

# 01 Рекомбинационное свечение и комптоновское фотовозбуждение при рассеянии фотона атомным ионом

© А.Н. Хоперский, А.М. Надолинский<sup>✉</sup>, Р.В. Конеев  
 Ростовский государственный университет путей сообщения,  
 344038 Ростов-на-Дону, Россия  
<sup>✉</sup>e-mail: amnrnd@mail.ru

Поступила в редакцию 23.12.2022 г.  
 В окончательной редакции 19.03.2023 г.  
 Принята к публикации 28.03.2023 г.

Теоретически предсказаны аналитическая структура, абсолютные значения и угловая анизотропия дважды дифференциальных сечений рекомбинационного свечения и комптоновского фотовозбуждения при рассеянии рентгеновского фотона электронами многозарядного гелиеподобного атомного иона.

**Ключевые слова:** гелиеподобный ион, рекомбинационное свечение, комптоновское фотовозбуждение, угловая анизотропия, дважды дифференциальное сечение резонансного рассеяния.

DOI: 10.21883/OS.2023.04.55561.4482-22

## Введение

Исследованию фундаментального в микромире эффекта рекомбинационного свечения при переходе свободного электрона в возбуждённые и незанятые в остове состояния дискретного спектра атомного иона посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ в областях от физики плазмы до космологии [1–3]. В настоящей работе мы исследуем новый механизм генерации этого эффекта — рекомбинационное свечение, инициированное неупругим рассеянием фотона электронами атомного иона. При этом мы сохраняем термин „рекомбинационное свечение“ и для эффекта рекомбинации (переходы в возбуждённые состояния дискретного спектра атомного иона) не свободного, а виртуального электрона сплошного спектра, движущегося в самосогласованном (хартри-фоковском) поле  $1s$ -вакансии. В этом случае поглощаемый атомным ионом фотон рождает виртуальный электрон сплошного спектра, и амплитуда вероятности рекомбинационного свечения возникает как подструктура полной амплитуды вероятности рассеяния (рис. 1, *a*). В исследуемой области энергий падающего и рассеянного фотонов мы также учитываем эффект комптоновского фотовозбуждения (рис. 1, *b*) — эффект Ландсберга–Мандельштама–Рамана [4]. Методы расчёта континуальных (тормозное излучение и нерезонансное комптоновское рассеяние) структур полных дважды дифференциальных сечений рассеяния фотона атомным ионом развиты в недавней работе авторов [5]. В настоящей работе, как и в работе [5], в качестве объекта исследования взят гелиеподобный ион атома кремния ( $\text{Si}^{12+}$ , заряд ядра иона  $Z = 14$ ; конфигурация и терм основного состояния  $[0] = 1s^2[1S_0]$ ). Исследования полных дважды дифференциальных сечений рассеяния фотона атомным ионом широко востребованы, в частно-

сти, при интерпретации континуальных и резонансных структур спектров рентгеновской эмиссии от горячих астрофизических объектов (для см., например, [6,7]).

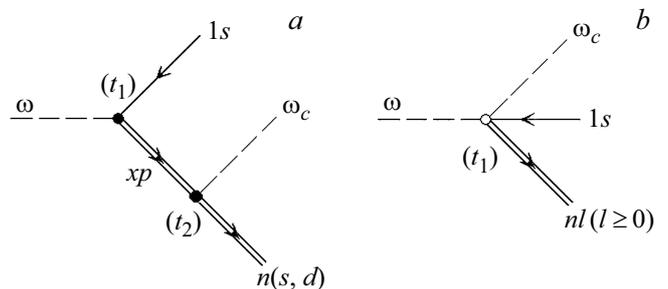
## Теория метода

Рассмотрим процессы резонансного (переходы в конечные состояния дискретного спектра) неупругого рассеяния фотона электронами гелиоподобного атомного иона:

$$\omega + [0] \rightarrow 1sxp(^1P_1) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} K_s \\ K_d \end{matrix} \right\} + \omega_c, \quad (1)$$

