

06

## Хрупкое разрушение проводника в сильном импульсном магнитном поле

© П.А. Русских, Г.Ш. Болтачев, С.Н. Паранин

Институт электрофизики УрО РАН,  
620016 Екатеринбург, Россия  
e-mail: russkikh\_p@inbox.ru

Поступило в Редакцию 9 ноября 2022 г.  
В окончательной редакции 1 марта 2023 г.  
Принято к публикации 2 марта 2023 г.

Проанализированы основные факторы, приводящие к разрушению проводника под действием сильного импульсного магнитного поля. Теоретическая модель соответствует геометрии цилиндрического толстостенного соленоида и учитывает диффузию магнитного поля, омический нагрев материала и возникающие в нем механические напряжения. В качестве порогового поля  $B_{th}$ , разделяющего области безопасных (неразрушающих) и опасных полей, использована амплитуда магнитного поля, при которой индуцируемые напряжения в материале достигают выполнения условия пластичности Мизеса. В случае изначально однородного материала соответствующая этому пределу максимальная температура нагрева, предопределяющая уровень термомеханических напряжений, выведена аналитически. В общем случае на основе анализа расчетных значений порогового поля исследовано влияние различных параметров (характеристики магнитного импульса, упругие модули материала и т.д.) на стойкость проводника в импульсном магнитном поле и предложены способы повышения порогового поля, в частности, за счет использования различных пространственных профилей начального удельного сопротивления. Показано, что в сравнении с однородным материалом сформированный на поверхности модифицированный слой с повышенным удельным сопротивлением позволил существенно увеличить амплитуду магнитного импульса, выдерживаемого материалом без разрушения.

**Ключевые слова:** диффузия магнитного поля, пластическая деформация, термомеханические напряжения, предел текучести, условие Мизеса.

DOI: 10.21883/JTF.2023.05.55460.243-22

### Введение

Повышенное внимание многих исследователей в настоящее время привлекают высокоперспективные методы магнитно-импульсной обработки материалов. Основанные на этих методах технологии применяются для экспериментов по высокоскоростному одноосному растяжению [1], прессованию наноразмерных порошков [2,3], деформированию проводящих оболочек [4], созданию прочного соединения между разнородными материалами [5,6] и многого другого. Одним из ограничений для широкого распространения подобных технологий является невысокий ресурс индукторных систем, генерирующих импульсные магнитные поля. На текущий момент он составляет десятки импульсов при амплитуде магнитного поля около 50 Т и длительности импульса порядка единиц–десятков микросекунд. Причиной малого срока эксплуатации является довольно быстрое растрескивание рабочей поверхности проводящего материала (внутренняя поверхность индуктора, либо поверхность концентратора магнитного потока) [7,8]. Появление трещин обусловлено, главным образом, наличием сильных термомеханических напряжений вследствие быстрого, практически адиабатического, омического нагрева проводящего материала. Дальнейшая эксплуатация

индуктора (концентратора) с зародившимися трещинами на поверхности приводит к их быстрому росту из-за „saw effect“ [8,9] и, в конечном счете, к разрушению материала.

Зарождение трещин на изначально гладкой поверхности проводника в случае материала, обладающим некоторым ресурсом пластичности, происходит по механизму малоциклового усталости [10–14]. При этом превышение предела текучести, соответствующего некоторой пороговой амплитуде магнитного поля  $B_{th}$ , в течение первого импульса не является обязательным условием дальнейшего разрушения. Незначительная пластическая деформация, реализуемая на стадии омического нагрева, при последующем охлаждении неизбежно приводит к появлению остаточных упругих напряжений, растягивающих поверхность в тангенциальных направлениях. Такой материал оказывается „подготовлен“ к последующим импульсам магнитного поля и может выдержать их без повторного выхода на уровень предела текучести. Механизм малоциклового усталости будет запущен, если в ходе первого импульса материал дважды достигает порога текучести [15]: при омическом нагреве и при последующем охлаждении. В то же время в случае относительно хрупкого материала, не обладающего достаточным ресурсом пластичности, разрушительным мо-

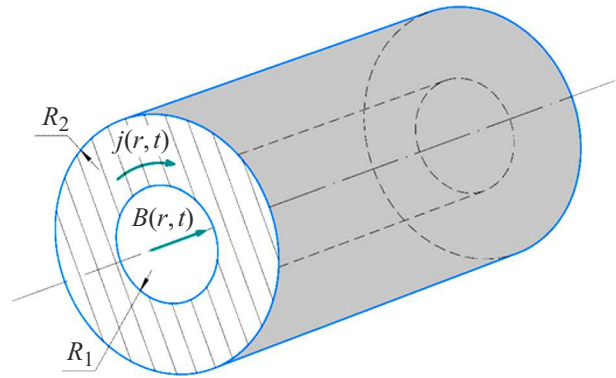
жет оказаться даже однократное достижение предела текучести при самом первом нагреве [16]. Именно такое (*хрупкое*) разрушение проводящего материала является предметом исследования в настоящей работе. Оценка склонности к хрупкому разрушению будет производиться по пределу текучести в виде напряжений Мизеса. Поэтому в дальнейшем мы в качестве критерия разрушения будем использовать минимальную амплитуду магнитного поля на поверхности проводника, при которой индуцируемые термомеханические напряжения в материале удовлетворяют условию пластичности Мизеса, т.е. материал достигает предела текучести. Эту минимальную амплитуду мы будем называть пороговым полем  $B_{th}$ , разделяющим области безопасных (неразрушающих) и опасных полей.

Для увеличения ресурса индукторных систем могут быть применены различные подходы: оптимизация формы внешнего магнитного импульса  $B_0(t)$  [17,18], использование диамагнитного экрана с инерционным удержанием [19] и др. Однако наиболее привлекательным выглядит способ, обсуждаемый в [19,20], который заключается в создании градиентного профиля сопротивления в проводящем материале. В материале со спадающим от поверхности удельным электросопротивлением основной ток и нагрев смещаются вглубь материала [17,18,21], что может заметно увеличить его стойкость в импульсных полях. Стоит отметить, что в исследованиях [17,18,21] не учитывалось изменение электрического сопротивления при нагреве. Этот фактор становится определяющим для сильных магнитных полей, амплитудой около 30 Т и более, в частности, им обусловлен известный „пик эффект“ [22,23].

Таким образом, в настоящей работе мы исследуем воздействие сильного, порядка 30 Т, импульсного магнитного поля на хрупкий проводящий материал в форме полого цилиндра как с пространственно однородным начальным удельным сопротивлением, так и с различными профилями начального электросопротивления на внутренней (рабочей) поверхности. Цилиндрическая геометрия проводника подразумевает использование полученных результатов для увеличения ресурса индукторных систем. Амплитуда полей, исследуемых в настоящей работе, составляет десятки тесла, что, с одной стороны, позволяет пренебречь эффектами магнитного гистерезиса, наблюдаемыми в слабых полях [24–27], а с другой стороны, избежать процессов плавления и взрыва проводника, происходящих в сверхсильных магнитных полях (более 100 Т), что требует использования широкодиапазонных уравнений состояния вещества [22,28–31].

## 1. Теоретическая модель

Будем рассматривать полый цилиндрический проводник, представленный на рис. 1. Естественным „слабым местом“ такого проводника является внутренняя поверхность вблизи острой торцевой кромки. На практике для



**Рис. 1.** Геометрия модельного проводника (полый цилиндр), имитирующего внутреннюю область индуктора или концентратора магнитного потока.

нивелирования нежелательных краевых эффектов при изготовлении концентраторов магнитного потока эту кромку сглаживают [7]. Экспериментальные данные о разрушении таких концентраторов показывают, что зарождение трещин на их поверхности может происходить в средней части концентратора [7], т.е. не связано с геометрией торцевой части. Поэтому мы с целью упрощения теоретической модели будем считать проводящий цилиндр достаточно протяженным, пренебрегая краевыми эффектами [32,33]. В такой постановке, используя цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$  с  $z$ -осью, совмещенной с осью проводника, можно утверждать, что смещение материала  $\mathbf{w}$  возможно только в радиальном направлении, т.е.  $\mathbf{w} = (w, 0, 0)$ , индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  имеет только  $z$ -компоненту, т.е.  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ , и т.д. При этом все искомые функции зависят от радиуса  $r$  и времени  $t$ .

