

01.5;11.4

## Анализ кооперативной динамики нелинейных систем на основе совместного спектра сингулярностей

© Г.А. Гуйо, А.Н. Павлов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия  
E-mail: pavlov.alexey@gmail.com

Поступило в Редакцию 12 февраля 2023 г.

В окончательной редакции 14 марта 2023 г.

Принято к публикации 14 марта 2023 г.

Предлагается обобщение метода максимумов модулей вейвлет-преобразования на случай мультифрактального анализа, в рамках которого кооперативная динамика подсистем и изменение взаимодействия между ними характеризуются с помощью совместного спектра сингулярностей. На примере явления синхронизации хаоса в модели взаимодействующих систем Лоренца проиллюстрирована возможность диагностики смены режима функционирования в терминах основанного на вейвлетах мультифрактального формализма.

**Ключевые слова:** мультифрактальный анализ, случайный процесс, скейлинг, спектр сингулярностей.

DOI: 10.21883/PJTF.2023.10.55425.19505

Мультифрактальный анализ широко используется для количественного описания сложного скейлинга, который характерен для динамики различных систем в природе [1–4]. К числу мультифрактальных объектов относятся многие экспериментально регистрируемые сигналы, структура которых очень сложна, и привлечение представлений мультифрактального формализма является одним из способов их статистического анализа, особенно в применении к сильно неоднородным и нестационарным процессам [5]. В настоящее время используется несколько вариантов количественного описания сложных сигналов в терминах спектра сингулярностей или скейлинг-спектра [6–8], одним из которых является метод максимумов модулей вейвлет-преобразования [5]. При изучении кооперативной динамики систем, например сложных сетей, представляет интерес расширение концепции мультифрактального анализа структуры сигналов для исследования взаимной динамики подсистем (или фрагментов сети) по нескольким одновременно регистрируемым процессам. В настоящей работе мы предлагаем рассмотреть обобщение метода [5] на случай мультифрактального анализа, в рамках которого аналог спектра сингулярностей характеризует кооперативную динамику подсистем и позволяет описывать изменения взаимодействия между ними.

Предлагаемый метод включает вычисление вейвлет-преобразований [9,10] сигналов  $x(t)$  и  $y(t)$  взаимодействующих подсистем в соответствии с формулами

$$W_x(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

$$W_y(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (1)$$

где параметры  $a$  и  $b$  характеризуют масштаб и смещение базисной функции  $\psi$ , а в качестве соответствующего вейвлета обычно выбирается вещественная функция, например МНАТ-вейвлет. После расчета коэффициентов  $W_x(a, b)$  и  $W_y(a, b)$  проводится выделение скелетонных — линий локальных максимумов и минимумов вейвлет-преобразований, которые содержат основную информацию о них.

Для вычисления совместного спектра сингулярностей, характеризующего кооперативную динамику подсистем, предлагается модификация алгоритма вычисления обобщенных статистических функций [6]:

$$Z^2(q, a) = \sum_{i \in L1(a)} \left( \sup_{\dot{a} \leq a} |W_x(\dot{a}, b_i(\dot{a}))| \right)^q \times \sum_{j \in L2(a)} \left( \sup_{\dot{a} \leq a} |W_y(\dot{a}, b_j(\dot{a}))| \right)^q, \quad (2)$$

где  $L1(a)$  и  $L2(a)$  — наборы всех линий скелетонных вейвлет-преобразований  $W_x(a, b)$  и  $W_y(a, b)$  на масштабе  $a$ ,  $b_i(\dot{a})$  и  $b_j(\dot{a})$  — расположение на масштабах  $\dot{a} \leq a$  и  $\dot{a} \leq a$  максимумов, относящихся к линиям  $i$  и  $j$ . По аналогии с алгоритмом для скалярного сигнала [6] анализируется степенная зависимость

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}, \quad (3)$$

в соответствии с которой вычисляются показатель скейлинга  $\tau(q)$  и спектр сингулярностей на основе преобразования Лежандра

