

## Нагрев слоя металла сканирующим лазерным пучком

© V. Trofimov<sup>1</sup>, Pengcheng Lin<sup>1</sup>, С.В. Федоров<sup>2,¶</sup>, Н.Н. Розанов<sup>2</sup>, Н.А. Веретеннов<sup>2</sup>, Yan Wang<sup>1</sup>, Yongqiang Yang<sup>1</sup>

<sup>1</sup> South China University of Technology, 510640 Guangzhou, China

<sup>2</sup> ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, 194021 Санкт-Петербург, Россия

¶ e-mail: sfedorov2006@bk.ru

Поступила в редакцию 20.12.2022 г.

В окончательной редакции 20.12.2022 г.

Принята к публикации 09.01.2023 г.

Выполнен анализ и проведено численное моделирование режима нагрева металлической пластины сканирующим пучком лазерного излучения. В поперечно-одномерном приближении получены оценки и выявлены основные зависимости характеристик установившегося температурного профиля от параметров задачи.

**Ключевые слова:** лазерный нагрев металла, сканирование лазерного пучка, температурный профиль.

DOI: 10.21883/OS.2023.03.55390.92-23

### Введение

Активно развивающимся приложением лазеров служит 3D-печать, основанная на воздействии лазерного излучения на металлы, пластмассы и другие вещества [1–8]. Нагрев вещества (в дальнейшем рассматриваем металл) происходит под воздействием лазерного пучка, сканирующего по поверхности образца. Режим сканирования во многом определяет качество изготавливаемых образцов, и поэтому влияние сканирования и выбор его стратегии широко изучаются в литературе (см., например, [9–18]). Следует отметить, что на практике между линиями сканирования всегда имеет место некоторый пространственный промежуток. Он также влияет на качество изготавливаемого образца, поскольку требуемая температура для плавления металла в этой области достигается за счет процессов теплопроводности, так как эта область может быть недостаточно освещена лазерным пучком. Выбор расстояния между линиями сканирования зависит и от скорости сканирования, при увеличении которой эффективная область прогрева среды вдоль направления сканирования определяется не только радиусом пучка, но и скоростью сканирования. Это, в свою очередь, влияет на процессы теплопроводности как вдоль направления сканирования, так и в перпендикулярном к нему направлении. Наконец, процесс нагрева металла для его последующего плавления определяется также толщиной образца и теплообменом с окружающей средой и подложкой. В качестве последней в системах 3D-печати может служить „плита“, на которой происходит формирование изделия. Таким образом, выявление тенденций и получение оценок параметров температурного профиля нагреваемого металла в зависимости от перечисленных выше факторов (скорости сканирования, толщины образца (порошка или пластины) металла,

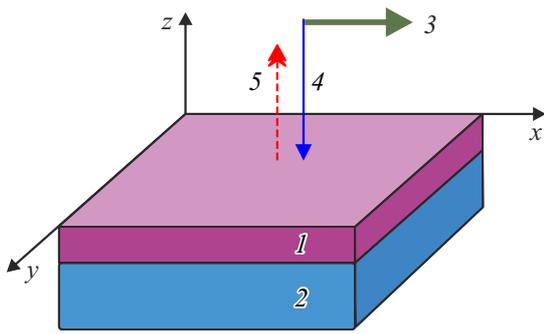
радиуса пучка, мощности оптического излучения) позволил бы оптимизировать процесс нагрева и способствовать выбору стратегии сканирования. Именно этой проблеме посвящена настоящая работа.

Работа организована следующим образом. В следующем разделе мы вводим модель и формулируем основное уравнение теплопроводности для температуры, усредненной по толщине металлической пластинки. Далее совершается переход к безразмерным параметрам и определяется асимптотика распределения температуры вдали от сканирующего лазерного пучка. Затем приводятся оценки времени установления температуры при сканировании с постоянной скоростью и выявляется важная роль структуры пластинки — сплошной ли это металл или же слой металлических шариков. Также оценивается сдвиг максимума температуры относительно максимума интенсивности лазерного пучка и приводятся оценки ширин переднего и заднего фронтов температурного профиля. Представлены полученные численным решением уравнения теплопроводности, основные зависимости характеристик установившегося температурного профиля от параметров задачи. Основные выводы суммированы в Заключение.

### Модель и исходные соотношения

Исходное уравнение теплопроводности, описывающее нагрев металлической пластины, имеет вид

$$C_V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + w_v. \quad (1)$$



**Рис. 1.** Схема моделирования. 1 — обрабатываемый слой металла, 2 — подложка. 3 — перемещение лазерного пучка 4 в направлении  $x$  (3) со скоростью  $V$ . 5 — поток тепла от нагретого металла.

