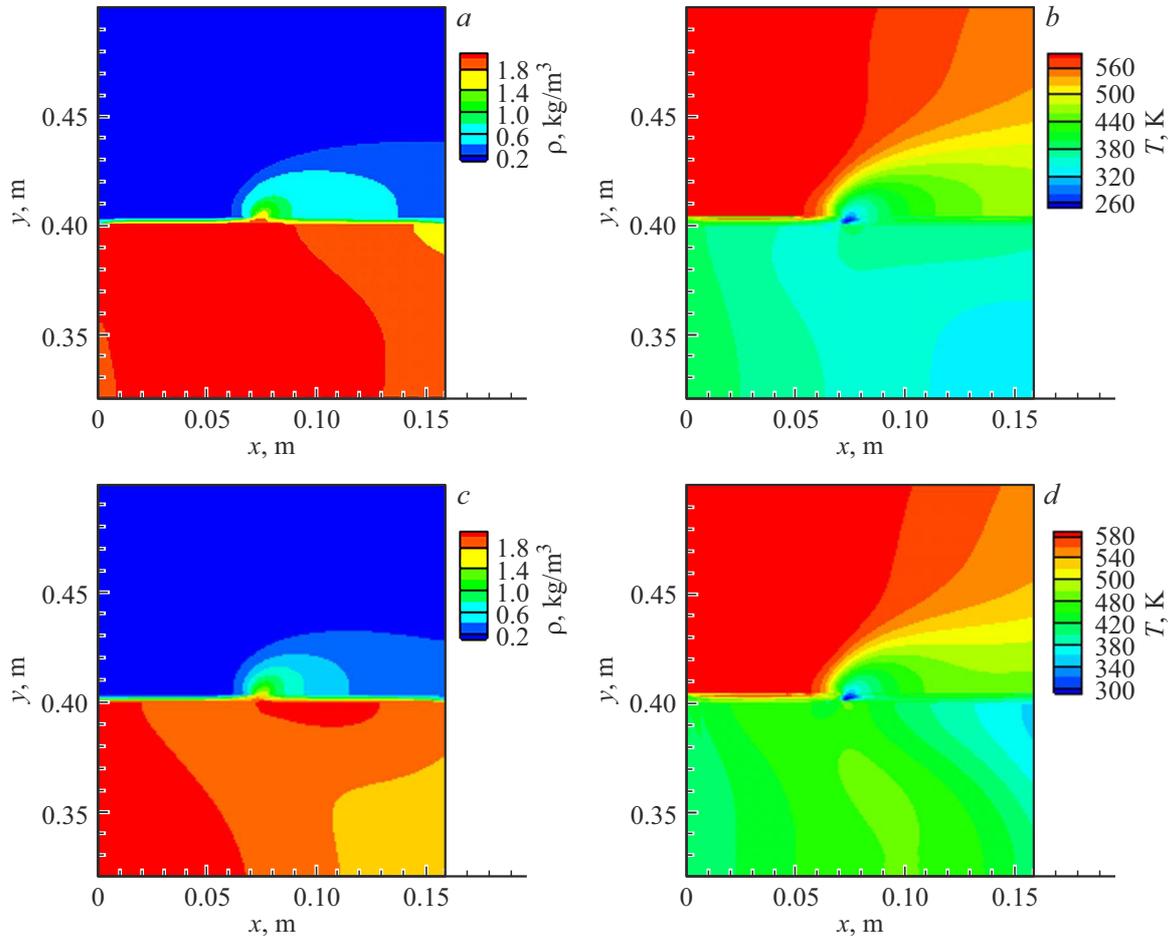


Рис. 5. Форма защитной пленки в различные моменты времени: a — плотность холодного компонента ρ_2 ; b — температура газа в момент времени $t = 0.0052$ s; c — плотность холодного компонента ρ_2 ; d — температура газа в момент времени $t = 0.0057$ s.

температура вдоль поверхности возрастает быстрее, чем в направлении вниз по потоку, где формируется защитная пленка. При этом перепад температуры в области, расположенной ниже выходного сечения щели и лежащей в основании защитной пленки, прилегающей к поверхности, за период колебаний достигает $\Delta T = 40 \text{ K}$ (рис. 4).

