

01.1;04.4

Магнитное поле внутри и вне тороидального плазменного шнура с током, удерживаемого в равновесии внешним аксиальным полем

© И.В. Соколов, Д.Б. Боровиков

University of Michigan, Ann Arbor, USA

E-mail: igorsok@umich.edu

Поступило в Редакцию 22 февраля 2023 г.

В окончательной редакции 4 апреля 2023 г.

Принято к публикации 4 апреля 2023 г.

Предложено описание магнитного поля снаружи и внутри плазменного кольца с током, удерживаемого в равновесии аксиальным полем. Оно близко к решению Титова–Демулена (1999) и уточняет его, так как описывает равновесие при конечном β и конечном аспектном отношении.

Ключевые слова: равновесный плазменный шнур, корональный выброс массы, тороидальные координаты.

DOI: 10.21883/PJTF.2023.11.55531.19535

Предлагается описание равновесного плазменного шнура с током, применимое к моделированию коронального выброса массы (КВМ) на Солнце. Считается, что источником КВМ в солнечной короне может быть фрагмент тороидального плотного плазменного шнура с током, удерживаемого в равновесии магнитным полем активной области (АО) Солнца. Наложение такой конфигурации [1] на модель АО позволяет численно моделировать исходное равновесие, потерю равновесия из-за неустойчивости и преобразование энергии тока шнура в кинетическую энергию КВМ [2]. В отличие от приложений к магнитному удержанию плазмы, для которых представляют интерес сложные аналитические решения во внешних специально созданных полях [3], предложенное простое решение используется в качестве начального условия для уравнений релаксационной магнитной гидродинамики (РМГД), решение которых подстраивает равновесие к реальным внешним полям АО.

Осесимметричное магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \text{rot}(A_\varphi \mathbf{e}_\varphi)$ ($\mathbf{A} = A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ — векторный потенциал, \mathbf{e}_φ — орт координаты φ), созданное тороидальным током $\mathbf{j} = j_\varphi \mathbf{e}_\varphi$, опишем в тороидальных координатах (u, v, φ) , которые выражаются через цилиндрические координаты (z, r, φ) следующим образом [4]:

$$\sin v = \frac{2R_\infty z}{R_+ R_-}, \quad \cos v = \frac{R^2 - R_\infty^2}{R_- R_+}, \quad \kappa'(u) = \frac{R_-}{R_+},$$

$$H_u = H_v = \frac{R_\infty}{\cosh u - \cos v},$$

где R_∞ — радиус магнитной оси в плоскости $z = 0$, на которой $u \rightarrow \infty$; $H_{u,v}$ — коэффициенты Лямэ; $R = \sqrt{\mathbf{R}^2} = \sqrt{r^2 + z^2}$, \mathbf{R} — радиус-вектор из центра конфигурации до данной точки, а $R_\pm = \sqrt{R^2 + R_\infty^2} \pm 2R_\infty r$ — максимальное (+) и минимальное (–) расстояние от точки до магнитной оси. Орты тороидальных координат выражаются следующим

образом:

$$\mathbf{e}_v = \frac{(R^2 - R_\infty^2)\mathbf{e}_z - 2\mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_z)}{\kappa' R_+^2}, \quad \mathbf{e}_u = [\mathbf{e}_v \times \mathbf{e}_\varphi]. \quad (1)$$

Уравнение Ампера $\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$ после подстановки $\psi = (R_\infty r)^{1/2} A_\varphi$ принимает вид

$$\mu_0 \{H_u H_v J_\varphi\} = \frac{1}{\sqrt{R_\infty r}} \left(-\frac{d^2 \psi}{du^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} + \frac{3\psi}{4 \sinh^2 u} \right), \quad (2)$$

$\{H_u H_v J_\varphi\}$ — плотность тока, отнесенная к $dudv$. Разложение Фурье (i — мнимая единица)

$$\psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(inv) \psi_n(u), \quad J_\varphi = \sqrt{\frac{R_\infty}{r^5}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(inv) j_n(u)$$