Пространственные распределения магнитного поля  $B(r, t)$  и плотности тока  $j(r, t)$  определяются известным уравнением магнитной диффузии [22]:

$$\frac{\mu}{\rho_e} \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial r} \right) \frac{\partial B}{\partial r},$$

$$j(r, t) = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B}{\partial r}, \quad (1)$$

где  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/м — магнитная постоянная. Начальным условием для дифференциального уравнения (1) является отсутствие магнитного поля в проводнике в момент  $t = 0$ . В качестве граничных условий будем использовать отсутствие магнитного поля на внешней границе проводящего цилиндра ( $B = 0$  при  $r = R_2$ ) и импульс магнитного поля во внутренней полости, т.е. на границе  $r = R_1$ , в виде четырех периодов затухающей синусоиды:

$$B_0(t) = B_m \exp\left(-\frac{t}{T_e}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right), \quad 0 < t < 4T_s, \quad (2)$$

с параметрами  $T_e = 20 \mu\text{s}$  и  $T_s = 24 \mu\text{s}$ , что соответствует типичным импульсам магнитного поля в экспериментах [7,34]. Удельное электрическое сопротивление  $\rho_e$  материала задавалось в следующем виде:

$$\rho_e(r, t) = \rho_e^* [\gamma_e(r) + k_\rho T(r, t)], \quad (3)$$

где  $\rho_e^*$  — начальное электрическое сопротивление (до нагрева) материала вдали от модифицированной поверхности, множитель  $k_\rho$  — температурный коэффициент сопротивления,  $T$  — приращение температуры относительно начального (комнатного) значения. Зависимость  $\gamma_e(r)$ , определяющая начальное электрическое сопротивление в модифицированном слое, задавалась как [15]:

$$\gamma_e(r) = 1 + \gamma_0 \exp[-(x/x_c)^{N_\gamma}], \quad x = r - R_1, \quad (4)$$

где  $\gamma_0$  — „амплитуда“ модификации,  $x_c$  — эффективная глубина модифицированного слоя и  $N_\gamma \geq 1$  — параметр, характеризующий резкость перехода на границе модифицированного слоя. Чем больше  $N_\gamma$ , тем меньше переходная область между поверхностным (вблизи  $r = R_1$ ) высокорезистивным (при  $\gamma_0 > 0$ ) слоем и внутренней областью проводника. Для резкого ( $N_\gamma \rightarrow \infty$ ) ступенчатого профиля  $\gamma_e = 1 + \gamma_0$  при  $x < x_c$  и  $\gamma_e = 1$  при  $x > x_c$ . Минимальное значение  $N_\gamma = 1$  соответствует наиболее плавному, экспоненциальному профилю начального удельного сопротивления.

Приращение температуры  $T$  описывается уравнением теплопроводности в виде

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \rho_e j^2 + \sigma^{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}, \quad (5)$$

где  $c$  — объемная теплоемкость,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности, второй член справа описывает омический нагрев, а третий член — механическую работу ( $\sigma^{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  — тензоры напряжений и деформаций соответственно). Начальное условие к уравнению (5):  $T(r) = 0$  при  $t = 0$ . В качестве граничных условий использовались адиабатичность внутренней и внешней поверхности, т.е.  $\partial T / \partial r = 0$  при  $r = R_1$  и  $r = R_2$ .

Появление механических напряжений в толще проводящего материала при протекании по нему тока  $j(r, t)$  обусловлено, во-первых, действием объемной силы Ампера  $f_a = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]$ , для радиальной компоненты которой имеем

$$f_a = -\frac{1}{\mu} B \frac{\partial B}{\partial r},$$

и, во-вторых, термоупругими напряжениями, которые будем описывать в рамках модели линейного упругого тела [35,36]:

$$\sigma_i = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \text{tr}(\varepsilon_{ij}) + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_i - \frac{E}{(1-2\nu)} \beta_V T, \quad (6)$$

$$(i = r, \varphi, z),$$

где  $\beta_V$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Задача о распределении механических напряжений и

деформаций анализируется в квазистатическом приближении, которое соответствует условию механического равновесия [36]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \frac{1}{\mu} B \frac{\partial B}{\partial r}. \quad (7)$$

В качестве граничных условий для механической задачи (6), (7) использовались: отсутствие радиальных напряжений на внутренней границе  $\sigma_r(R_1) = 0$  [12] и отсутствие смещений на внешней границе  $w(R_2) = 0$ . Для определения предельных упругих напряжений и деформаций применяется критерий текучести Мизеса [36]

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 = 2\sigma_s^2,$$

$$\sigma_s(T) = \sigma_{s,0} \left( 1 - \frac{T}{T_{melt}} \right), \quad (8)$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести материала при одноосном растяжении, аппроксимированный линейной зависимостью от температуры,  $T_{melt}$  — температура плавления. Для расчетов использованы значения  $\sigma_{s,0} = 1 \text{ GPa}$  и  $T_{melt} = 1400^\circ\text{C}$ , соответствующие стали 30ХГСА [37].

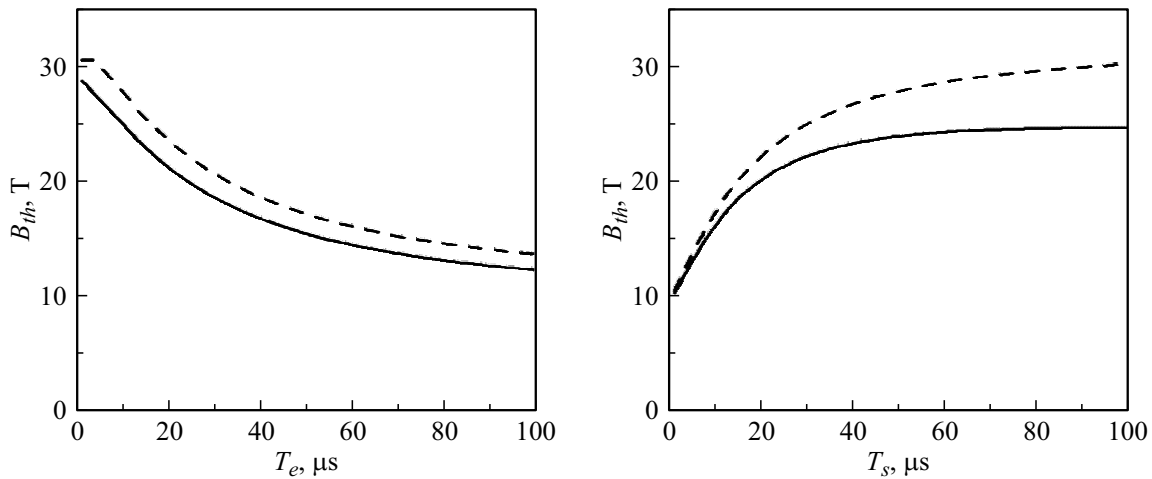
Ниже представлены полученные в рамках сформулированной теоретической модели результаты для цилиндрического проводника с радиусами  $R_1 = 5 \text{ mm}$ ,  $R_2 = 13 \text{ mm}$  и параметрами, соответствующими стали 30ХГСА [37]:  $\rho_e^* = 42 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ,  $c = 461 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $k_\rho = 1.38 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $\lambda = 39 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,  $E = 205 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\beta_V = 13 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

## 2. Результаты и обсуждение

### 2.1. Однородный материал: влияние различных параметров на величину порогового поля

В данном разделе мы исследуем влияние импульсного магнитного поля на однородный проводящий материал, т.е. когда в (4) „амплитуда“ модификации  $\gamma_0 = 0$ , и в начальный момент удельное сопротивление  $\rho_e = \rho_e^*$  во всем проводнике. Как отмечено во введении, одним из способов повышения ресурса индукторной системы является оптимизация формы внешнего магнитного импульса  $B_0(t)$  [17,18]. В рамках сформулированной в предыдущем разделе теоретической модели эта возможность может быть реализована за счет варьирования параметров  $T_e$  и  $T_s$  импульса (2). В реальных экспериментальных установках [7,34] эти параметры определяются сопротивлением и индуктивностью индукторной системы, а также емкостью используемой конденсаторной батареи.