На рис. 5, *a, c* показано пространственное распределение плотности второго (холодного) компонента ρ_2 в высокотемпературной области в моменты времени $t = 0.0052$ и 0.0057 s . На рис. 5, *b, d* показано пространственное распределение температуры газа в те же моменты времени. Оба этих параметра позволяют оценить расположение защитной пленки.

Расчеты показывают, что при $t = 0.0052 \text{ s}$ пленка занимает больший объем (рис. 5, *a*) и имеет большую протяженность холодного ядра вдоль пластины от места вдува (рис. 5, *b*). Через четверть периода, при $t = 0.0057 \text{ s}$, объем пленки (рис. 5, *c*) и ее холодного ядра (рис. 5, *d*) уменьшается, пленка прижимается к защищаемой поверхности.

Расчеты показывают, что в направлении вверх относительно высокотемпературного потока влияние нестационарности охлаждающей струи на форму пленки проявляется незначительно, тогда как в направлении потока в течение периода колебаний размеры пленки изменяются существенно. Если в момент времени $t = 0.0052 \text{ s}$ правая граница защитной пленки, на которой плотность второго компонента достигает значения $\rho_2 = 0.6 \text{ kg/m}^3$, располагается при $x \approx 0.135 \text{ m}$ (рис. 5, *a*), то в момент времени $t = 0.0057 \text{ s}$ защитная пленка приближается к пластине, а ее правая граница, на которой плотность составляет $\rho_2 = 0.6 \text{ kg/m}^3$, находится при $x \approx 0.11 \text{ m}$ (рис. 5, *c*).

Заключение

Форма защитной пленки и ее расположение относительно поверхности определяют эффективность охлаждения и зависят от параметров течения высокотемпературного газа, способа подачи охлаждающего газа и формы канала, в котором формируется струя. При численном моделировании с использованием односкоростной двухкомпонентной модели течения газа форма пленки может быть определена по распределению в высокотемпературном потоке основного газового компонента для охлаждающего потока. Такой способ определения конфигурации пленки дополняет оценку, полученную на основе построения температурного поля.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-19-00207, <https://rscf.ru/project/22-19-00207/>.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Приложение

Система уравнений движения вязкого сжимаемого теплопроводного двухкомпонентного газа и методика ее решения

Система уравнений движения вязкого сжимаемого теплопроводного газа в обобщенных криволинейных координатах имеет вид [9,10]:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}_\xi + \mathbf{G}_\eta = \mathbf{H} \quad (\text{П1})$$

$$\mathbf{q} = \left[\frac{\rho_1}{J}, \frac{\rho_2}{J}, \frac{\rho u}{J}, \frac{\rho v}{J}, \frac{E}{J} \right]^T,$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \xi_x \rho_1 u + \xi_y \rho_1 v \\ \xi_x \rho_2 u + \xi_y \rho_2 v \\ \xi_x (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \xi_y (\rho uv - \tau_{xy}) \\ \xi_x (\rho uv - \tau_{xy}) + \xi_y (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \\ \xi_x ((E + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + Q_x) \\ + \xi_y ((E + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \eta_x \rho_1 u + \eta_y \rho_1 v \\ \eta_x \rho_2 u + \eta_y \rho_2 v \\ \eta_x (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \eta_y (\rho uv - \tau_{xy}) \\ \eta_x (\rho uv - \tau_{xy}) + \eta_y (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \\ \eta_x ((E + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + Q_x) \\ + \eta_y ((E + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \text{div}(v_i \nabla \rho_1) \\ \text{div}(v_i \nabla \rho_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2,$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}; \quad \tau_{xy} = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

$$\tau_{xx} = 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}(\mu + \mu_t) \text{div}(U),$$

$$\tau_{yy} = 2(\mu + \mu_t) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}(\mu + \mu_t) \cdot \text{div}(U),$$

$$p = (\gamma - 1)\rho I, \quad E = I + 0.5\rho(u^2 + v^2),$$

$$Q_x = -(\mathbf{k} + C_p \mu_t / \text{textPr}) \partial t / \partial x,$$

$$Q_y = -(\mathbf{k} + C_p \mu_t / \text{Pr}) \partial T / \partial y,$$

$$\operatorname{div}(U) = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y.$$