$$K_s = 1sns(^1S_0), \quad K_d = 1smd(^1D_2), \quad (2)$$

$$\omega + [0] \rightarrow 1snl(^1L_J) + \omega_c. \quad (3)$$



**Рис. 1.** Амплитуды вероятности резонансного неупругого рассеяния фотона гелиеподобным атомным ионом ( $\text{Si}^{12+}$ ) в представлении диаграмм Фейнмана: (*a*) рекомбинационное свечение; (*b*) комптоновское фотовозбуждение. Стрелка вправо — электрон, стрелка влево — вакансия. Двойная линия — состояние получено в хартри-фоковском поле  $1s$ -вакансии. Черный (светлый) кружок — вершина взаимодействия по оператору радиационного (контактного) перехода.  $\omega(\omega_c)$  — падающий (рассеянный) фотон. Направление времени — слева направо ( $t_1 < t_2$ ).

В (1), (3) и далее принята атомная система единиц ( $e = \hbar = m_e = 1$ ),  $n \geq 2$ ,  $m \geq 3$ ,  $l \geq 0$ ,  $J = L$ ,  $\omega(\omega_C)$  — энергия падающего (рассеянного) фотона и  $x$  — энергия электрона сплошного спектра промежуточного (виртуального) состояния рассеяния,  $x \in [0 : \infty)$ . Рассеянию по каналам (2) соответствует инициированное рекомбинационное свечение (рис. 1, *a*) по оператору радиационного перехода:

$$\hat{R} = -\frac{1}{c} \sum_{n=1}^N (\hat{p}_n \hat{A}_n). \quad (4)$$

Рассеянию по каналу (3) соответствует комптоновское фотовозбуждение (рис. 1, *b*) по оператору контактного взаимодействия:

$$\hat{Q} = \frac{1}{2c^2} \sum_{n=1}^N (\hat{A}_n \hat{A}_n). \quad (5)$$

В (4) и (5) определены:  $\hat{A}_n$  — оператор электромагнитного поля в представлении вторичного квантования,  $\hat{p}_n$  — оператор импульса  $n$ -электрона иона,  $c$  — скорость света в вакууме и  $N$  — число электронов в ионе.

При построении амплитуд вероятности рассеяния принят второй (по постоянной тонкой структуры) порядок квантово-механической теории возмущений. Аналитические структуры дважды дифференциальных сечений рассеяния установлены методами алгебры операторов рождения (уничтожения) фотонов, теории неприводимых тензорных операторов и теории неортогональных орбиталей [8]. Для сечения рекомбинационного свечения ( $RR$ ; рис. 1, *a*, 2, *a*) в дипольном приближении для  $\hat{R}$ -оператора [5] получаем:

$$\frac{d^2 \sigma_{RR}}{d\omega_C d\Omega_C} \equiv \sigma_{RR}^{(2)} = r_0^2 \frac{\omega_C}{\omega} \eta \mu \sum_{n=2}^{\infty} a_{ns} G_{ns}, \quad (6)$$

$$a_{ns} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{\omega_{ns}}{\omega} \langle 1s_0 | \hat{r} | \epsilon p_+ \rangle \langle \epsilon p_+ | \hat{r} | ns_+ \rangle \right)^2, \quad (7)$$

$$G_{ns} = \frac{1}{\gamma_b \sqrt{\pi}} \exp \left\{ - \left( \frac{\omega_{ns} - \omega_C}{\gamma_b} \right)^2 \right\}, \quad (8)$$

где  $\Omega_C$  — пространственный угол вылета рассеянного фотона,  $r_0$  — классический радиус электрона,  $\eta = (2/9)\pi^2 \omega^4 \langle 1s_0 | 1s_+ \rangle^2$ ,  $\eta_0 = 27.21$ ,  $\epsilon = \omega - I_{1s}$ ,  $\omega_{ns} = \omega - I_{1s_{ns}}$ ,  $I_{1s}$  — энергия порога ионизации  $1s^2$ -оболочки иона,  $I_{1s_{ns}}$  — энергия  $1s \rightarrow ns$ -перехода,  $\gamma = \Gamma_{beam}/(2\sqrt{\ln 2})$  и  $\Gamma_{beam}$  — ширина спектрального разрешения предполагаемого эксперимента. Спектральная функция Гаусса-Лапласа возникает в „золотом правиле“ Ферми при замене  $\delta(\omega_{ns} - \omega_C)$  — функции Дирака на  $G_{ns}$ . В (7) реализована форма длины для одноэлектронного оператора радиационного перехода. Возможное расхождение форм длины и скорости в одноконфигурационном приближении Хартри-Фока может быть снято переходом, например, к многоконфигурационному приближению Хартри-Фока при построении полных