разделяет переменные в (2): каждая гармоника поля ψ_n определяется гармоникой тока j_n ,

$$\frac{d^2 \psi_n(u)}{du^2} - \left(n^2 + \frac{3}{4(\sinh u)^2} \right) \psi_n(u) = -\mu_0 R_\infty \frac{j_n(u)}{(\sinh u)^2}. \quad (3)$$

На границе плазменного шнура большой и малый радиусы R_0, a связаны с $R_\infty = \sqrt{R_0^2 - a^2}$, и координата $u = u_0$ имеет постоянное значение, $\kappa'(u_0) = a/(R_0 + R_\infty)$. Вне шнура, при $\kappa'(u) > \kappa'(u_0)$, правая часть уравнения (3) обращается в нуль, и оно имеет решение в виде тороидальной функции $\tilde{P}_{n-1/2}^{-1}(u) = \sqrt{2 \sinh u} P_{n-1/2}^{-1}(\cosh u)$, где $P_{n-1/2}^{-1}(\cosh u)$ — присоединенная функция Лежандра. Внутри шнура решение уравнения (3) выражается через функции $\tilde{Q}_{n-1/2}^{-1}(u) = \sqrt{2 \sinh u} Q_{n-1/2}^{-1}(\cosh u)$. Тороидальные функции вычисляются через гипергеометрические ряды по степеням κ' . Интеграл тока

$$I = \int_{u_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \{H_u H_v J_\varphi\} dv du = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{u_0}^{\infty} \frac{j_n(u) \tilde{Q}_{n-1/2}^{-1}(u)}{(\sinh u)^2} du \quad (4)$$

следует из разложения [5] функции $[2(\cosh u - \cos v)]^{-1/2}$ и уравнения (8.734) из работы [6].

Рассмотрим случай, когда поле содержит только $n = 0$ гармонику, индекс 0 далее опускаем. Полоидальное магнитное поле вне шнура

$$\mathbf{B} = \frac{4R_\infty}{\kappa^3 R_+^3} \left(\psi \mathbf{e}_z - \frac{\kappa^2}{\kappa'} \frac{d\psi}{du} \mathbf{e}_v \right),$$

$$\frac{\psi(u < u_0)}{\mu_0 R_\infty I} = \frac{\tilde{P}_{-1/2}^{-1}(u)}{8}, \quad \kappa = \sqrt{1 - \kappa'^2} \quad (5)$$

совпадает с известным полем бесконечно тонкого кругового тока (см. задачу 2 к гл. 30 в [7]). Для шнура конечной толщины это классическое решение реализуется, если $j \equiv j_0(u)$ (так что $J_\varphi \propto \frac{j_0(u)}{r^{5/2}}$). Согласно (5) и (6), в центре ($\mathbf{R} = 0$), где $\kappa \rightarrow 0$, $\tilde{P}_{-1/2}^{-1}(u) \rightarrow \frac{\kappa^3}{4}$, $\frac{d\tilde{P}_{-1/2}^{-1}(u)}{du} \rightarrow \frac{3\kappa}{4}$, $\kappa' \rightarrow 1$, поле равно $\mathbf{B}_c = \mu_0 I \mathbf{e}_z / (2R_\infty)$. Вблизи и внутри шнура имеем

$$\mathbf{B} = \frac{R_\infty^{3/2}}{r^{3/2}} \left[\frac{2\mathbf{R}(\mathbf{B}_c \cdot \mathbf{R}) + \mathbf{B}_c(R_\infty^2 - R^2)}{R_+^2 \kappa'} B^{(p)}(u) + \mathbf{B}_c B^{(z)}(u) \right], \quad (6)$$