Здесь $\rho, \rho_1, \rho_2, u, v, E, I, T, p$ — плотность газа и компонентов, продольная и поперечная составляющие скорости, полная и внутренняя энергии, температура и давление газа; γ, μ, μ_t — постоянная адиабаты, динамическая молекулярная и турбулентная вязкости газа; Pr — число Прандтля; $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}$ — составляющие тензора вязких напряжений. Внутренняя энергия газа определялась как $I = \rho C_V T$, где C_V — удельная теплоемкость при постоянном объеме, а температура газа $T = (E - 0.5\rho(u^2 + v^2)) / \rho C_V$. При записи уравнений неразрывности для компонент учитывается концентрационная диффузия газа. Метрические коэффициенты и якобиан перехода от расчетных координат к физическим определяются как [9,10]: $\xi_x = J \cdot y_\eta, \xi_y = -J \cdot x_\eta, \eta_x = -J \cdot y_\xi, \eta_y = J \cdot x_\xi, J = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$.

Система (П1) решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка [9,10] с расщеплением исходного оператора по пространственным направлениям [9,11]:

$$\mathbf{q}_{j,k}^{n+1} = P_\xi(\Delta t_\xi/2) P_\eta(\Delta t_\eta/2) P_\eta(\Delta t_\eta/2) P_\xi(\Delta t_\xi/2) \mathbf{q}_{j,k}^n. \quad (\text{П2})$$

Переход с временного слоя t^n на слой t^{n+1} за счет применения одномерных операторов к вектору газодинамических функций с предыдущего слоя осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(1)} = P_\xi(\Delta t_\xi/2) \mathbf{q}_{j,k}^n, \quad \mathbf{q}_{j,k}^{(2)} = P_\eta(\Delta t_\eta/2) \mathbf{q}_{j,k}^{(1)},$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(3)} = P_\eta(\Delta t_\eta/2) \mathbf{q}_{j,k}^{(2)}, \quad \mathbf{q}_{j,k}^{(n+1)} = P_\xi(\Delta t_\xi/2) \mathbf{q}_{j,k}^{(3)}. \quad (\text{П3})$$

Здесь $\Delta t_\xi = \Delta t_\eta = \Delta t$. Так, для получения промежуточных значений вектора $\mathbf{q}^{(1)}$ необходимо применить одномерный оператор $P_\xi(\Delta t_\xi/2)$ по переменной ξ к вектору газодинамических функций на временном слое t^n . Действие каждого одномерного оператора \mathbf{P} состоит в последовательном выполнении шагов „предиктор“ и „корректор“ по соответствующей пространственной переменной:

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(1)*} = \mathbf{q}_{j,k}^n - \frac{(\Delta t_\xi/2)}{\Delta \xi} (\mathbf{F}_{j+1,k}^n - \mathbf{F}_{j,k}^n), \quad (\text{П4})$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(1)} = 0.5 (\mathbf{q}_{j,k}^n + \mathbf{q}_{j,k}^{(1)*}) - 0.5 \frac{(\Delta t_\xi/2)}{\Delta \xi} (\mathbf{F}_{j,k}^{(1)*} - \mathbf{F}_{j-1,k}^{(1)*}), \quad (\text{П5})$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(2)*} = \mathbf{q}_{j,k}^{(1)} - \frac{\Delta t_\eta/2}{\Delta \eta} (\mathbf{G}_{j,k+1}^{(1)} - \mathbf{G}_{j,k}^{(1)}), \quad (\text{П6})$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(2)} = 0.5 (\mathbf{q}_{j,k}^{(1)} + \mathbf{q}_{j,k}^{(2)*}) - 0.5 \frac{(\Delta t_\eta/2)}{\Delta \eta} (\mathbf{G}_{j,k}^{(2)*} - \mathbf{G}_{j,k-1}^{(2)*}), \quad (\text{П7})$$