На рис. 2 представлены зависимости расчетного порогового поля  $B_{th}$  от величины  $T_e$  при фиксированном значении  $T_s = 24 \mu\text{s}$  и, наоборот, от величины  $T_s$  при фиксированном  $T_e = 20 \mu\text{s}$ . Там же для сравнения представлены аналогичные зависимости, полученные в плоской геометрии [15], т.е. соответствующие пределу



**Рис. 2.** Зависимости порогового поля  $B_{th}$  для стального цилиндрического проводника ( $R_1 = 5 \text{ mm}$ ) при импульсе в виде (2) от параметра  $T_e$  при фиксированном  $T_s = 24 \mu\text{s}$  (слева) и от параметра  $T_s$  при фиксированном  $T_e = 20 \mu\text{s}$  (справа). Штриховые линии — плоская геометрия ( $R_1 \rightarrow \infty$ ).

$R_1 \rightarrow \infty$ . Зависимость  $B_{th}(T_e)$  показывает, что для повышения ресурса индукторной системы предпочтительно использовать контур с быстрым затуханием (малые значения  $T_e$ ), т.е. с относительно высокими значениями электрического сопротивления. Это объясняется тем, что основным („рабочим“) полупериодом, который создает главный максимум магнитного поля, является первый полупериод, при  $t < T_s/2$ , в то время как последующие электрические колебания приводят лишь к дополнительному („паразитному“) нагреву проводящего материала. Таким образом, наиболее перспективно было бы использовать контур, полностью отсекающий протекание тока через индуктор по завершении первого полупериода колебаний [15].

Зависимость  $B_{th}(T_s)$ , представленная на рис. 2 справа, показывает, что пороговое поле заметно возрастает при использовании относительно длинных импульсов (2), период  $T_s$  которых превышает характерное время затухания  $T_e$ . Во-первых, это опять же связано с эффективным „гашением“ последующих („паразитных“) колебаний при  $T_s > T_e$ . В дополнение к этому фактору, увеличение  $T_s$  приводит к росту толщины скин-слоя,  $\delta = \sqrt{\rho_e T_s / (\pi \mu_0)}$ , что снижает резкую локализацию поверхностного тепловыделения и распределяет тепло по проводящему материалу более равномерно. Это, в свою очередь, снижает температуру нагрева на поверхности, что позволяет реализовать более высокое магнитное поле без угрозы разрушения.

Здесь же можно отметить, что в плоской геометрии, в отличие от цилиндрической, материал демонстрирует большую стойкость, т.е. большие значения пороговых полей  $B_{th}$ . Последнее обусловлено, во-первых, более высокой концентрацией тока в цилиндрическом проводнике в области малых радиусов [22], что математически связано с наличием члена, пропорционального  $r^{-1}$  в (1), и, во-вторых, с дополнительным источником роста

значения коэффициента влияния (9) для теплоемкости  $c$ , коэффициента теплового расширения  $\beta_V$ , модуля Юнга  $E$ , коэффициента Пуассона  $\nu$  и параметра  $\sigma_{s,0}$

$\chi$	$c$	$\beta_V$	$E$	$\nu$	$\sigma_{s,0}$
$P_\chi$	0.49	-0.44	-0.44	-0.23	0.44

напряжений при нагреве искривленных слоев — член, пропорциональный  $r^{-1}$  в (7).

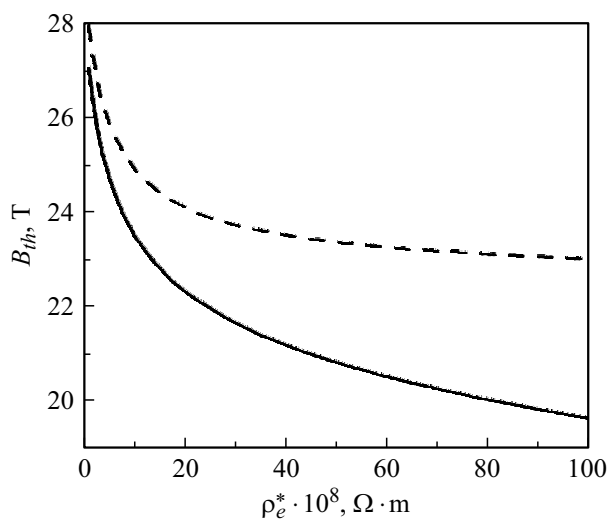
Далее проанализируем влияние различных индивидуальных свойств материала (теплоемкость, модуль Юнга и т.п.) на его стойкость по отношению к магнитному импульсу (2) с фиксированными параметрами  $T_e = 20 \mu\text{s}$  и  $T_s = 24 \mu\text{s}$ . Конечно, для заданного материала изменение его индивидуальных свойств труднореализуемо (например, посредством допирования), однако такой анализ может быть полезен для выбора исходного материала на стадии изготовления индукторной системы. В качестве величины, характеризующей влияние некоторого параметра (обозначим, как  $\chi$ ) на стойкость проводящего материала, будем использовать

$$P_\chi = \frac{\chi}{B_{th}} \left( \frac{\partial B_{th}}{\partial \chi} \right). \quad (9)$$

Таблица показывает значения коэффициентов влияния  $P_\chi$  для таких параметров, как теплоемкость  $c$ , коэффициент теплового расширения  $\beta_V$ , модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и предел текучести при комнатной температуре  $\sigma_{s,0}$ . Зависимости  $B_{th}(\chi)$  для всех этих параметров близки к линейным в пределах их изменения, характерных для различных сталей [37]. Видим, что наибольшим влиянием на пороговое поле обладает теплоемкость  $c$ . Увеличению стойкости соответствуют более высокие значения теплоемкости, по-

сколькx это снижает температуру нагрева. Увеличение упругих параметров  $E$  и  $\nu$ , так же, как и увеличение  $\beta_V$ , приводит к росту термоупругих напряжений при заданном нагреве, что снижает величину порогового поля. Повышение предела текучести оказывало то же влияние на  $B_{th}$ , что и снижение трех предыдущих параметров. Таким образом, проведенный анализ показывает, что при прочих равных условиях (в первую очередь, при одинаковой удельной проводимости) в качестве материала индуктора предпочтительнее использовать материал с высокими значениями теплоемкости и предела прочности и низкими значениями коэффициента теплового расширения и упругих параметров.

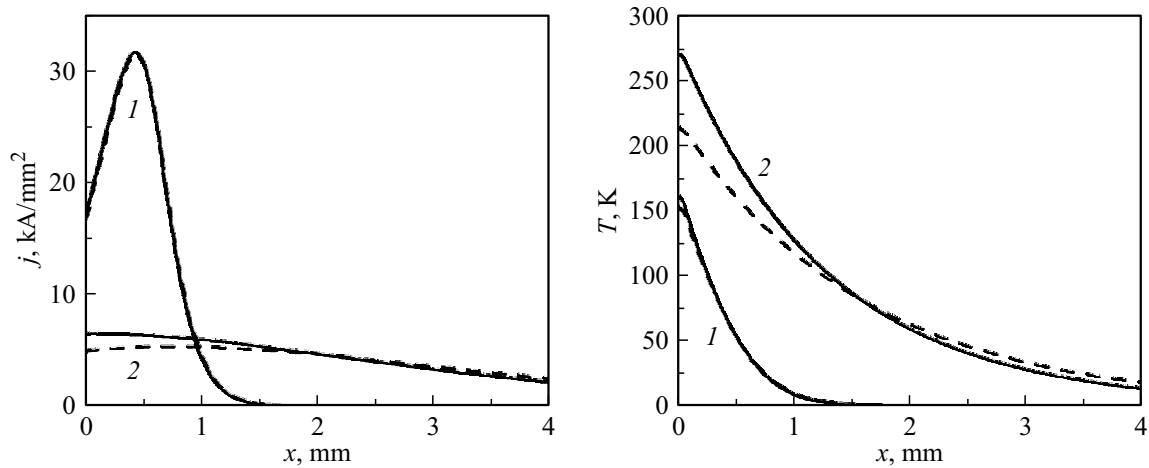
В отличие от индивидуальных параметров, перечисленных в таблице, изменение которых для заданного материала трудно реализуемо, удельное сопротивление материала  $\rho_e^*$  представляется более удобным параметром для варьирования в достаточно широких пределах. Во-первых, значения удельного сопротивления сильно отличаются для различных проводящих материалов, а во-вторых, даже для заданного материала достаточно широкое изменение величины  $\rho_e^*$  возможно за счет допирования, ионно-плазменной обработки, порошковых технологий, использования составных (например, биметаллических) проводящих материалов и т.д. [16,20,38,39]. В связи с этим проанализируем зависимость  $B_{th}(\rho_e^*)$  в диапазоне от сопротивления меди ( $\rho_e^* = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ ) до сопротивления высокорезистивных сталей ( $\rho_e^* \approx 100 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ ). При этом все прочие параметры материала и температурную зависимость сопротивления, т.е. производную  $d\rho_e/dT$ , зафиксируем на значениях, соответствующих стали 30ХГСА. Полученная таким образом зависимость  $B_{th}(\rho_e^*)$  представлена на рис. 3. Видим,