где отнесенные к B_c амплитуды аксиального $B^{(z)}(u)$ и полоидального $B^{(p)}(u)$ полей суть

$$B^{(z)} \equiv \frac{\psi}{\mu_0 R_\infty I}, \quad B^{(p)} = \frac{\kappa^2}{\kappa'} \frac{dB^{(z)}}{du}. \quad (7)$$

Если плотность тока в шнуре однородна, $j(u > u_0) = -3I/[4d\tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u_0)/du_0]$, решение уравнения (3) дается суммой частного (постоянного) решения и общего решения однородного уравнения $\propto \tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u)$, обеспечивающего непрерывность полей при $u = u_0$:

$$\begin{aligned} B^{(z)}(u < u_0) &\equiv \frac{\psi}{\mu_0 R_\infty I}, \\ B^{(p)}(u > u_0) &= \frac{\kappa^2}{8\kappa'} \frac{d\tilde{P}_{-1/2}^{-1}(u_0)/du_0}{d\tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u_0)/du_0} \frac{d\tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u)}{du}, \\ \frac{\psi(u > u_0)}{\mu_0 R_\infty I} &= \frac{d\tilde{P}_{-1/2}^{-1}(u_0)/du_0}{8d\tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u_0)/du_0} \tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u) \\ &\quad - \frac{1}{d\tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u_0)/du_0}. \end{aligned} \quad (8)$$

На рис. 1 показаны амплитуды (8) для шнура с $a/R_0 \approx 0.2$. Другие частные решения уравнения (3) для нулевой гармоники поля ($n = 0$) $\psi_0 \sim P_m(\coth u)$ возникают, если распределение тока описывается полиномом Лежандра $j_0(u) \sim P_m(\coth u)$ от аргумента $\coth u = \frac{R_+^2 + R_-^2}{R_+^2 - R_-^2}$, более громоздким является решение для тока, представимого в виде линейной комбинации полиномов Лежандра. Напомним, что однородное распределение тока, приводящее к уравнению (8),

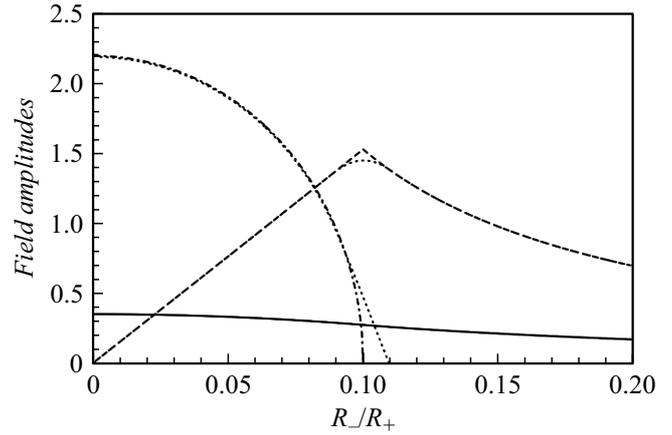


Рис. 1. Безразмерные амплитуды аксиального $B^{(z)}(u)$ (сплошная кривая), полоидального $B^{(p)}(u)$ (штриховая кривая) и тороидального $\frac{b(u)}{B_c}$ (штрихпунктирная кривая) полей для тороидального шнура с отношением $\frac{a}{R_0} = 0.2$. Аргумент функций $\kappa'(u) = R_-/R_+$ изменяется внутри шнура в пределах от нуля на тороидальной магнитной оси до поверхности шнура при $\kappa'(u) = \kappa'(u_0) \approx \frac{a}{2R_0} = 0.1$, значения $\kappa' > 0.1$ отвечают области снаружи шнура. Пунктиром показаны варианты кривых для распределения тока, которое в узкой области вблизи границы шнура спадает до нуля на границе, в отличие от однородного распределения тока (все прочие кривые), которое скачком изменяется от конечного значения внутри шнура к нулевому току вне его.

соответствует полиному Лежандра нулевого порядка: $P_0(\coth u) = 1$.