и т.д. На шаге „предиктор“ аппроксимация производных по ξ , входящих в $\mathbf{F}_{j+1,k}^n, \mathbf{F}_{j,k}^n$, выполняется с помощью левой разностной схемы первого порядка точности, на шаге „корректор“ — при помощи правой, а производные по η приближаются центральными разностными схемами второго порядка. Производные по η , входящие

в $\mathbf{G}_{j,k+1}^n, \mathbf{G}_{j,k}^n$, аппроксимируются на шаге „предиктор“ левыми разностными схемами первого порядка, а на шаге „корректор“ — правыми. Разностные производные по ξ в $\mathbf{G}_{j,k+1}^n, \mathbf{G}_{j,k}^n$ на каждом шаге — центральные.

Для описания переноса модифицированной кинематической турбулентной вязкости ν применяется базовая модель Спаларта–Аллмараса [14,15]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\nu)}{\partial t} + \frac{\partial(u\nu)}{\partial x} + \frac{\partial(v\nu)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nu_0 + \nu}{\sigma_\nu} \frac{\nu}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_0 + \nu}{\sigma_\nu} \frac{\nu}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{C_{b2}}{\sigma_\nu} \left(\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \right) + P_\nu - \varepsilon_\nu. \end{aligned} \quad (\text{П8})$$

Здесь $P_\nu, \varepsilon_\nu, \nu_0, \nu$ — скорость генерации и диссипации турбулентной вязкости, молекулярная и модифицированная кинематическая вязкость. При использовании модели Спаларта–Аллмараса в выражениях для реинольдсовых напряжений опускается параметр k^{te} . Кинематическая турбулентная вязкость ν_t определяется через модифицированную кинематическую турбулентную вязкость ν :

$$\nu_t = \nu \times F_{\nu 1}, \quad f_{\nu 1} = \frac{\Lambda^3}{\Lambda^3 + C_{\nu 1}^3}, \quad \Lambda = \frac{\nu}{\nu_0},$$

$$P_\nu = C_{b1} S \nu, \quad S = |\Omega| + \frac{\nu}{(kd)^2} f_{\nu 2},$$

$$f_{\nu 2} = 1 - \frac{\Lambda}{1 + \Lambda f_{\nu 1}}, \quad \varepsilon_\nu = C_{w1} f_w \left(\frac{\nu}{d} \right)^2,$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad C_{w1} = \frac{C_{b1}}{k^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma_\nu},$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r), \quad r = \frac{\nu}{(kd)^2 S}.$$

Здесь d — ближайшее расстояние до стенки, $k = 0.4187$ — постоянная Кармана. Модуль завихренности Ω определяется как

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right|.$$

Значения постоянных базовой модели:

$$C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad \sigma_\nu = 2/3,$$

$$C_{\nu 1} = 7.1, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2.$$

Кинематическая турбулентная вязкость связана с динамической турбулентной вязкостью соотношением $\mu_t = \rho \nu_t$. Уравнение Спаларта–Аллмараса записывалось в обобщенных криволинейных координатах в квазиконсервативном виде (П9) и решалось

$$\frac{\partial \nu_1}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = H, \quad (\text{П9})$$

$$v_1 = \frac{v}{J}, \quad F = \frac{\xi_x v + \xi_x u v + \xi_y v v}{J},$$

$$G = \frac{\eta_x v + \eta_x u v + \eta_y v v}{J},$$

$$H = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(v_0 + v) \partial v}{\sigma_v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(v_0 + v) \partial v}{\sigma_v} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$+ \frac{C_{b2}}{\sigma_y} \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) + P_v - \varepsilon_v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y,$$

$$\left(\frac{(v_0 + v) \partial v}{\sigma_v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)_x$$

$$= \left(\frac{(v_0 + v) \partial v}{\sigma_v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)_\xi \xi_x + \left(\frac{(v_0 + v) \partial v}{\sigma_v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)_\eta \eta_x,$$

$$\left(\frac{(v_0 + v) \partial v}{\sigma_v} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_y$$

$$= \left(\frac{(v_0 + v) \partial v}{\sigma_v} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_\xi \xi_y + \left(\frac{(v_0 + v) \partial v}{\sigma_v} \frac{\partial v}{\partial y} \right)_\eta \eta_y$$

явным методом Мак-Кормака с расщеплением пространственного оператора по направлениям и схемой нелинейной коррекции, аналогично тому, как решаются уравнения системы движения вязкого сжимаемого теплопроводного газа.