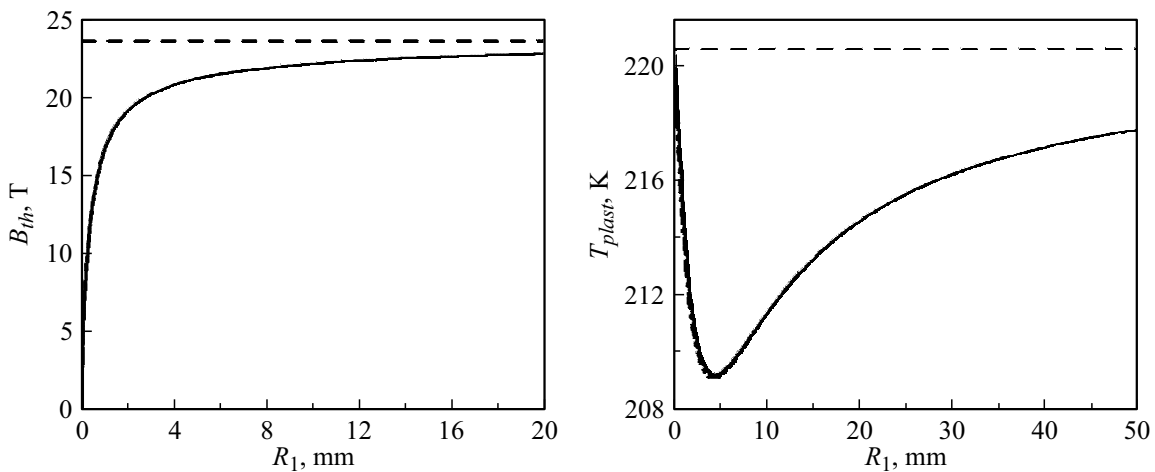
**Рис. 3.** Зависимость порогового поля от удельного сопротивления для однородного цилиндрического проводника ( $R_1 = 5 \text{ mm}$ , сплошная линия) и в плоской геометрии ( $R_1 \rightarrow \infty$ , штриховая линия).

что повышение электропроводности материала, т.е. снижение  $\rho_e^*$ , повышает значения порогового поля от  $B_{th} \approx 16.9 \text{ T}$  при  $\rho_e^* = 100 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$  до  $B_{th} \approx 26.4 \text{ T}$  при  $\rho_e^* = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$ . Интересно отметить, что, несмотря на более высокие значения плотности тока, реализуемые в поверхностном слое высокопроводящего материала, происходит, как показывает рис. 4 (слева), рост порогового поля при уменьшении  $\rho_e^*$ . Рост плотности тока при снижении  $\rho_e^*$  обусловлен в первом приближении изменением толщины скин-слоя,  $j \propto \rho_e^{-1/2}$ , и, следовательно, скорость поверхностного нагрева ( $c\partial T/\partial t$ ), определяемая членом  $\rho_e j^2$  в (5), не должна зависеть от удельного сопротивления материала. В частности, при монотонном возрастании магнитного поля на поверхности проводника  $cT \approx B^2/(2\mu)$  [22,40]. В нашем же случае при заданной амплитуде магнитного поля нагрев высокопроводящего материала с  $\rho_e^* = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$  заметно ниже нагрева высокорезистивной стали (рис. 4 справа). Обусловлено это следующими факторами.

Во-первых, уменьшение  $\rho_e^*$  при фиксированной производной  $d\rho_e/dT$  усиливает нелинейный характер магнитной диффузии. Как известно [22], характеристическое поле проявления нелинейных эффектов соответствует увеличению удельного сопротивления в 2 раза. Этот условный критерий не достигается при нагреве высокорезистивного материала и относительно быстро преодолевается при малых значениях  $\rho_e^*$ . Поэтому в высокопроводящем материале мы наблюдаем формирование так называемой волны нелинейной диффузии (рис. 4, слева), которая смещает основное тепловыделение, т.е. максимум плотности тока, вглубь материала [40,41]. Этим фактором обусловлено достаточно быстрое возрастание порогового поля на рис. 3 в области малых значений  $\rho_e^*$ , наблюдаемое как для искривленной поверхности ( $R_1 = 5 \text{ mm}$ ), так и в плоском пределе ( $R_1 \rightarrow \infty$ ). Во-вторых, снижение толщины скин-слоя от значения  $\delta \approx 2.5 \text{ mm}$  при  $\rho_e^* = 100 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$  до  $\delta \approx 0.3 \text{ mm}$  при  $\rho_e^* = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$  заметно усиливает роль теплообмена, который также снижает тепловыделение на поверхности, стремясь распределить его более равномерно по материалу. И наконец, в-третьих, на искривленной поверхности, как уже отмечалось выше, ток стремится сконцентрироваться в области меньших радиусов, что способствует более сильному нагреву такой поверхности по сравнению с плоской границей. Роль данного фактора становится особенно ощутимой при больших значениях  $\rho_e^*$ , когда толщина скин-слоя становится сопоставима с радиусом кривизны  $R_1$ . Этим объясняется увеличение расхождения между кривыми  $B_{th}(\rho_e^*)$  на рис. 3 для искривленной и плоской поверхности с ростом  $\rho_e^*$ . Более подробно влияние кривизны поверхности на пороговое поле и поверхностный нагрев проводника обсудим в следующем разделе.



**Рис. 4.** Радиальные ( $x = r - R_1$ ) зависимости плотности тока в момент  $t = T_s/4$  (слева) и температуры в момент максимального нагрева поверхности (справа) для однородного цилиндрического проводника ( $\gamma_0 = 0$ ,  $R_1 = 5$  mm) при амплитуде магнитного поля  $B_m = 30$  Т и значениях удельного сопротивления  $\rho_e^* = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  (кривые 1) и  $100 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  (кривые 2). Штриховые линии — то же для плоской геометрии ( $R_1 \rightarrow \infty$ ).



**Рис. 5.** Зависимости порогового поля  $B_{th}$  (слева) и максимальной температуры  $T_{plast}$  нагрева поверхности (справа), соответствующей этому пороговому полю, от внутреннего радиуса  $R_1$  цилиндрического проводника. Штриховые линии соответствуют плоскому пределу  $R_1 \rightarrow \infty$ . Штрихпунктирная кривая — аналитическая оценка  $T_{plast}$  (15).

## 2.2. Однородный материал: влияние кривизны поверхности

Зависимость  $B_{th}(R_1)$  для стального ( $\rho_e^* = 42 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ) цилиндрического проводника толщиной  $R_2 - R_1 = 8$  mm представлена на рис. 5. В области высоких значений радиуса поверхности ( $R_1 > \delta \approx 1.6$  mm) величина порогового поля быстро стремится к плоскому пределу  $B_{th,\infty} \approx 23$  Т. На противоположном пределе ( $R_1 \rightarrow 0$ ) пороговое поле уменьшается вплоть до нуля ( $B_{th} \approx B_1^{1/2}$ ), т.е. стойкость индуктора (или концентратора) будет довольно быстро снижаться с увеличением кривизны его рабочей поверхности. Уменьшение порогового поля при уменьшении  $R_1$  обусловлено все более резкой концентрацией тока в поверхностном слое, которая

даже при уменьшении магнитного поля вплоть до нуля обеспечивает достижение достаточно высокой температуры нагрева поверхности (рис. 5, справа). Именно неоднородный нагрев, т.е. увеличение температуры поверхности, определяет уровень термоупругих напряжений в материале, и, как следствие, достижение условия Мизеса (8). Магнитное поле при этом выступает лишь в роли инструмента, обеспечивающего необходимый для нагрева подвод энергии.