Здесь  $T$  — температура,  $t$  — время,  $C_V$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности и  $w_v$  — плотность тепловыделения за счет поглощения лазерного излучения, падающего на пластину приблизительно по нормали. Считаем, что температура не превышает температуру плавления металла, так что какие-либо гидродинамические эффекты в металле не возникают. Пластина толщины  $L$  расположена между газом с температурой  $T_g$  при  $z > 0$  и подложкой с фиксированной температурой  $T_{sub}$  при  $z < -L$  (рис. 1). Лазерное излучение падает на пластину из газовой среды и отражается с коэффициентом отражения  $R$ , зависящим от температуры  $T$ . На гранях пластины  $z = 0$  и  $z = L$  потоки тепла описываются законом Ньютона

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \alpha_g (T - T_g), \\ \kappa \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-L} &= -\alpha_{sub} (T - T_{sub}). \end{aligned} \quad (2)$$

В (2)  $\alpha_{g,sub}$  — коэффициенты теплоотдачи на соответствующих гранях. Ниже мы дополним описание теплоотдачи учетом радиационного теплообмена.

В характерных условиях различие температур  $T_g$  и  $T_{sub}$  невелико, а пластина столь тонка (условие  $L \ll \kappa/\alpha_{sub}$ ), что ее температура мало меняется в нормальном направлении. Тогда можно использовать приближение среднего поля, т.е. усреднение уравнения теплопроводности по  $z$ , как это делается в задачах оптической бистабильности с тепловым механизмом нелинейности [19,20]. При этом, помимо уменьшения геометрической размерности задачи, граничные условия (2) учитываются самим усредненным уравнением. Для металлической пластины лазерное излучение полностью поглощается на ее толщине; тогда усредненное тепловыделение  $\langle w_v \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L w_v dz = BI_{in}$ , где  $B = \frac{1}{L}(1 - R)$ .

В результате получаем замкнутое приведенное уравнение теплопроводности, описывающее динамику усреднен-

ной температуры  $\langle T \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L T dz$  (знак усреднения далее опускаем):

$$\begin{aligned} C_V(T) \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) \\ &- \Phi(T) + B(T)I_{in}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3)  $x$  и  $y$  — поперечные координаты,  $I_{in}$  — интенсивность падающего лазерного пучка при  $z = 0$  и

$$\Phi(T) = \frac{1}{L} [\alpha_{sub}(T - T_{sub}) + \alpha_g(T - T_g) + \alpha_R(T^4 - T_g^4)]. \quad (4)$$

Здесь  $\alpha_R$  — коэффициент радиационного теплообмена на границе с газом. Подложка считается достаточно толстой (в идеале полубесконечной). Если подложка отсутствует, ее теплофизические характеристики заменяются в (4) характеристиками окружающего газа. В отсутствие лазерного нагрева или же вдали от лазерного пучка установившаяся (усредненная по  $z$ ) температура пластины  $T_0$  определяется условием  $\Phi(T_0) = 0$ . Размерности теплофизических параметров следующие:  $[C_V] = W \cdot s \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ,  $[\kappa] = W \cdot s \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ,  $[\alpha_g] = [\alpha_{sub}] = W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$ ,  $[\alpha_R] = W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ .

Далее мы рассмотрим режим сканирования лазерного пучка по поверхности с постоянной скоростью  $V$  вдоль оси  $x$ , не затрагивая зависимость температуры от другой поперечной координаты  $y$ ; для металлического стрежня малого размера в направлении  $y$  реализуется усреднение и по этому направлению. Тогда в (3) член  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right)$  отсутствует, а интенсивность излучения зависит только от одной комбинированной переменной:  $I_{in} = I_{in}(x - Vt)$ . Введя  $X = x - Vt$ , в установившемся режиме получим

$$\frac{d}{dX} \left( \kappa(T) \frac{dT}{dX} \right) + VC_V(T) \frac{dT}{dX} - \Phi(T) + B(T)I_{in}(X) = 0. \quad (5)$$

Это уравнение определяет установившийся профиль температуры. Нестационарное уравнение позволяет описать и процесс его установления. Далее для определенности считаем  $V > 0$ .

Температурные зависимости теплофизических характеристик и коэффициента отражения задаются параметрами металла. Для меди они приведены в Приложении на основании данных [21–24].