волновых функций состояний рассеяния. Индексы „0“ и „+“ соответствуют радиальным частям волновых функций электронов, полученных решением уравнений самосогласованного поля Хартри-Фока для конфигураций основного ( $[0]$ ), промежуточного ( $[1s_x p_+]$ ) и конечного ( $[1s_x n l_+]$ ) состояний иона. Как и следовало ожидать, сечение (6) удовлетворяет асимптотическому условию исчезновения резонансов рекомбинационного свечения: при  $\omega \rightarrow \infty$   $\sigma_{RR}^{(2)} \sim 1/(\gamma_b \omega^3) \rightarrow 0$  для  $\gamma_b > 0$ . В сечении (6) вклад  $K_d$ -канала рассеяния не учитывался, поскольку, как показал расчёт, он на четыре (и более) порядка величины меньше вклада  $K_s$ -канала рассеяния. Для векторов поляризации падающего ( $\mathbf{e}$ ) и рассеянного ( $\mathbf{e}_C$ ) фотонов аксиально-симметричный (относительно  $\mathbf{k}$  — волнового вектора падающего фотона) параметр  $\mu = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_C)^2$  в (6) определяет эффект угловой анизотропии рекомбинационного сечения. Он конкретизирован в соответствии с тремя схемами предполагаемого эксперимента. Первая схема — векторы поляризации фотонов перпендикулярны ( $\perp$ ) плоскости рассеяния. Вторая схема — векторы поляризации фотонов параллельны ( $\parallel$ ) плоскости рассеяния. Третья схема — схема с неполяризованными (NP) фотонами. Плоскость рассеяния проходит через волновые векторы падающего и рассеянного ( $\mathbf{k}_C$ ) фотонов. Как результат, получаем:

$$\mu^\perp = 1, \quad (9)$$

$$\mu^\parallel = \cos^2 \theta, \quad (10)$$

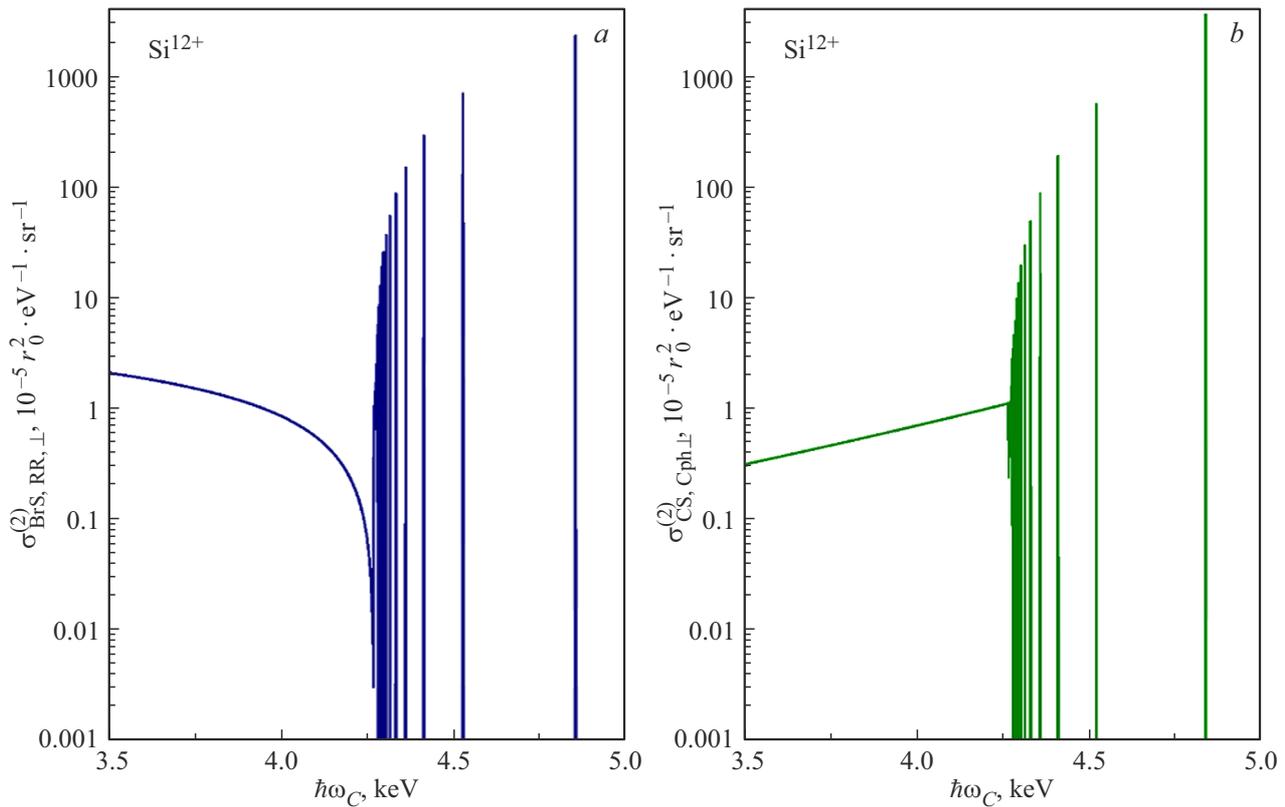
$$\mu_{NP} = \frac{1}{2} (\mu^\perp + \mu^\parallel), \quad (11)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния (угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_C$ ). Для сечения комптоновского фотовозбуждения (СРн; рис. 1, *b*, 2, *b*) вне рамок дипольного приближения для  $\hat{Q}$  оператора получаем:

$$\sigma_{CPh}^{(2)} = r_0^2 \frac{\omega_C}{\omega} \mu \sum_{n=2}^{\infty} b_{np} G_{np}, \quad (12)$$

$$b_{np} = \frac{6}{\epsilon_0} (\langle 1s_0 | 1s_+ \rangle \langle 1s_0 | \hat{j}_1(qr) | np_+ \rangle)^2, \quad (13)$$

где  $\hat{j}_1$  — сферическая функция Бесселя первого рода первого порядка и  $q = |\mathbf{k} - \mathbf{k}_C|$ . Заметим, что в дипольном приближении для  $\hat{Q}$  — оператора  $\hat{j}_1 \rightarrow 0$  и  $\sigma_{CPh}^{(2)} \rightarrow 0$ . В сечении (12) вклад состояний фотовозбуждения с  $l \neq 1$  не учитывался, поскольку, как показал расчёт, он на три (и более) порядка величины меньше вклада  $1snp$ -состояний фотовозбуждения. Как результат, квантовая интерференция амплитуд вероятности каналов рассеяния (1) и (3) практически отсутствует. Асимптотическое условие исчезновения резонансов комптоновского фотовозбуждения принимает следующий вид: при  $\omega \rightarrow \infty$   $\sigma_{CPh}^{(2)} \sim 1/(\gamma_b \omega^{7/2}) \rightarrow 0$  для  $\gamma_b > 0$ .



**Рис. 2.** Дважды дифференциальные сечения неупругого рассеяния фотона ионом  $\text{Si}^{12+}$  для  $\perp$ -схемы эксперимента: (a) сечение тормозного излучения (BrS) и рекомбинационного свечения (RR), (b) сечение нерезонансного комптоновского рассеяния (CS) и комптоновского фотовозбуждения (CPh). Энергия падающего фотона  $\hbar\omega = 6.7 \text{ keV}$ ,  $\hbar\omega_C$  — энергия рассеянного фотона. Угол рассеяния  $\theta = 90^\circ$ . Ширина спектрального разрешения эксперимента  $\Gamma_{beam} = 0.5 \text{ eV}$ .