Как показывает рис. 5 (справа), температура нагрева рабочей поверхности  $T_{plast}$ , соответствующая достижению предела текучести материалом, демонстрирует немонотонную зависимость от радиуса кривизны. Предельное значение  $T_{plast,\infty}$ , (при  $R_1 \rightarrow \infty$ ), отмеченное штриховой линией на рисунке, как получено в нашей

предыдущей работе [15], определяется соотношением

$$T_{plast,\infty} = \frac{1-\nu}{E\beta_V} \sigma_s(T_{plast,\infty}), \quad (10)$$

что в нашем случае дает  $T_{plast,\infty} \approx 221$  К. При уменьшении радиуса  $R_1$  пороговая температура нагрева  $T_{plast}$  сначала снижается, достигает минимума ( $\approx 209$  К) при  $R_1 \approx 3\delta$ , и затем возрастает опять до значения  $T_{plast} \approx T_{plast,\infty}$  при  $R_1 \rightarrow 0$ . Несмотря на такой довольно сложный характер зависимости  $T_{plast}(R_1)$ , для нее может быть выведена достаточно точная аналитическая оценка. Покажем это.

В области упругих деформаций решение системы уравнений (6) и (7) для азимутальных и аксиальных напряжений  $\sigma_\phi$  и  $\sigma_z$  на рабочей поверхности ( $r = R_1$ ) имеет вид

$$\sigma_\phi = \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{B_0^2}{2\mu} - \frac{E}{(1-\nu)} \beta_V T + \frac{E}{(1+\nu)} \frac{2c_1}{(1-2\nu)} + \frac{R_1^2}{r^2} \frac{B_0^2}{2\mu},$$

$$\sigma_z = \frac{\nu}{(1-\nu)} \frac{B_0^2}{2\mu} - \frac{E}{(1-\nu)} \beta_V T + \frac{E}{(1+\nu)} \frac{2\nu c_1}{(1-2\nu)},$$

$$c_1 = -\frac{1+\nu}{E} \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} J_B + \frac{E\beta_V J_T}{1-\nu} + \frac{B_0^2}{2\mu} R_1^2 \right) / \left( R_2^2 + \frac{R_1^2}{1-2\nu} \right),$$

$$J_B = \int_{R_1}^{R_2} \frac{B^2}{2\mu} r dr, \quad J_T = \int_{R_1}^{R_2} T r dr.$$

Поскольку нас интересует момент максимального нагрева, который наступает примерно к окончанию магнитного импульса, т.е. при  $B_0 \approx 0$ , пренебрежем соответствующими членами, что дает

$$\sigma_\phi = \frac{-E}{1-\nu} \beta_V T - \beta_V J_T \frac{2E}{(1-\nu)} / [(1-2\nu)R_2^2],$$

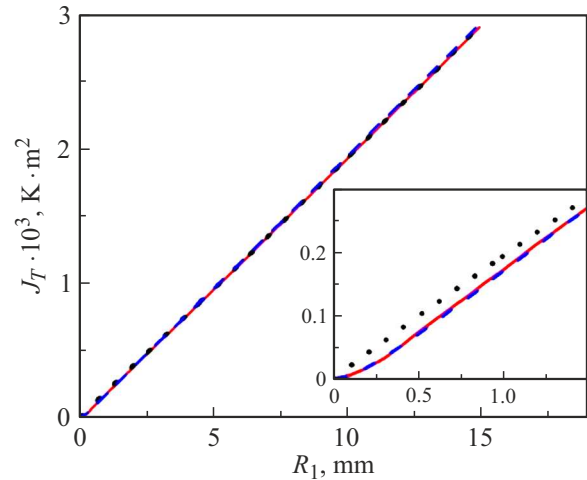
$$\sigma_z = \frac{-E}{1-\nu} \beta_V T - \beta_V J_T \frac{2\nu E}{(1-\nu)} / [(1-2\nu)R_2^2]. \quad (11)$$

Для получения искомой температуры  $T_{plast}$  данные напряжения необходимо подставить в критерий Мизеса (8), который на поверхности  $r = R_1$ , ввиду граничного условия  $\sigma_r = 0$ , принимает вид

$$\sigma_\phi^2 - \sigma_\phi \sigma_z + \sigma_z^2 = \sigma_s^2, \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что в плоском пределе ( $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ ) мы имеем

$$\sigma_\phi = \sigma_z = -E\beta_V T / (1-\nu),$$



**Рис. 6.** Интеграл  $J_T$  в зависимости от радиуса  $R_1$ . Сплошная (красная) линия — численный расчет, пунктирная (черная) линия — аналитическая оценка (14), штриховая (синяя) линия — результат решения (1) с помощью преобразования Лапласа. На вставке в увеличенном масштабе показана область малых радиусов  $R_1$ .

что приводит при подстановке в (12) к соотношению (10). При  $R_1 \neq 0$  искомая температура  $T_{plast}$  зависит от величины интеграла  $J_T$ . Расчетная зависимость  $J_T(R_1)$  представлена на рис. 6. В пределе  $R_1 \rightarrow 0$ , вследствие стягивания области протекания тока к поверхности  $r = R_1$ , интеграл  $J_T$  стремится к нулю. При этом вторые члены справа в уравнениях (11) также исчезают, что объясняет возвращение температуры  $T_{plast}$  на рис. 5 к значению  $T_{plast,\infty}$  при  $R_1 \rightarrow 0$ .

В общем случае для получения зависимости  $J_T(R_1)$  требуется решить систему уравнений магнитной диффузии (1) и теплопроводности (5). Для возможности аналитического решения (1) пренебрежем влиянием температуры на величину удельного сопротивления. В этом случае уравнение магнитной диффузии (1) становится независимым и может быть решено при помощи преобразования Лапласа [42]. Используя определяемую этим решением плотность тока  $j(r, t)$ , из уравнения теплопроводности (5) в пренебрежении теплообменом и механической работой, можно получить поле температур  $T(r, t)$  и искомый интеграл  $J_T$ . Результат такого анализа представлен на рис. 6 штриховой линией. Видим, что получаемый с помощью метода Лапласа результат позволяет описать зависимость  $J_T(R_1)$  с достаточно высокой точностью. Однако выражения, получаемые в рамках использования метода Лапласа довольно громоздки, поэтому мы их не приводим. Вместо этого мы представим гораздо более легкий вывод, который позволяет получить интеграл  $J_T$  с несколько меньшей, но все еще достаточно приемлемой точностью.

Рис. 6 показывает, что за исключением относительно небольшой области радиусов, а именно области  $R_1 < \delta \approx 1.6$  mm, зависимость  $J_T(R_1)$  близка к линейной

( $J_T = k_J R_1$ ). Получить коэффициент пропорциональности  $k_J$  данной зависимости можно, оценив значение интеграла  $J_T$  в области больших радиусов  $R_1$ . Уравнение магнитной диффузии при этом принимает вид

$$\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} = \frac{\rho_e}{\mu} \frac{\partial^2 B(x, t)}{\partial x^2}, \quad (13)$$

где  $x = r - R_1$ . Используя теперь вместо условия (2) стационарное граничное условие

$$B(0, t) = B_m \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right),$$

нетрудно записать решение (13) для так называемого установившегося режима [22]:

$$B(x, t) = B_m \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\frac{2\pi t}{T_s} - \frac{x}{\delta}\right).$$

Подставляя данное решение в уравнение теплопроводности (5) и производя интегрирование по полупериоду (от  $t = 0$  до  $t = T_s/2$ ) в пренебрежении теплообменом и механической работой, получим для поля температур:

$$T(x) = T_0 \exp\left(-\frac{2x}{\delta}\right), \quad T_0 = \frac{\pi B_m^2}{2\mu c}.$$

Используя данное поле температур для оценки искомого интеграла  $J_T$ , в приближениях  $R_1 \gg \delta$  и  $R_2 - R_1 \gg \delta$  получаем

$$J_T = \frac{1}{2} T_0 \delta R_1. \quad (14)$$

Линейная зависимость  $J_T(R_1)$ , определяемая полученным выражением, представлена на рис. 6 пунктирной линией. Подставляя эту зависимость в уравнения (11) и (12), получим для величины поверхностной температуры, приводящей к достижению порога текучести  $T_0 = T_{plast}$ , соотношения

$$T_{plast} = \frac{1 - \nu}{E\beta_V} \frac{\sigma_s(T_{plast})}{\sqrt{m^2(\nu^2 - \nu + 1) + m(1 + \nu) + 1}},$$

$$m = \frac{R_1 \delta}{R_1^2 + (1 - 2\nu)R_2^2}, \quad \delta = \sqrt{\frac{T_s \rho_e(T_{plast})}{\pi \mu_0}}, \quad (15)$$

где температурные зависимости предела текучести при одноосном растяжении  $\sigma_s(T)$  и удельного сопротивления  $\rho_e(T)$  в нашем случае определяются соотношениями (8) и (3) соответственно. Видно, что (15) переходит в выражение для плоского случая (10) как при больших радиусах  $R_1$  и  $R_2$ , так и при  $R_1 \rightarrow 0$ . Зависимость  $T_{plast}(R_1)$ , определяемая (15), представлена на рис. 5 (справа). Видно, что полученная аналитическая оценка хорошо согласуется с результатом прямого численного расчета во всем диапазоне радиусов  $R_1$ .