Равновесие контролируется тороидальным полем $\pm B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ и давлением плазмы, для которых примем $B_\varphi^2 = b^2(u)R_\infty^3/r^3$, $P = p(u)R^3/r^3$. Сила, отнесенная к единице объема, включает влияние полоидального поля на тороидальный ток

$$J_\varphi \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{B} = \frac{j(u) \sinh u}{r^4} \frac{d\psi}{du} \mathbf{e}_u + \frac{J_\varphi A_\varphi}{2r} \mathbf{e}_r, \quad (9)$$

а также действие тороидального поля на полоидальный ток и градиент давления

$$\begin{aligned} \frac{\text{rot}(B_\varphi \mathbf{e}_\varphi)}{\mu_0} \times B_\varphi \mathbf{e}_\varphi - \nabla P &= -\frac{R_\infty^3 \sinh u}{r^4} \frac{dp_{\text{tot}}(u)}{du} \mathbf{e}_u \\ &\quad + \frac{3P + B_\varphi^2/(2\mu_0)}{r} \mathbf{e}_r, \end{aligned} \quad (10)$$

где $p_{\text{tot}}(u) = p(u) + \frac{b^2(u)}{2\mu_0} = (1 + \beta) \frac{b^2}{2\mu_0}$ — полное давление. Суммарная сила, направленная по \mathbf{e}_u , исчезает, если $R_\infty^3 dp_{\text{tot}}/d\psi = j(u)$. Для однородного тока $j(u)$ интегрирование дает

$$p_{\text{tot}}(u) = \frac{3B_c^2}{8\mu_0} \frac{d\tilde{P}_{-1/2}^{-1}(u_0)/du_0}{[d\tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u_0)/du_0]^2} [\tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u_0) - \tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u)]. \quad (11)$$