$$D(h) = qh - \tau(q),$$

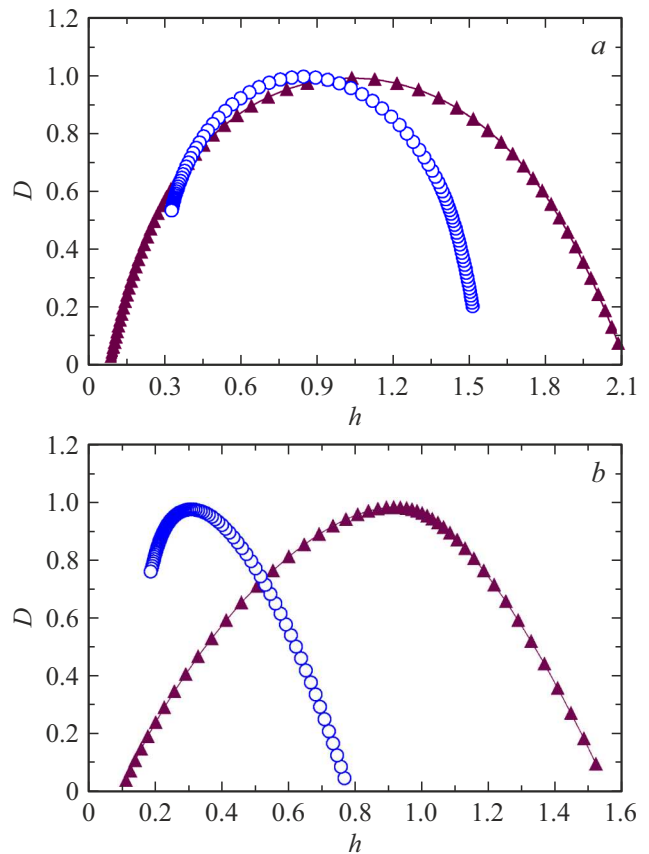
$$h = \frac{d\tau(q)}{dq}. \quad (4)$$

В отличие от работ [5,6] вычисленный спектр сингулярностей  $D(h)$  теперь отражает совместную динамику

подсистем, генерирующих сигналы  $x(t)$  и  $y(t)$ . Проиллюстрируем предложенный метод на примере синхронизации хаотических колебаний в динамике взаимодействующих систем Лоренца

$$\begin{aligned} \frac{dx_{1,2}}{dt} &= \sigma(y_{1,2} - x_{1,2}) + \gamma(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \frac{dy_{1,2}}{dt} &= r_{1,2}x_{1,2} - x_{1,2}z_{1,2} - y_{1,2}, \\ \frac{dz_{1,2}}{dt} &= x_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2}c \end{aligned} \quad (5)$$

при выборе параметров  $\sigma = 10$ ,  $r_1 = 28.8$ ,  $r_2 = 28$ ,  $c = 8/3$  и варьировании параметра связи  $\gamma$ . В качестве входных сигналов для рассматриваемого модифицированного алгоритма были выбраны последовательности времен возврата в секущие плоскости  $x_1^2 + y_1^2 = 30$ ,  $x_2^2 + y_2^2 = 30$ ,  $z_1 = 30$ ,  $z_2 = 30$ . Особенностью динамики модели (5) является ее нетипичное поведение с ростом параметра связи, проявляющееся в возрастающей рассинхронизации в диапазоне  $\gamma < 2$ , которая сменяется синхронной динамикой при дальнейшем увеличении параметра  $\gamma$ . Как показано в работе [11], если для каждой системы Лоренца ввести понятия частоты вращения (вокруг одного из состояний равновесия) и частоты переключений (рассматривая ее как бистабильную систему), то при увеличении  $\gamma$  примерно до  $\gamma = 2$  наблюдается увеличение разности между соответствующими частотами для каждой системы модели (как разности частот вращений, так и разности частот переключений), и лишь при  $\gamma > 2$  происходит ожидаемая подстройка частот с ростом параметра связи. Проведем сравнение режимов несинхронной ( $\gamma = 2$ ) и синхронной ( $\gamma = 7$ ) динамики модели (5), выбрав в качестве анализируемых сигналов предлагаемого метода последовательности времен возврата в секущие Пуанкаре  $x_1^2 + y_1^2 = 30$  и  $x_2^2 + y_2^2 = 30$ . Результаты расчетов совместных спектров сингулярностей приведены на рисунке, *a*. Можно отметить два обстоятельства: уменьшение среднего значения показателя Гельдера, которое соответствует максимуму спектра сингулярностей, и уменьшение ширины этого спектра при синхронизации. Это согласуется с результатами ранее проводившихся исследований по одной из переменных состояния взаимодействующих автоколебательных систем [12], однако в данном случае с помощью функций  $D(h)$  характеризуется взаимная динамика подсистем модели (5). Для выбранных секущих плоскостей среднее значение показателя Гельдера уменьшается с 1.03 до 0.85, т.е. на 17%, а ширина спектра сингулярностей уменьшается с 1.99 до 1.17 (на 41%). При рассмотрении последовательностей времен возврата в секущие Пуанкаре  $z_1 = 30$  и  $z_2 = 30$  изменения спектров сингулярностей являются более выраженными (рисунок, *b*) и включают уменьшение среднего значения показателя Гельдера с 0.93 до 0.31 (на 67%), а ширины спектра с 1.41 до 0.59 (на 58%).