Таким образом, полученный результат (15) позволяет проводить аналитическую оценку нагрева поверхности,

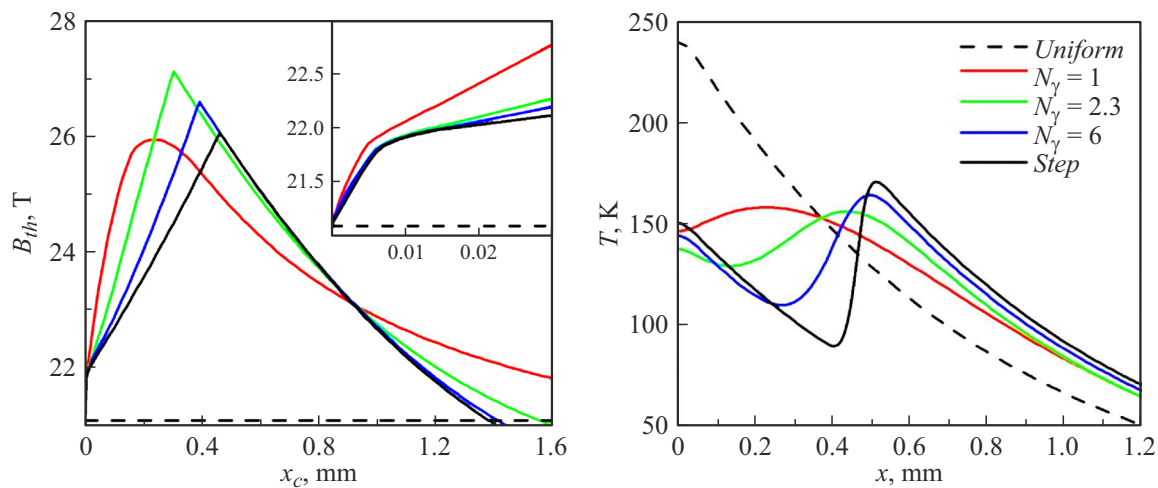
представляющего угрозу разрушения для относительно хрупкого изначально однородного материала ввиду достижения термоупругими напряжениями критического уровня, т.е. предела текучести. Эффективное снижение поверхностного нагрева проводника во внешнем импульсном магнитном поле, т.е. снижение угрозы его разрушения, может быть достигнуто за счет использования изначально неоднородного материала с повышенным удельным сопротивлением вблизи рабочей поверхности [15,22]. Изучению данной возможности в рамках модифицированных профилей (4) посвящен следующий раздел.

### Повышение стойкости материала за счет формирования неоднородного профиля начального удельного сопротивления

На рис. 7 (слева) представлены зависимости порогового поля  $B_{th}$  от „глубины“ модифицированного слоя  $x_c$  для различных типов профиля модификации (4), которые соответствуют определенным значениям параметра  $N_\gamma$  от наиболее плавного (экспоненциального) при  $N_\gamma = 1$  до ступенчатого при  $N_\gamma \rightarrow \infty$ . В качестве „амплитуды“ модификации для всех профилей  $\gamma_e(r)$  используется  $\gamma_0 = 1.5$ , т.е. в начальном (ненагретом) состоянии удельное сопротивление на поверхности в 2.5 раза превышает его величину в глубине:  $\rho_e(R_1) = (1 + \gamma_0)\rho_e^* = 105 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ , что практически совпадает с верхней границей диапазона сопротивлений высокорезистивных сталей, изображенного на рис. 3.

Немодифицированный материал с  $\rho_e = \rho_e^* = 42 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  имеет пороговое поле  $B_{th} \approx 21.1 \text{ T}$ . Увеличение удельного сопротивления всего материала, как видно, в частности, по рис. 3, снижает пороговое поле примерно до 19.6 T. Во же время, как показывает рис. 7, повышение начального удельного сопротивления в относительно небольшом, с глубиной  $x_c$  не более 1 mm, поверхностном слое позволяет существенно повысить пороговое магнитное поле. Зависимость  $B_{th}(x_c)$  демонстрирует немонотонный характер с максимумом при некоторой, наиболее оптимальной, „глубине“ модифицированного слоя  $x_c = x_{c, \max}$ . Координаты этого максимума ( $x_{c, \max}$  и  $B_{th, \max}$ ) различны для разных профилей. Так, для экспоненциального профиля  $x_{c, \max} \approx 0.24 \text{ mm}$  и  $B_{th, \max} = 25.9 \text{ T}$ , а для резкого (ступенчатого)  $x_{c, \max} \approx 0.46 \text{ mm}$  и  $B_{th, \max} = 26.1 \text{ T}$ . В работах [17,18] утверждается, что наиболее выгодным профилем сопротивления  $\rho_e(x)$  является экспоненциальный ( $N_\gamma = 1$ ). Однако анализ, проведенный авторами [17,18], не учитывал роста удельного сопротивления с температурой. Наши расчеты, учитывающие данный фактор, показывают, что для стали 30ХГСА при „амплитуде“ модификации  $\gamma_0 = 1.5$  наиболее предпочтителен профиль с более резким переходом, соответствующий значению  $N_\gamma \approx 2.3$ . Для этого профиля, как показывает рис. 7, пороговое поле увеличивается





**Рис. 7.** Слева — зависимости порогового поля  $B_{th}$  от „глубины“ модифицированного слоя  $x_c$  при  $\gamma_0 = 1.5$  для значений  $N_\gamma = 1.0, 2.3, 6.0$  и для ступенчатого профиля ( $N_\gamma \rightarrow \infty$ ). Справа — радиальные ( $x = r - R_1$ ) зависимости максимальной температуры нагрева материала для импульса (2) с  $B_m = 30$  Т при тех же значениях  $\gamma_0$  и  $N_\gamma$  и „глубине“  $x_c = x_{c,max}$ . Штриховые линии соответствуют однородному материалу ( $\gamma_0 = 0$ ).

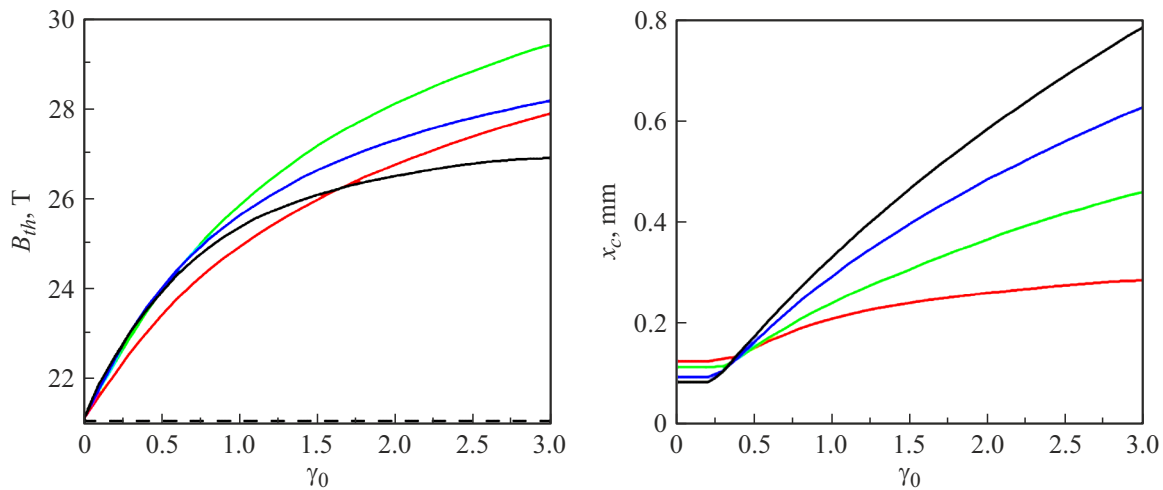
до величины  $B_{th,max} = 27.1$  Т, т.е. примерно на 28% относительно немодифицированного материала.