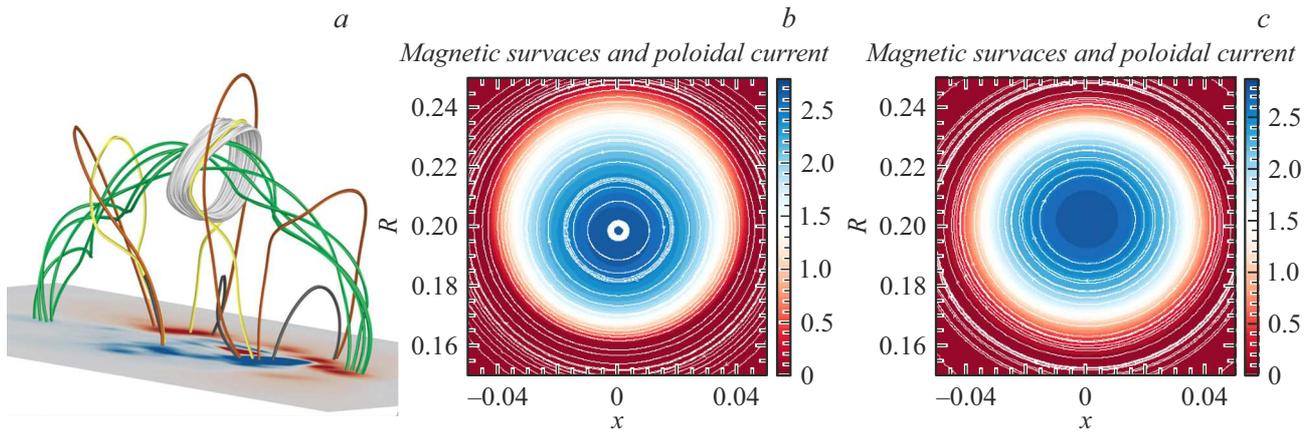


Рис. 2. Применение полученного решения к описанию КВМ 2013-04-11. Большой и малый радиусы плазменного шнура $R_0 = 0.2$, $a = 0.04$ отнесены к солнечному радиусу, центр конфигурации имеет каррингтоновскую долготу $2135 : 79.8^\circ$ и широту 12.8° . *a* — силовые линии суммарного магнитного поля АО и наложенной плазменной конфигурации с током. Зеленый жгут перекрученных магнитных линий — внутреннее поле плазменного шнура. Линии других цветов показывают силовые линии внешнего поля с различной топологией. Красным и синим цветом на (горизонтальной) поверхности Солнца показаны образующие АО солнечные пятна с положительной и отрицательной полярностью. *b* — магнитные поля в меридиональном сечении токового шнура: белые кривые — силовые линии полоидального поля (B_z, B_r) (они же сечения магнитных поверхностей), цветом показан уровень величины rB_ϕ , пропорциональной полоидальному току. *c* — то же, но после РМГД-релаксации в течение 6000 с. Линии равного тока идеально совпадают с магнитными поверхностями, демонстрируя равновесность полученной конфигурации. Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

Перепад давления из глубины шнура к его поверхности уравнивает пинч-эффект тороидального тока. Если $\beta = 2\mu_0 p(u)/b^2(u)$, равновесие (11) полностью определяется распределением тороидального поля, амплитуда которого $b(u)/B_c$ показана на рис. 1. Особенности амплитуд на границе шнура (вертикальная асимптота в амплитуде тороидального поля, скачок производной в амплитуде полоидального поля) исчезают, если в малой окрестности границы ввести распределение тока $j_0 \sim [\coth(u_0 - \varepsilon) - \coth u]$, $u_0 - \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, обращающееся в нуль на границе шнура.

Результирующая при сложении (9), (10) сила $\mathbf{f}_r \parallel \mathbf{e}_r$ стремится растянуть шнур в направлении \mathbf{e}_r . Удержать шнур от разлета может внешнее поле $\mathbf{B}^{(str)} = B^{(str)}\mathbf{e}_z$, оценку которого (см. [3,8]) получим, интегрируя сумму растягивающей и удерживающей сил $\mathbf{f}_r + J_\phi \mathbf{e}_\phi \times \mathbf{B}^{(str)}$, скалярно умноженную на \mathbf{R} (такая интегральная оценка называется вириальной теоремой Шафранова [9]), по объему шнура, элемент объема равен $dV = r d\phi ds$:

$$\int (\mathbf{f}_r \cdot \mathbf{R} + J_\phi r B^{(str)}) dV = \int \left(\frac{j_\phi A_\phi}{2} + \frac{B_\phi^2}{2\mu_0} + 3P \right) dV + 2\pi B^{(str)} I R_\infty^2 \approx \frac{LI^2}{2} + 2\pi B^{(str)} I R_\infty^2. \quad (12)$$

Первый интеграл при постоянном β выражается через энергию магнитного поля, что позволяет выразить его как $\frac{1}{2}LI^2$ (где L — индуктивность) и дать оценку удерживающего поля

$$B^{(str)} \approx -\frac{LI}{4\pi R_\infty^2},$$

$$L = \frac{2}{I^2} \int \left[\frac{j_\phi A_\phi}{2} + \frac{B_\phi^2}{2\mu_0} \left(1 + \frac{2\beta}{1+\beta} \right) \right] dV \approx \mu_0 R_\infty \left(\frac{\pi^2 \tilde{P}_{-1/2}^{-1}(u_0)}{2 \tilde{Q}_{-1/2}^{-1}(u_0)} + \frac{3}{4} + \frac{\beta}{1+\beta} \right). \quad (13)$$

При $a/R_0 \ll 1$ и $\beta = 0$ выражение (13) совпадает с использованным в [1,8]. При выполнении интегральной оценки (13) для удерживающего поля шнур как целое не смещается по большому радиусу (глобальное равновесие), тогда как локальное равновесие налагает обязательное ограничение на локальное удерживающее поле (уравнение (3.47) в [3]).