Совместные спектры сингулярностей для случая несинхронных (треугольники) и синхронных (кружки) колебаний в динамике взаимодействующих систем Лоренца при выборе в качестве анализируемых сигналов последовательностей времен возврата в секущие Пуанкаре  $x_1^2 + y_1^2 = 30$  и  $x_2^2 + y_2^2 = 30$  (а) и  $z_1 = 30$  и  $z_2 = 30$  (b).

Таким образом, можно сделать вывод, что предложенное обобщение мультифрактального формализма на случай кооперативной динамики взаимодействующих систем позволяет диагностировать изменения как в корреляционных характеристиках (которые количественно описываются с помощью показателей Гельдера [13]), так и во взаимной сложности динамики, характеризуемой диапазоном изменения показателей Гельдера (шириной спектра сингулярностей). Предложенный метод, проиллюстрированный в настоящей работе на примере двух связанных автоколебательных систем, может найти применение в изучении поведения более сложных объектов, например сложных сетей взаимодействующих элементов. Он представляет интерес при анализе динамики сложных систем по экспериментальным данным, в частности многоканальных записей электроэнцефалограмм в различных состояниях организма. В последнем случае с помощью оценок сложности можно решать различные задачи диагностики, такие как выявление эффектов здорового старения по моторным функциональным пробам [14,15].

## Финансирование работы

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 22-22-00065).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] C. Jin, C. Song, J. Bjelland, G. Canright, D. Wang, *Nat. Human Behav.*, **3**, 837 (2019). DOI: 10.1038/s41562-019-0638-y
- [2] N.S. Frolov, V.V. Grubov, V.A. Maksimenko, A. Lüttjohann, V.V. Makarov, A.N. Pavlov, E. Sitnikova, A.N. Pisarchik, J. Kurths, A.E. Hramov, *Sci. Rep.*, **9**, 7243 (2019). DOI: 10.1038/s41598-019-43619-3
- [3] Т. Муо, К. Катō, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, **2020**, 12A101 (2020). DOI: 10.1093/ptep/ptaa101
- [4] A. Plati, A. Puglisi, *Sci. Rep.*, **11**, 14206 (2021). DOI: 10.1038/s41598-021-93091-1
- [5] J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 3515 (1991). DOI: 10.1103/PhysRevLett.67.3515
- [6] J.F. Muzy, E. Bacry, A. Arneodo, *Int. J. Bifurc. Chaos*, **4**, 245 (1994). DOI: 10.1142/S0218127494000204
- [7] J.W. Kantelhardt, S.A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, H.E. Stanley, *Physica A*, **316**, 87 (2002). DOI: 10.1016/S0378-4371(02)01383-3
- [8] E.A.F. Ihlen, *Front. Physiol.*, **3**, 141 (2012). DOI: 10.3389/fphys.2012.00141
- [9] С.В. Божокин, *ЖТФ*, **82** (7), 8 (2012). [S.V. Bozhokin, *Tech. Phys.*, **57** (7), 900 (2012). DOI: 10.1134/S1063784212070067].
- [10] С.В. Божокин, И.М. Суслова, *ЖТФ*, **83** (12), 26 (2013). [S.V. Bozhokin, I.M. Suslova, *Tech. Phys.*, **58** (12), 1730 (2013). DOI: 10.1134/S1063784213120074].
- [11] V.S. Anishchenko, A.N. Silchenko, I.A. Khovanov, *Phys. Rev. E*, **57**, 316 (1998). DOI: 10.1103/PhysRevE.57.316
- [12] А.Н. Павлов, В.С. Анищенко, *УФН*, **177** (8), 859 (2007). DOI: 10.3367/UFNr.0177.200708d.0859 [A.N. Pavlov, V.S. Anishchenko, *Phys. Usp.*, **50** (8), 819 (2007). DOI: 10.1070/PU2007v050n08ABEH006116].
- [13] А.Н. Павлов, О.Н. Павлова, *Письма в ЖТФ*, **34** (7), 71 (2008). [A.N. Pavlov, O.N. Pavlova, *Tech. Phys. Lett.*, **34** (4), 306 (2008). DOI: 10.1134/S1063785008040111].
- [14] A.N. Pavlov, E.N. Pitsik, G.A. Guyo, N.S. Frolov, V.V. Grubov, O.N. Pavlova, Z. Wang, A.E. Hramov, *Eur. Phys. J. Plus*, **136**, 408 (2021). DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01423-x
- [15] G.A. Guyo, A.N. Pavlov, E.N. Pitsik, N.S. Frolov, A.A. Badarin, V.V. Grubov, O.N. Pavlova, A.E. Hramov, *Chaos, Solit. Fract.*, **158**, 112038 (2022). DOI: 10.1016/j.chaos.2022.112038