Для объяснения влияния модифицированного слоя на величину порогового поля и характера изменения  $B_{th}$  с ростом „глубины“ данного слоя рассмотрим радиальные зависимости максимального нагрева  $T(x)$ , который достигается, как правило, к моменту окончания импульса магнитного поля ( $t = 4T_s$ ). Данные зависимости для  $B_m = 30$  Т,  $\gamma_0 = 1.5$  с оптимальной для каждого профиля толщиной модификации представлены на рис. 7 справа. Там же для сравнения показан нагрев немодифицированного материала при той же амплитуде магнитного импульса. Повышенное удельное сопротивление поверхностного слоя смещает значительную долю нагрева вглубь материала, в область  $x > x_c$ . Это приводит к существенному снижению температуры поверхности при  $x = 0$  и формированию альтернативного „слабого“ места проводящего материала во внутренних слоях, где появляется локальный максимум температуры. Для неглубоких модифицированных слоев (при значениях  $x_c < 10 \mu\text{m}$ , показанных на вставке к рис. 7 слева) существенное влияние на формирование радиального распределения температуры в окрестности максимума оказывает процесс теплообмена с поверхностью, что приводит к особенно быстрому росту порогового поля. В дальнейшем с увеличением параметра  $x_c$  до величины  $x_{c,max}$  температура поверхности оказывается ниже температуры локального максимума  $T_{max}$  в глубине материала, и увеличение порогового поля связано со снижением  $T_{max}$  в связи с его удалением от поверхности и распределением поглощаемого тепла по увеличивающемуся объему.

В области значений  $x_c < x_{c,max}$  для профилей с  $N_\gamma > 1$  предел текучести при пороговом значении магнитного поля достигается в окрестности внутреннего ло-

кального максимума температуры. С увеличением глубины модифицированного слоя снижение температуры на поверхности прекращается, и, начиная с  $x_c = x_{c,max}$ , „слабое“ место возвращается на рабочую поверхность проводника при  $x = 0$ . Это приводит к наличию излома на кривых  $B_{th}(x_c)$  в точке максимума при  $N_\gamma > 1$ . Наиболее оптимальная глубина модифицированного слоя  $x_c = x_{c,max}$  характеризуется достижением напряжениями порога текучести одновременно и в точке локального максимума температуры в глубине материала, и на рабочей поверхности ( $x = 0$ ). В плоской геометрии ( $R_1 \rightarrow \infty$ ) при этом значения температуры на поверхности  $T_0$  и в локальном максимуме  $T_{max}$  совпадают, т.е.  $T_0 = T_{max} = T_{plast,\infty}$  [15]. Это, в частности, позволяет использовать оценку критического нагрева (10) как для однородных, так и для поверхностно-модифицированных проводников. В цилиндрической геометрии, при конечных  $R_1$ , оптимальные условия характеризуются более высокой, чем на поверхности, температурой в локальном максимуме ( $T_0 < T_{max}$ ), что связано, как уже отмечалось выше, с дополнительным источником роста напряжений при нагреве искривленных слоев — член, пропорциональный  $r^{-1}$  в (7). Поэтому, в частности, аналитическая оценка предельного нагрева (15) для искривленной модифицированной поверхности утрачивает свою строгость. Для экспоненциального профиля с  $N_\gamma = 1$  возвращение „слабого“ места из глубины на поверхность при увеличении параметра  $x_c$  происходит левее максимума на зависимости  $B_{th}(x_c)$ , и соответствующая точка излома менее заметна на рис. 7.

Увеличение „амплитуды“  $\gamma_0$  модификации удельного сопротивления, как показывает рис. 8, позволяет достичь более высоких значений порогового поля  $B_{th}$ . Здесь интересно отметить, что при снижении величины  $\gamma_0$



**Рис. 8.** Максимальное пороговое поле  $B_{th,max}$  (слева) и соответствующая толщина модифицированного слоя  $x_{c,max}$  (справа) в зависимости от „амплитуды“ модификации  $\gamma_0$ . Обозначения линий те же, что и на рис. 7.

профиль, соответствующий значению  $N_\gamma = 2.3$ , утрачивает свои преимущества при амплитудах  $\gamma_0 < 0.5$ , и наиболее эффективными для повышения стойкости проводящего материала, хотя и с крайне незначительными различиями по величине  $B_{th}$ , становятся более резкие профили удельного сопротивления, вплоть до ступенчатого ( $N_\gamma \rightarrow \infty$ ). В то же время при высоких амплитудах модификации, начиная с  $\gamma_0 \approx 1.7$ , ступенчатый профиль становится самым неэффективным из представленных на рис. 8. Зависимости координаты максимума порогового поля  $x_{c,max}$  от величины  $\gamma_0$  для четырех анализируемых типов профиля модификации показаны на рис. 8 справа. Видим, что повышение стойкости материала при увеличении амплитуды модификации  $\gamma_0$ , как правило, подразумевает необходимость формирования более глубоких модифицированных слоев. Исключение составляет область слабых модификаций при  $\gamma_0 < 0.3$ . Здесь, вследствие повышения роли теплообмена при малых значениях  $x_c$ , оптимальная „глубина“ модифицированного слоя  $x_{c,max}$  стабилизируется на значениях от  $85 \mu\text{m}$  для ступенчатого профиля до  $125 \mu\text{m}$  для экспоненциального профиля.

## Заключение

В результате проведенного исследования проанализирована вероятность разрушения хрупкого проводящего материала в форме полого цилиндра под действием сильного импульсного магнитного поля с индукцией около 30 Т в его внутренней полости. Геометрия задачи соответствует известной актуальной проблеме разрушения индукторных систем — внутренней поверхности соленоида, либо концентратора магнитного потока — при генерации импульсов сильного магнитного поля. Теоретическая модель учитывает диффузию магнитного поля, омический нагрев проводящего материала, его

теплопроводность и возникающие в нем механические напряжения. В качестве порогового поля  $B_{th}$ , разделяющего области безопасных (неразрушающих) и опасных полей, использована амплитуда магнитного поля, при которой индуцируемые термомеханические напряжения в материале достигают выполнения условия пластичности Мизеса. В случае однородного материала получено аналитическое выражение, позволяющее с высокой точностью оценивать соответствующую максимальную температуру нагрева, обуславливающую достижение критического уровня термомеханических напряжений.

На основе анализа расчетных значений порогового поля  $B_{th}$  исследовано влияние различных параметров (характеристики магнитного импульса, упругие модули материала и т.д.) на стойкость проводника в импульсном магнитном поле. Показано, что для повышения ресурса индукторной системы предпочтительны электрические контуры с относительно быстрым затуханием электромагнитных колебаний, характерное время затухания  $T_e$  в которых меньше периода колебаний  $T_s$ . Это объясняется тем, что основным („рабочим“) полупериодом, который создает главный максимум магнитного поля, является первый полупериод при  $t < T_s/2$ , в то время как последующие электрические колебания приводят лишь к дополнительному („паразитному“) нагреву проводящего материала. Наиболее значимой для стойкости индуктора характеристикой материала является удельная теплоемкость. При прочих равных условиях (в первую очередь, при одинаковой удельной проводимости) в качестве материала индуктора предпочтительнее использовать проводник с высоким ее значением.

Подробно исследована возможность повышения стойкости проводящего материала за счет формирования в нем модифицированного поверхностного слоя с повышенным значением начального удельного сопротивления  $\rho_e$ . Рассмотрены различные профили начального сопротивления — от плавного (экспоненциального)

профиля  $\rho_e(r)$  до максимально резкого (ступенчатого). Обнаружено, что в сравнении с однородным материалом формирование модифицированного поверхностного слоя позволяет существенно увеличить амплитуду магнитного импульсного поля, выдерживаемого материалом без разрушения. В частности, при „амплитуде“ модификации  $\gamma_0 = 1.5$ , т.е. когда удельное сопротивление на поверхности в 2.5 раза превышает соответствующее значение в глубине материала, удается повысить пороговое поле  $B_{th}$  стального индуктора при наиболее оптимальных форме и глубине профиля  $\rho_e(r)$  примерно на 28% — с 21.1 до 27.1 Т.