Для применения полученного решения в качестве модели КВМ в магнитной конфигурации породившей его АО ищется близкая к полуокружности линия, на которой поперечное к плоскости окружности магнитное поле $B^{(str)}$ приблизительно постоянно [10]. Уравнение (13) определяет ток в равновесном плазменном шнуре в найденном поле, который в свою очередь определяет магнитное поле шнура. Трехмерная конфигурация полного магнитного поля АО и плазменного шнура показана на рис. 2, *a* в применении к КВМ 2013-04-11, большой и малый радиусы плазменного шнура, отнесенные к солнечному радиусу, выбраны равными $R_0 = 0.2$, $a = 0.04$, найденное удерживающее магнитное поле равно $B^{(str)} \approx 2.7 \cdot 10^{-4}$ Т. При постоянном плазменном параметре $\beta = 2\mu_0 P/B_\phi^2$ найденное распределение тороидального магнитного поля позволяет найти давление, а при заданной температуре T также и распределение плотности $\rho \propto P/T$. На рис. 2, *b*

показано меридиональное сечение плазменного шнура. Белым показаны магнитные силовые линии полоидального поля (B_z, B_r) (иными словами, сечения магнитных поверхностей [3,7]). Цветом показан уровень величины rB_ϕ , т.е. полоидального тока, величина которого в равновесии должна быть постоянной на магнитной поверхности [3,7]. Видно, что изолинии тока несколько отклоняются от магнитных поверхностей, так что равновесие неточное.

Для достижения равновесия подставим распределения полей и параметров плазмы в качестве начального условия в уравнения РМГД, которые отличаются от уравнений магнитной гидродинамики (см. [7]) добавлением тормозящей силы с плотностью $-\frac{\rho}{\tau}\mathbf{U}$, направленной против вектора скорости \mathbf{U} и вызывающей релаксацию скорости, возникающей в исходно неравновесном распределении, за время порядка $\tau \sim 10^3$ s. В качестве примера рассмотрим релаксацию в однородном внешнем поле, что позволяет решать двумерные осесимметричные уравнения РМГД. Результат эволюции в течение 6000 s приведен на рис. 2, с, на котором очевидно выравнивание уровней тока на магнитных поверхностях и достижение точного равновесия. Видеофайл (см. дополнительные материалы) демонстрирует, что переход к равновесию происходит через затухающие внутренние колебания. В трехмерной версии РМГД-модели шнур может приближаться к трехмерному равновесию также через изгибные колебания, так что равновесная форма шнура в реальном неоднородном поле отличается от тороидальной.

Благодарности

Авторы благодарят В.С. Титова (PSI Inc., San Diego, USA) за полезные обсуждения.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] V.S. Titov, P. Demoulin, *Astron. Astrophys.*, **351**, 707 (1999).
- [2] J. Linker, T. Torok, C. Downs, R. Lionello, V. Titov, R.M. Caplan, Z. Mikic, P. Riley, *AIP Conf. Proc.*, **1720**, 020002 (2016). DOI: 10.1063/1.4943803
- [3] L.E. Zakharov, V.D. Shafranov, *Rev. Plasma Phys.*, **11**, 153 (1986).
- [4] P.M. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics* (McGraw–Hill, N.Y., 1953).
- [5] Г.Ч. Шушкевич, *ЖТФ*, **67** (4), 123 (1997). [G.Ch. Shushkevich, *Tech. Phys.*, **42** (4), 436 (1997). DOI: 10.1134/1.1258698].
- [6] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products* (Academic Press, N.Y., 2014).
- [7] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред* (Наука, М., 1982).
- [8] B. Kliem, T. Torok, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 255002 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.255002
- [9] L. Faddeev, L. Freyhult, A.J. Niemi, P. Rajan, *J. Phys. A*, **35**, L133 (2002). DOI: 10.1088/0305-4470/35/11/101
- [10] V.S. Titov, T. Török, Z. Mikic, J.A. Linker, *Astrophys. J.*, **790**, 163 (2014). DOI: 10.1088/0004-637X/790/2/163