### Безразмерные переменные и безразмерное уравнение теплопроводности

Безразмерная форма управляющих уравнений позволяет масштабировать решения и результаты одного численного расчета использовать для получения информации о многих вариантах парамет-

ров задачи. Для этого введем рабочую температуру и безразмерные теплофизические параметры, выделив их значения при рабочей температуре:  $c_v = C_V(T)/C_{V,N}$ , где  $C_{V,N} = C_V(T_{\text{work}})$ , и аналогично  $\Lambda = \kappa(T)/\kappa_N$ ,  $\beta_g = \alpha_g(T)/\alpha_{g,N}$ ,  $\beta_{\text{sub}} = \alpha_{\text{sub}}(T)/\alpha_{\text{sub},N}$ , и  $\beta_R = \alpha_R(T)/\alpha_{R,N}$ . Далее, вводим масштаб времени

$$\tau_0 = (C_{V,N}/\alpha_{g,N})L \quad (6)$$

и безразмерное время  $\tau = t/\tau_0$ . Время  $\tau_0(T_{\text{work}})$  служит естественной оценкой времени установления стационарного режима. Естественным масштабом координаты служит  $L_{\text{scale}} = (L \cdot \kappa_N/\alpha_{g,N})^{1/2}$ , так что безразмерная координата  $\xi = x/L_{\text{scale}}$ . Безразмерную скорость сканирования удобно ввести соотношением  $v_s = lV/V_{\text{scale}}$ , где  $V_{\text{scale}} = L/\tau_0 = \alpha_{g,N}/C_{V,N}$  и  $l = L/L_{\text{scale}} = [L/(\kappa_N/\alpha_{g,N})]^{1/2}$ . Размерную температуру  $T$  представим в виде  $T = T_0 + \Theta T_{\text{work}}$ , где  $\Theta = (T - T_0)/T_{\text{work}}$  — отклонение относительной температуры от равновесного значения в отсутствие лазерного излучения. Наконец, безразмерная интенсивность лазерного излучения  $I_0 = I_{\text{in}}/(\alpha_{g,N}T_{\text{work}})$ . Хотя здесь мы рассматриваем одномерную задачу, при расчете реальной мощности лазерного излучения будем полагать, что лазерный пучок — осесимметричное пятно.

В безразмерной форме уравнение теплопроводности записывается в виде

$$C_V(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \Lambda \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right) - \varphi(\Theta) + [1 - R(\Theta)]I_0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi(\Theta) = & \beta_g(\Theta - \Theta_g) + \frac{\alpha_{\text{sub},N}}{\alpha_{g,N}} \beta_{\text{sub}}(\Theta - \Theta_{\text{sub}}) \\ & + \frac{\alpha_{r,N}}{\alpha_{g,N}} T_{\text{work}}^3 \beta_R \left[ \left( \Theta + \frac{T_0}{T_{\text{work}}} \right)^4 - \left( \frac{T_g}{T_{\text{work}}} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (8)$$

и  $\Theta_g = (T_g - T_0)/T_{\text{work}}$ ,  $\Theta_{\text{sub}} = (T_{\text{sub}} - T_0)/T_{\text{work}}$ .

Соотношение  $\Phi(T_0 = 0)$  переходит в условие  $\varphi(0) = 0$ .

В рассматриваемом случае сканирования лазерного пучка с постоянной скоростью интенсивность  $I_0 = I_0(\chi)$ , где  $\chi = \xi - v_s \tau$ . В установившемся режиме  $\Theta = \Theta(\chi)$ , так что установившийся профиль температуры определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} \Lambda(\Theta) \frac{d^2 \Theta}{d\chi^2} + K(\Theta) \left( \frac{d\Theta}{d\chi} \right)^2 + v_s c_v \frac{d\Theta}{d\chi} - \varphi(\Theta) \\ + [1 - R(\Theta)]I_0(\chi) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $K = d\Lambda/d\Theta$ , с граничными условиями  $\Theta_{\chi \rightarrow \pm\infty} = 0$ .

На периферии пучка интенсивность лазерного излучения пренебрежимо мала. Температура металла там мало отличается от равновесной, и ее приближение к равновесному значению имеет экспоненциальный характер,  $\Theta \sim \exp(\gamma\chi)$ . Показатель экспоненты  $\gamma$  определяется из

линеаризованного около равновесного значения температуры уравнения (9):

$$\Lambda_0 \gamma^2 + v_s c_{v,0} \gamma - \varphi'_0 = 0, \quad (10)$$

где  $\Lambda_0 = \Lambda(0)$ ,  $c_{v,0} = c_v(0)$ ,  $\varphi'_0 = (d\varphi/d\Theta)_{\Theta=0}$ .