### Финансирование работы

Работа была поддержана грантом РФФИ и РОСАТОМ № 20-21-00050.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] Е.С. Остропико, С.Г. Магазинов, С.И. Кривошеев. ЖТФ, **92** (1), 174 (2022). DOI: 10.21883/JTF.2022.01.51868.247-21
- [2] G.Sh. Boltachev, K.A. Nagayev, S.N. Paraniin, A.V. Spirin, N.B. Volkov. *Magnetic Pulsed Compaction of Nanosized Powders* (Nova Science Publishers, Inc., N.Y.C., 2010)
- [3] E.A. Olevsky, A.A. Bokov, G.Sh. Boltachev, N.B. Volkov, S.V. Zayats, A.M. Ilyina, A.A. Nozdin, S.N. Paraniin. *Acta Mech.*, **224** (12), 3177 (2013). DOI: 10.1007/s00707-013-0939-6
- [4] Г.Ш. Болтачев, Н.Б. Волков, С.Н. Паранин, А.В. Спирин. ЖТФ, **80** (6), 1 (2010). [G.Sh. Boltachev, N.B. Volkov, S.N. Paraniin, A.V. Spirin. *Tech. Phys.*, **55** (6), 753 (2010). DOI: 10.1134/S1063784210060010]
- [5] Е.Л. Стрижаков, С.В. Нескромный, Р.В. Меркулов. *Сварка и диагностика*, **4**, 43 (2012).
- [6] В.И. Крутиков, С.Н. Паранин, Д.С. Колеух, В.В. Иванов, А.В. Спирин, J.-G. Lee, M.-K. Lee, C.-K. Rhee. *Известия вузов. Физика*, **57** (11/3), 264 (2014).
- [7] A.V. Spirin, G.Sh. Boltachev, V.I. Krutikov, S.N. Paraniin, P.A. Russkikh, D.S. Koleukh. *AIP Conf. Proc.*, **2174**, 020163 (2019). DOI: 10.1063/1.5134314
- [8] S.I. Krivosheev, Yu.E. Adamian, D.I. Alekseev, S.G. Magazinov, L.V. Chernenkaya, V.V. Titkov. *J. Phys. Conf.*, **1147**, 012033 (2019). DOI: 10.1088/1742-6596/1147/1/012033
- [9] F. Herlach. *Strong and Ultrastrong Magnetic Fields and Their Applications* (Springer-Verlag, Berlin, 1985)
- [10] С. Мэнсон. *Температурные напряжения и малоцикловая усталость* (Машиностроение, М., 1974)
- [11] В.В. Титков. ЖТФ, **59** (9), 72 (1989).
- [12] В.В. Титков. ЖТФ, **61** (4), 54 (1991).
- [13] И.М. Карпова, В.В. Титков. ЖТФ, **64** (7), 137 (1994).
- [14] И.М. Карпова, В.В. Титков. ЖТФ, **65** (6), 54 (1995).
- [15] P.A. Russkikh, G.Sh. Boltachev, S.N. Paraniin, A.V. Kebets. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **49** (9), 2463 (2021). DOI: 10.1109/TPS.2021.3092788
- [16] A.V. Spirin, P.A. Russkikh, V.I. Krutikov, S.N. Paraniin, D.S. Koleukh. *20th Int. Symp. on High-Current Electronics* (Tomsk, Russia, 2018), p. 148–153. DOI: 10.1109/ISHCE.2018.8521205
- [17] I.M. Karpova, A.N. Semakhin, V.V. Titkov, G.A. Shneerson. *Analysis of Methods of Lowering Heating of and Thermal Stresses in the Coils in Nigh Magnetic Fields. Megagauss Magnetic Fields and Pulsed Power Systems* (Nova Science Publishers, N.Y.C., 1990)
- [18] И.М. Карпова, В.В. Титков. *Электричество*, **12**, 55 (1999).
- [19] Г.А. Шнеерсон, А.А. Парфентьев, В.В. Титков, С.И. Кривошеев, А.Д. Лагуткина, А.С. Немов, А.П. Ненашев, С.А. Шиманский. *Письма в ЖТФ*, **47** (11), 40 (2021). DOI: 10.21883/PJTF.2021.11.51007.18639 [G.A. Shneerson, A.A. Parfentiev, V.V. Titkov, S.I. Krivosheev, A.D. Lagutkina, A.S. Nemov, A.P. Nenashev, S.A. Shimansky. *Tech. Phys. Lett.*, **47**, 573 (2021). DOI: 10.1134/S1063785021060134]
- [20] A.V. Spirin, E.Y. Zaytsev, S.N. Paraniin. *IEEE Trans. Magn.*, **58** (6), 1 (2022). DOI: 10.1109/TMAG.2022.3165386
- [21] Г.А. Шнеерсон. *Поля и переходные процессы в аппаратуре сверхсильных токов* (Энергоатомиздат, М., 1992)
- [22] Г. Кнопфель. *Сверхсильные импульсные магнитные поля* (Мир, М., 1972)
- [23] O. Schnitzer. *Phys. Plasmas*, **21**, 082306 (2014). DOI: 10.1063/1.4892398
- [24] R. Holland. *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **43** (7), 653 (1995). DOI: 10.1109/8.391135
- [25] J.R. Brauer, I.D. Mayergoyz. *IEEE Trans. Magn.*, **40** (2), 537 (2004). DOI: 10.1109/TMAG.2004.824591
- [26] B. Tellini, M. Bologna, D. Pelliccia. *IEEE Trans. Magn.*, **43** (3), 1112 (2005). DOI: 10.1109/TMAG.2004.841700
- [27] Ю.Э. Адамьян, Е.А. Вырва, С.И. Кривошеев, В.В. Титков. ЖТФ, **83** (10), 1 (2013). [Yu.E. Adam'yan, E.A. Vyrgva, S.I. Krivosheev, V.V. Titkov. *Tech. Phys.*, **58** (10), 1397 (2013). <https://doi.org/10.1134/S1063784213100022>]
- [28] S.E. Rosenthal, M.P. Desjarlais, R.B. Spielman, W.A. Stygar, J.R. Asay, M.R. Douglas, C.A. Hall, M.H. Frese, R.L. Morse, D.B. Reisman. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **28** (5), 1427 (2000). DOI: 10.1109/27.901209
- [29] S.F. Garanin, G.G. Ivanova, D.V. Karmishin, V.N. Sofronov. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **46** (2), 153 (2005). DOI: 10.1007/PL00021891
- [30] С.И. Кривошеев, В.С. Помазов, Г.А. Шнеерсон. *Письма в ЖТФ*, **37** (18), 73 (2011). [S.I. Krivosheev, V.S. Pomazov, G.A. Shneerson. *Tech. Phys. Lett.*, **37** (9), 877 (2011). DOI: 10.1134/S1063785011090227]
- [31] S.I. Krivosheev, S.G. Magazinov, D.I. Alekseev. *J. Phys. Conf.*, **946**, 012040 (2018). DOI: 10.1088/1742-6596/946/1/012040
- [32] A.J. Mestel. *Proc. Math. Phys. Eng. Sci.*, **405**, 49 (1986). DOI: 10.1098/rspa.1986.0040
- [33] С.И. Кривошеев, С.Г. Магазинов, Г.А. Шнеерсон. *Письма в ЖТФ*, **45** (3), 41 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.03.47272.17504 [S.I. Krivosheev, S.G. Magazinov, G.A. Shneerson. *Tech. Phys. Lett.*, **45** (2), 100 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019020093]
- [34] A.V. Spirin, G.Sh. Boltachev, S.N. Paraniin, V.I. Krutikov, D.S. Koleukh, P.A. Russkikh. *Proceedings of EAPPC & BEAMS* (Changsha, China, 2018), p. 172–176.
- [35] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Theory of Elasticity* (Pergamon Press, Oxford, 1993)
- [36] L.I. Sedov. *Mechanics of Continuous Media 1 and 2* (World Scientific, Singapore, 1997)

- [37] А.П. Бабичев, Н.А. Бабушкина, А.М. Братковский. *Таблицы физических величин* (Энергоатомиздат, М., 1991)
- [38] F. Heringhaus, H.-J. Schneider-Muntau, G. Gottstein. *Mater. Sci. Eng. A*, **347**, 9 (2002). DOI: 10.1016/S0921-5093(02)00590-7
- [39] Q. Yuanshen, R. Lapovok, Yu. Estrin. *J. Mater. Sci.*, **51**, 6860 (2016). DOI: 10.1007/s10853-016-9973-9
- [40] P.A. Russkikh, G.Sh. Boltachev, S.N. Paragin. *AIP Conf. Proc.*, **2113**, 030028 (2020). DOI: 10.1063/5.0032221
- [41] A.R. Bryant. *The Intern. Conf. on Megagauss Magnetic Fields Generation by Explosives and Related Experiments Proc.* (Euroatom, Brussel, 1966), p. 183–191.
- [42] Г. Карслоу, Д. Егер. *Теплопроводность твердых тел* (Наука, М., 1964)