Блочнo-структурированная конечно-разностная сетка строилась путем объединения сеточных блоков области течения газа, показанных на рис. 2, *b*. Внутри каждого блока для построения сетки применялся метод Томпсона [10]. Сетки смежных блоков, в том числе твердотельные, предназначенные для решения задачи теплопроводности, строились конформными с совпадающими на границах блоков узлами.

На твердых границах расчетной области для составляющих скорости задавались условия прилипания, для давления, температуры, энергии и плотности газа — однородные граничные условия второго рода. На входных границах областей течения горячего и холодного газа задавались давление, плотность и температура, а также однородные граничные условия второго рода для составляющих скорости. На выходных границах задавались значения давления и ставились однородные граничные условия второго рода для остальных газодинамических функций. В начальный момент времени во внутренних узлах газовой расчетной области задавались температура, плотность и составляющие скорости газа. В узлах твердотельных областей II, IV (рис. 1) — значения температуры пластины.

Для моделирования теплового пограничного слоя и определения температуры поверхности пластины применялись скоростная и тепловая пристеночные функции, связывающие безразмерные параметры

$T^+ = (T_w - T_i)/T_\tau$ и $y^+ = \rho u_\tau d/\mu$. Здесь T_w — температура стенки в данном узле на поверхности пластины; T_i — температура потока в ближайшем к нему узле газодинамической сетки; $T_\tau = q_w/(\rho C_p u_\tau)$ — температура трения [16]. Использовалась тепловая пристеночная функция вида [16]:

$$T^+(y^+) = \begin{cases} y^+ \text{Pr}, & y^+ \text{Pr} < 1, \\ 1.87 \ln(y^+ \text{Pr} + 1) + 0.065 y^+ \text{Pr} - 0.36, & 1 \leq y^+ \text{Pr} \leq 11.7 \\ 2.5 \ln(y^+ \text{Pr}) - 1, & y^+ \text{Pr} > 11.7 \end{cases} \quad (\text{П10})$$

Значения переменных стенки y^+ и $u^+ = u/u_\tau$, где $u_\tau = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ — динамическая скорость, находятся из универсального соотношения для автомодельного профиля скорости Сполдинга [17] внутри вязкого пограничного слоя:

$$\frac{\text{Re}}{u^+} = u^+ + e^{-22} \left(e^{ku^+} - 1 - ku^+ - \frac{1}{2}(ku^+)^2 - \frac{1}{6}(ku^+)^3 - \frac{1}{24}(ku^+)^4 \right), \quad (\text{П11})$$

где $k = 0.41$ — константа Кармана, $\text{Re} = \rho u d/\mu$ — известное число Рейнольдса в первом пристеночном узле. При известном числе Re в данном узле уравнение (П11) решается итерационно методом Ньютона относительно параметра u^+ в этом узле. Затем определяется $u_\tau = u/u^+$ и $y^+ = y u_\tau \rho/\mu$. При решении системы уравнений движения газа нормальное напряжение τ_{xx} в ближайших к поверхности пластины пристеночных узлах в уравнениях сохранения компонент импульса и энергии приравняется напряжению на стенке $\tau_w = \rho \tau_\tau^2$, найденному с помощью пристеночных функций.

Для оценки работоспособности модели, включающей в себя уравнение Спаларта–Аллмараса и скоростные пристеночные функции, были выполнены расчеты обтекания турбулентным потоком газа плоской пластины и построены профили скорости $u^+(\log(y^+))$ в сечениях, расположенных поперек пограничного слоя. Полученные зависимости в логарифмической области пограничного слоя практически совпали с автомодельным профилем Сполдинга [17].