### Результаты и обсуждение

Результаты расчета в рамках нашей теории представлены на рис. 2, 3 и в таблице. Значение энергии порога ионизации  $1s^2$ -оболочки иона  $\text{Si}^{12+}$   $I_{1s} = 2437.659 \text{ eV}$  взято из работы [9]. Значения энергий переходов для  $I_{1sns}$   $n \in [2; 7, 8, 9, 10]$  и  $I_{1snp}$  для  $n \in [2; 10]$  взяты из работы [10]. Значения  $I_{1sns}$  для  $n \in [3; 6]$  взяты из работы [11]. Для  $n \in [11; \infty]$  энергии переходов получены аппроксимацией вида

$$I_{1snl} = I_{1s} - \frac{1}{n^2} \left( \alpha + \frac{1}{n} \beta \right), \quad (14)$$

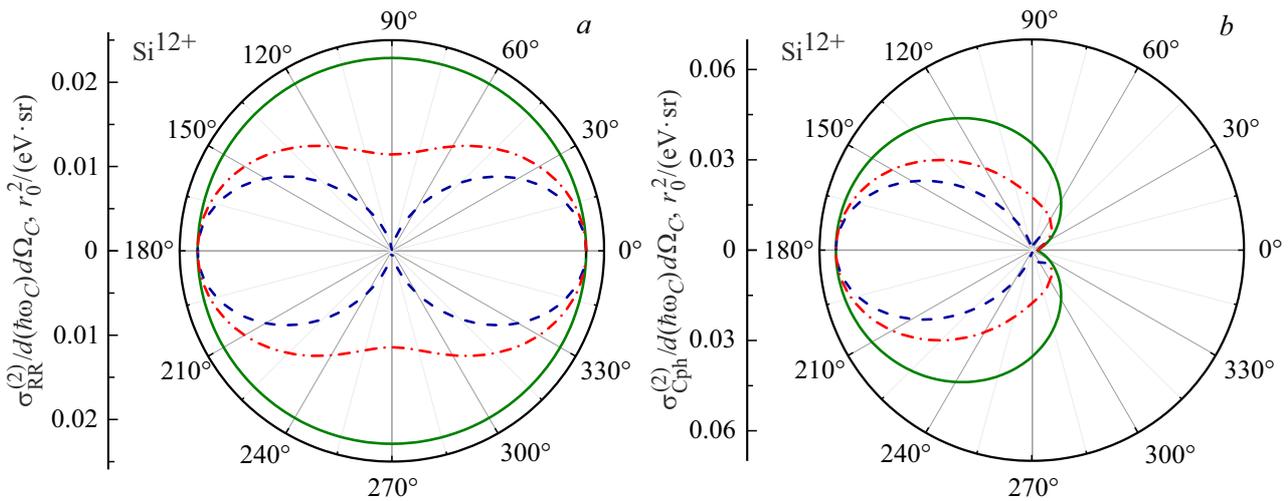
где числа  $\alpha$  и  $\beta$  определяются значениями  $I_{1sml}$  для  $m = 9, 10$ . Амплитуды вероятности дипольного  $J_{ns} = \langle \epsilon p_+ | \hat{r} | ns_+ \rangle$  и контактного  $J_{np} = \langle 1s_0 | \hat{j}_1(qr) | np_+ \rangle$  переходов для  $n \in [2; 10]$  получены на радиальных частях волновых функций приближения Хартри–Фока при энергии падающего фотона  $\omega = 6700 \text{ eV}$  (энергия  $K_\alpha$ -линии эмиссии  $\text{Fe}^{24+}$  [12]) и угле рассеяния  $\theta = 90^\circ$  (рис. 2). Для  $n \in [11; \infty]$  интегралы  $J_{ns}$  и  $J_{np}$  получены аппроксимацией вида

$$J_{nl} = \frac{1}{n^2} \left( \zeta + \frac{1}{n} \rho + \frac{1}{n^2} \chi \right), \quad (15)$$