Решением квадратного уравнения (10) при характерных условиях ( $\Lambda(0) > 0$ ,  $c_{v,0} > 0$ ,  $\varphi'_0 > 0$ ) служат два вещественных корня, противоположных по знаку

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{2\Lambda_0} \left[ -v_s c_{v,0} \pm \sqrt{(v_s c_{v,0})^2 + 4\Lambda_0 \varphi'_0} \right]. \quad (11)$$

Соответственно передний профиль температуры обладает характерной шириной  $1/|\gamma_-|$ , а ширина заднего фронта  $\sim 1/|\gamma_+|$ . Естественно, что ширина переднего фронта меньше, чем у заднего. Различие ширин фронтов означает асимметрию температурного профиля при нагреве даже симметричным (с колоколообразным распределением интенсивности) лазерным пучком и приводит к сдвигу максимума температуры относительно максимума интенсивности лазерного пучка. Оценки показывают, что при малых толщинах слоя металла этот сдвиг растет со скоростью сканирования приблизительно линейно. Более полную информацию дает численный расчет, приводимый ниже. Отметим также, что полезную оценку снизу интенсивности лазерного пучка, необходимую для нагрева металла до заданной температуры  $T_m$ , дает сравнение с нагревом однородным лазерным излучением (предел бесконечно большой ширины пучка). При таком нагреве температура также однородна и интенсивность лазерного излучения определяется соотношением  $I_{\text{hom}} = \varphi(\Theta_m)/[1 - R(\Theta_m)]$ . Естественно, что для пучка конечной ширины максимальная интенсивность должна превосходить значение  $I_{\text{hom}}$ . Далее, с привлечением численных расчетов, использующих теплофизические параметры металла, мы приведем количественные данные о температурном профиле.

## Оценки времени установления температурного профиля и модель шариков

Формула (6) для времени установления профиля температуры свидетельствует о его пропорциональности толщине слоя металла. Для объемных параметров меди (см. Приложение) получим по (6) весьма большие значения времени установления:  $\tau_0 = 4.15 \cdot 10^4 \text{ s} = 11.5 \text{ hour}$  для  $L = 0.1 \text{ m}$  и  $\tau_0 = 4.15 \text{ s}$  для  $L = 10 \mu\text{m}$ . В действительности же металл в рассматриваемой задаче не является сплошным, а состоит из шариков микронных размеров. Это ведет к уменьшению плотности и увеличению эффективной поверхности металла. Пусть плотность уменьшается до двух раз из-за геометрического фактора, а удельная теплоемкость — пропорционально отношению площади общей поверхности шариков к ее части, касающейся других шариков (до двадцати раз),

так что далее при определении размерных констант можно подставить  $C_V \rightarrow C_V/c_{V\text{eff}}$ , считая по прежнему, что  $C_V$  — плотность теплоемкости объемной меди. Кроме того, коэффициенты конвекционного и радиационного охлаждения  $\alpha_g$  и  $\alpha_R$  увеличиваются пропорционально отношению полной площади поверхности всех шариков в пластинке толщиной  $L$  к площади поверхности сплошной медной пластинки, например  $\alpha_g \rightarrow c_{Sph}\alpha_g$  и  $c_{Sph} = 20$ . Обозначенные замены влияют только на нормировку параметров: времени установления  $\tau_0$ , масштабы скорости сканирования и интенсивности пучка. Далее считаем, что коэффициент уменьшения времени охлаждения/нагрева шариков по сравнению с целой пластинкой  $c_{\tau\text{eff}} = c_{V\text{eff}}c_{Sph} = 400$ , так что характерное время установления для шариков меди  $\tau_0 \approx 10^{-2}$  s для  $L = 10 \mu\text{m}$ . Аналогично замена сплошного металла на шарики увеличивает и теплообмен с подложкой; для стальной подложки это уменьшение по оценкам может составлять до 10 раз. Таким образом, время установления температуры может быть малым для тонкого слоя шариков. Дальнейшие результаты приводятся для уже установившихся профилей температуры.

### Сдвиг максимума температурного профиля относительно профиля лазерной интенсивности

Будем считать, что профиль интенсивности лазерного пучка колоколообразный, с одним максимумом при  $\chi = 0$ , причем  $I_0(0) = I_m$ . Максимум стационарного профиля температуры будет сдвинут в сторону заднего фронта, так что максимальная температура  $\Theta = \Theta_{\text{max}}$  достигается при  $\chi = \chi_{\text{max}} < 0$ . Разлагая температурный профиль в ряд по малому отклонению от  $\chi_{\text{max}}$  вплоть до кубических членов, можно получить следующие неравенства:

$$0 < I'_0(\chi_{\text{max}}) < v_s \frac{\Theta_{\text{max}} - \Theta_m}{\Theta_m} \frac{c_\rho(\Theta_m)\varphi(\Theta_m)}{1 - R(\Theta_m)}. \quad (12)$$