Тепловой поток выражается через температуру трения и параметр T^+ [16]: $q_w = (T_w - T_i) \rho C_p u_\tau / T^+$. Отсюда коэффициент теплоотдачи на поверхности пластины–газ $\alpha = \rho C_p \mu_\tau / T^+$. Зная температуры газа T_1, T_2 вблизи горячей и холодной поверхностей пластины в ближайших к поверхности узлам газовой сетки, коэффициенты теплоотдачи поверхностей α_1, α_2 , теплопроводность пластины λ и ее толщину h , найдем температуры в узлах на поверхностях пластины [18]:

$$T_{w,1} = T_1 - (k_c/\alpha_1)(T_1 - T_2),$$

$$T_{w,2} = T_2 - (k_c/\alpha_2)(T_1 - T_2), \quad (\text{П12})$$

где $\alpha_1 = \rho_1 C_p u_{r1}/T_1^*$, $\alpha_2 = \rho_2 C_p u_{r2}/T_2^*$ — коэффициенты теплоотдачи со стороны горячего и холодного потоков; $k_c = (1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 + h/\lambda)^{-1}$ — коэффициент теплопередачи стенки.

Список литературы

- [1] А.В. Шукин, А.В. Ильинков, В.В. Такмовцев, Т.А. Ильинкова, И.И. Хабибуллин. *Теплофизика рабочих процессов в охлаждаемых лопатках газовых турбин* (КНИТУ-КАИ, Казань, 2020)
- [2] S. Acharya, Y. Kanani. *Advances in Film Cooling Heat Transfer. In book: Advances in Heat Transfer*, 49, 91–156 (Elsevier, 2017), DOI: 10.1016/bs.aint.2017.10.001
- [3] S.V. Ekkad, S. Ou, R.B. Rivir. *J. Turbomach*, **128** (3), 564 (2006).
- [4] S. Ou, R.B. Rivir. *Shaped-Hole Film Cooling With Pulsed Secondary Flow, Volume 3: Heat Transfer, Parts A and B* (ASMEDC, 2006), p. 259–269.
- [5] L.A. El-Gabry, R.B. Rivir. *J. Turbomach*, **134** (4), 041005 (2012).
- [6] J.L. Rutledge, P.I. King, R.B. Rivir. *CFD Predictions of Pulsed Film Cooling Heat Flux on a Turbine Blade Leading Edge*. ASME 2008 International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Paper № IMECE 2008-67276, p. 1139–1149. DOI: 10.1115/IMECE2008-67276. Published Online: August 26, 2009.
- [7] C.M. Bell, P.M. Ligrani, W.A. Hull, C.M. Norton. *Intern. J. Heat Mass Transfer*, **42**, 4333 (1999).
- [8] P.M. Ligrani, C.M. Bell. *Intern. J. Heat Mass Transfer*, **44**, 2005 (2001).
- [9] J.L. Steger. *AIAA J.*, **16** (7), 679 (1978).
- [10] К. Флетчер. *Вычислительные методы в динамике жидкостей* (Мир, М., 1991), т. 2.
- [11] В.М. Ковеня, Г.А. Тарнавский, С.Г. Черный. *Применение метода расщепления в задачах аэродинамики* (Наука СО, Новосибирск, 1990)
- [12] С.Н. Яковенко. *Теплофизика и аэромеханика*, **26** (5), 761 (2019).
- [13] В.В. Леманов, В.И. Терехов, К.А. Шаров, А.А. Шумейко. *Письма в ЖТФ*, **39** (9), 34 (2013).
- [14] P.R. Spalart, S.R. Allmaras. *La Recherche Aérospatiale*, **1**, 5 (1994).
- [15] Р.С. Соломатин, И.В. Семенов, И.С. Меньшов. *К расчету турбулентных течений на основе модели Спаларта–Аллараса с применением LU-SGS-GMRES алгоритма* (Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2016) № 119, 30 с. DOI: 10.20948/prgr-2018-119
- [16] В.Р. Ефремов, В.В. Курулин, А.С. Козелков, А.А. Куркин, Д.А. Уткин. *Журн. вычислительной математики и математической физики*, **59** (6), 1037 (2019).
- [17] D.V. Spalding. *J. Appl. Mech.*, **28** (3), 455 (1961).
- [18] Г.А. Мухачев, В.К. Шукин. *Термодинамика и теплопередача* (Высшая школа, М., 1991)