Спектральные данные лидирующих резонансов рекомбинационного свечения и  $(xp \rightarrow ns)$  комптоновского фотовозбуждения ( $1s \rightarrow np$ ) в  $\perp$ -схеме эксперимента:  $\hbar\omega_C$  — энергия рассеянного фотона, энергия падающего фотона  $\hbar\omega = 6.7 \text{ keV}$ , ширина спектрального разрешения эксперимента  $\Gamma_{beam} = 0.5 \text{ eV}$ , угол рассеяния  $\theta = 90^\circ$

$nl$	$\hbar\omega_C, \text{eV}$	$\sigma^2, 10^{-2} \cdot r_0^2 \text{ eV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$
2s	4845.35	2.290
3s	4520.55	0.685
4s	4407.31	0.289
2p	4835.01	3.546
3p	4517.44	0.548
4p	4405.94	0.187

где числа  $\zeta, \rho$  и  $\chi$  определяются значениями  $J_{ml}$  для  $m = 8, 9, 10$ . При построении индикатрисы комптоновского  $1s \rightarrow 2p$ -фотовозбуждения в амплитуде вероятности  $J_{2p}$  учтена зависимость  $\hat{j}_1$  функции Бесселя от угла рассеяния [см. (17) и рис. 3, b]. Результаты на рис. 2 и в таблице при  $\omega_C > \omega - I_{1s}$ , демонстрируют ярко выраженные резонансные структуры спектров рекомбинационного свечения (рис. 2, a) и комптоновского



**Рис. 3.** Индикатрисы (а) рекомбинационного свечения и (б) комптоновского фотовозбуждения для иона  $\text{Si}^{12+}$  с полярным радиусом и полярным углом при фиксированных значениях энергий падающего ( $\hbar\omega = 6.7 \text{ keV}$ ) и рассеянных ( $\hbar\omega = 4.845 \text{ keV}$  ( $xp \rightarrow 2s, RR$ ),  $\hbar\omega_C = 4.835 \text{ keV}$  ( $1s \rightarrow 2p, CPh$ )) фотонов. Ширина спектрального разрешения эксперимента  $\Gamma_{\text{beam}} = 0.5 \text{ eV}$ . Схема эксперимента:  $\perp$  (сплошная кривая),  $\parallel$  (штриховая кривая), неполяризованные фотоны (штрихпунктирная кривая).

фотовозбуждения (рис. 2, *b*). Континуальные структуры полных дважды дифференциальных сечений рассеяния при  $\omega_C \leq \omega - I_{1s}$  (тормозное излучение (BrS, рис. 2, *a*) и нерезонансное комптоновское рассеяние (CS, рис. 2, *b*)) взяты из работы авторов [5]. Теоретическая ширина двухфотонного распада  $\Gamma_{1s2s} \cong 6.2 \cdot 10^{-8} \text{ eV}$  метастабильного состояния  $1s2s$  ( $^1S_0$ ) получена аппроксимацией результатов работы [13] ( $\text{He}-\text{Ne}^{8+}$ ). Теоретическая ширина дипольно-разрешенного распада состояния  $1s2p$  ( $^1P_1$ )  $\Gamma_{1s2p} \cong 3 \cdot 10^{-2} \text{ eV}$  получена интерполяцией результатов работ [14] ( $\text{Na}^{9+}$ ), [15] ( $\text{Ar}^{16+}$ ) и [16] ( $\text{Cr}^{22+}$ ). Полученные значения для ширин резонансов рекомбинационного свечения ( $\Gamma_{1sns} \cong \Gamma_{1s2s}$ ) недоступны современному эксперименту, включая телескопы в астрофизике [17]. Однако изложенные выше схемы предполагаемого эксперимента могут быть реализованы, в частности, комбинированием методов генерации многозарядных ионов и их захвата в „ловушке“ с последующим рассеянием излучения рентгеновского лазера на свободных электронах (XFEL) [18]. Поэтому в качестве ширины спектрального разрешения эксперимента для всех состояний мы приняли величину  $\Gamma_{\text{beam}} = 0.5 \text{ eV}$ , достигнутую в серии XFEL-экспериментов [19,20]. При этом в формулах (6) и (12) суммирование ограничено значением главного квантового числа  $n_{\text{max}} = 500$ . Результаты в таблице дают представление о порядках величин лидирующих резонансов сечений рассеяния для принятого значения  $\Gamma_{\text{beam}}$ . Переход к теоретическим значениям  $\gamma_{1sn(s,p)}$  обнаруживает тот факт, что резонансы комптоновского фотовозбуждения практически подавлены по сравнению с резонансами рекомбинационного свечения в любом диапазоне энергий падающего на ион фотона:

$$\sigma_{1snp}^{(2)} / \sigma_{1sns}^{(2)} \sim \Gamma_{1sns} / \Gamma_{1snp} \sim 10^{-6}. \quad (16)$$

Результаты на рис. 3, *a* качественно воспроизводят таковые для тормозного излучения работы [5]. Количественное отличие (сечение рассеяния обращается в нуль при  $\theta = 90^\circ$  в  $\parallel$ -схеме эксперимента) от результатов работы [5] обусловлено тем, что в (6) отброшен вклад  $K_d$ -канала рассеяния, пренебрежимо малый по сравнению с вкладом  $K_s$ -канала рассеяния. В случае тормозного излучения [5]  $K_s$ - и  $K_d$ -каналы рассеяния дают сравнимые вклады в сечение рассеяния при  $\theta = 90^\circ$  в  $\parallel$ -схеме эксперимента. Результаты на рис. 3, *b* демонстрируют сильную асимметрию относительно углов  $\theta = 0^\circ$  и  $\theta = 180^\circ$  индикатрисы рассеяния для резонансов комптоновского фотовозбуждения. Причина асимметрии лежит в аналитической структуре  $q$ -параметра  $j_1$ -функции Бесселя:

$$q \sim (\omega^2 + \omega_C^2 - 2\omega\omega_C \cos \theta)^{1/2}. \quad (17)$$

Согласно (17),  $q \sim \omega - \omega_C$  при  $\theta \rightarrow 0^\circ$ , тогда как  $q \sim \omega + \omega_C$  при  $\theta \rightarrow 180^\circ$ . Как результат, для всех схем предполагаемого эксперимента

$$J_{2p}^2(\theta = 0^\circ) \ll J_{2p}^2(\theta = 180^\circ). \quad (18)$$

Таким образом, при рассеянии „вперед“ возникает конус рассеяния с углом раствора  $2\theta \cong 50^\circ$ , в котором резонансы комптоновского фотовозбуждения (рис. 3, *b*) практически подавлены по сравнению с резонансами рекомбинационного свечения (рис. 3, *a*).

## Заключение

Теоретически исследовано полное дважды дифференциальное сечение неупругого рассеяния рентгеновского фотона электронами многозарядного гелиеподобного

атомного иона. Установлены структуры спектров инициированного рекомбинационного свечения и комптоновского фотовозбуждения и их угловая анизотропия. При этом угловая анизотропия комптоновского фотовозбуждения сопровождается сильной асимметрией индикатрис рассеяния. Показано, что при переходе к теоретическим значениям спектральных ширин распада метастабильных ( $1sns$ ) и дипольно-разрешенных ( $1snp$ ) конечных состояний рассеяния резонансы комптоновского фотовозбуждения практически подавлены по сравнению с резонансами рекомбинационного свечения. Полученные результаты носят предсказательный характер.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] B. Zhu, A. Gumberidze, T. Over, G. Weber, Z. Andelkovic, A. Bräuning–Demian, R.J. Chen, D. Dmytriev, O. Forstner, C. Hahn, F. Herfurh, M.O. Herdrich, A.–M. Hillenbrand, A. Kalinin, Ph. Pfafflein, M.S. Sanjari, R.S. Sidhu, U. Spillmann, R. Schuch, S. Schippers, S. Trotsenko, L. Varga, G. Vorobyev, Th. Stöhlker. *Phys. Rev. A*, **105** (5), 2804 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevA.105.052804
- [2] L. Hart, J. Chluba. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **519** (3), 3664 (2023). DOI: 10.1093/mnras/stac 3697
- [3] R.A. Sunyaev, J. Chluba. *Astron. Nachr. AN*, **330**, 657 (2009). DOI:10.48550/arXiv.0908.0435
- [4] А.Н. Хопёрский, А.М. Надолинский, В.А. Явна. *ЖЭТФ*, **130** (4), 579 (2006). DOI: 10.7868/S0370274X17140090
- [5] А.Н. Хопёрский, А.М. Надолинский. *Письма в ЖЭТФ*, **115** (8), 469 (2022). DOI: 10.31857/S1234567822080110
- [6] A.W. Shaw, J.M. Miller, V. Grinberg, D.J.K. Buisson, C.O. Heinke, R.M. Plotkin, J.A. Tomsick, A. Bahramian, P. Gandhi, G.R. Sivakoff. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **516** (1), 124 (2022). DOI:10.1093/mnras/stac2213
- [7] P. Chakraborty, G. J. Ferland, M. Chatzikos, A. C. Fabian, S. Bianchi, F. Guzmán, Y.Su. *Astrophys. J.*, **935** (2), 70 (2022). DOI: 10.3847/1538-4357/ac7eb9
- [8] A.N. Hoppersky, A.M. Nadolinsky, S.A. Novikov. *Phys. Rev. A*, **98** (6), 3424 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.063424
- [9] V.A. Yerokhin, V. Patkóš, K. Pachucki. *Phys. Rev. A*, **106** (2), 2815 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevA.106.022815
- [10] W. C. Martin, R. Zalubas. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **12** (2), 323 (1983).
- [11] V. A. Yerokhin, A. Surzhykov. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **48** (3), 3104 (2019). DOI: 10.1063/1.5121413
- [12] V. Malyshev, Y.S. Kozhedub, D.A. Glazov, I.I. Tupitsyn, V.M. Shabaev. *Phys. Rev. A*, **99** (1), 501(R) (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.99.010501
- [13] G.W.F. Drake, G.A. Victor, A. Dalgarno. *Phys. Rev.*, **180**, 25 (1969). DOI: 10.1103/PhysRev.180.25
- [14] J.E. Sansonetti. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **37** (4), 1659 (2008). DOI: 10.1063/1.2943652
- [15] J. Machado, C.I. Szabo, J.P. Santos, P. Amaro, M. Guerra, A. Gumberidze, G. Bian, J.M. Isac, P. Indelicato. *Phys. Rev. A*, **97** (3), 2517 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.97.032517
- [16] T. Shirai, Y. Nakai, T. Nakagaki, J. Sugar, W.L. Wiese. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **22** (5), 1279 (1993).
- [17] S.R. Bandler, J.A. Chervenak, A.M. Datesman, A.M. Devasia, M.J. DiPirro, K. Sakai, S.J. Smith, T.R. Stevenson, W. Yoon, D. Bennett, B. Mates, D. Swetz, J.N. Ullom, K.D. Irwin, M.E. Eckart, E. Figueroa-Feliciano, D. McCammon, K. Ryu, J. Olson, B. Zeiger. *J. Astron. Telesc. Instrum. Syst.*, **5** (2), 1017 (2019). DOI: 10.1117/1.JATIS.5.2.021017
- [18] P. Indelicato. *J. Phys. B*, **52** (23), 2001 (2019). DOI: 10.1088/1361-6455/ab42c9
- [19] D. Zhu, M. Cammarata, J.M. Feldkamp, D.M. Fritz, J.B. Hastings, S. Lee, H.T. Lemke, A. Robert, J.L. Turner, Y. Feng. *Appl. Phys. Lett.*, **101** (3) 4103 (2012). DOI: 10.1063/1.4736725
- [20] N. Kujala, W. Freund, J. Liu, A. Koch, T. Falk, M. Planas, F. Dietrich, J. Laksman, T. Maltezopoulos, J. Risch, F. Dall’Antonia, J. Grünert. *Rev. Sci. Instrum.*, **91** (10) 3101 (2020). DOI: 10.1063/5.0019935