При обращении верхнего ограничения (12) в равенство в предельных случаях „тонкого“ и „толстого“ слоя металла получим для сдвига  $\chi_{\text{max}}$  по отношению к безразмерной ширине пучка  $\rho_b$

$$\chi_m/\rho_b \approx \begin{cases} -\frac{1}{2}\rho_b(1 - I_{\text{hom}}/I_m)(V/V_{\text{scale}})/l, & (V/V_{\text{scale}})l \ll 1, \\ -\ln^{1/2}(I_{\text{hom}}/I_m), & (V/V_{\text{scale}})l \gg 1. \end{cases} \quad (13)$$

На рис. 2 для пучка с характерной безразмерной шириной („радиусом“)  $\rho_b$  представлена зависимость  $\chi_{\text{max}}$  от  $I_{\text{max}} = I_{\text{in}}(0)$ , такая, что верхнее ограничение (12) превращается в равенство. При этом при изменении интенсивности  $I_{\text{max}}$  меняется и ширина пучка  $\rho_b$  так, чтобы мощность была постоянна. Рисунок приведен для случая тонкого слоя шариков с толщиной  $L = 10 \mu\text{m}$ .

Главное отличие „тонкого“ слоя от „толстого“ состоит в уменьшении относительного отклонения приблизительно в 100 раз, что согласуется с оценками (13).

### Оценки ширины фронтов температурного профиля для слоя меди

Оценим ширины фронтов на основании соотношения (11) для тонкого слоя меди при скоростях сканирования лазерного пучка  $V = 5 \dots 10$  cm/s. В этом случае оказывается, что зависимость ширин от скорости практически отсутствует, асимметрия температурного профиля не выражена, ширины переднего и заднего фронтов близки друг к другу и определяются безразмерным масштабным фактором  $l$ :

$$r_\pm \approx 1/|\gamma_\pm| = 27l \text{ cm}. \quad (14)$$

Так, при толщине слоя меди  $L = 10 \mu\text{m}$  ширина фронтов  $r_\pm \approx 0.27$  cm.

На рис. 3 мы приводим зависимости ширины переднего ( $r_- = 1/|\gamma_-|$ ) и заднего ( $r_+ = 1/|\gamma_+|$ ) фронтов от температуры подложки и от толщины слоя для полужирин температурного профиля для случая шариков. Температура газа не меняется,  $T_g = 293$  K. Видно, что при увеличении температуры подложки стационарный профиль температуры не расширяется катастрофически при учете именно радиационного охлаждения.

### Решение граничной задачи для установившегося профиля температуры

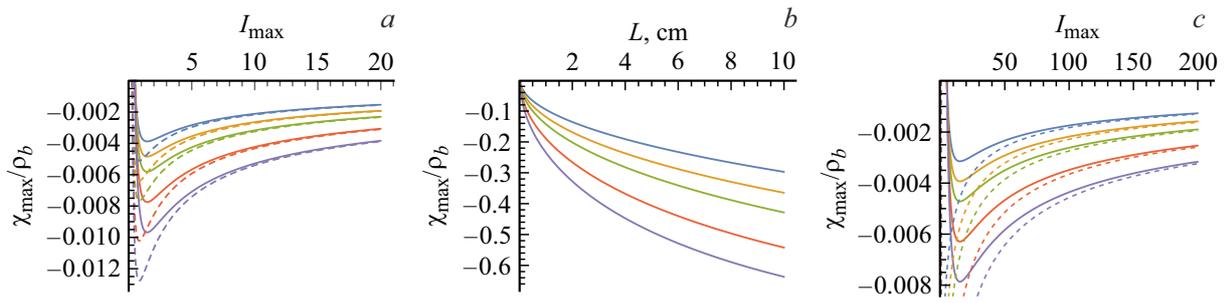
Установившийся профиль температуры определяется решением размерного уравнения (5) или безразмерного уравнения (9) с граничными условиями на периферии. Для модели неограниченного в поперечном направлении слоя металла граничное условие состоит в приближении температуры к равновесному значению  $T = T_0$  ( $\Theta = 0$ ). Более точные граничные условия следуют из приведенной выше асимптотики такого приближения, см. формулы (10) и (11) для скорости  $\gamma_\pm$  приближения температуры к равновесному значению.

Уравнения (5) и (9) являются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. Для решения удобно перейти к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка, введя логарифмическую производную относительного отклонения температуры

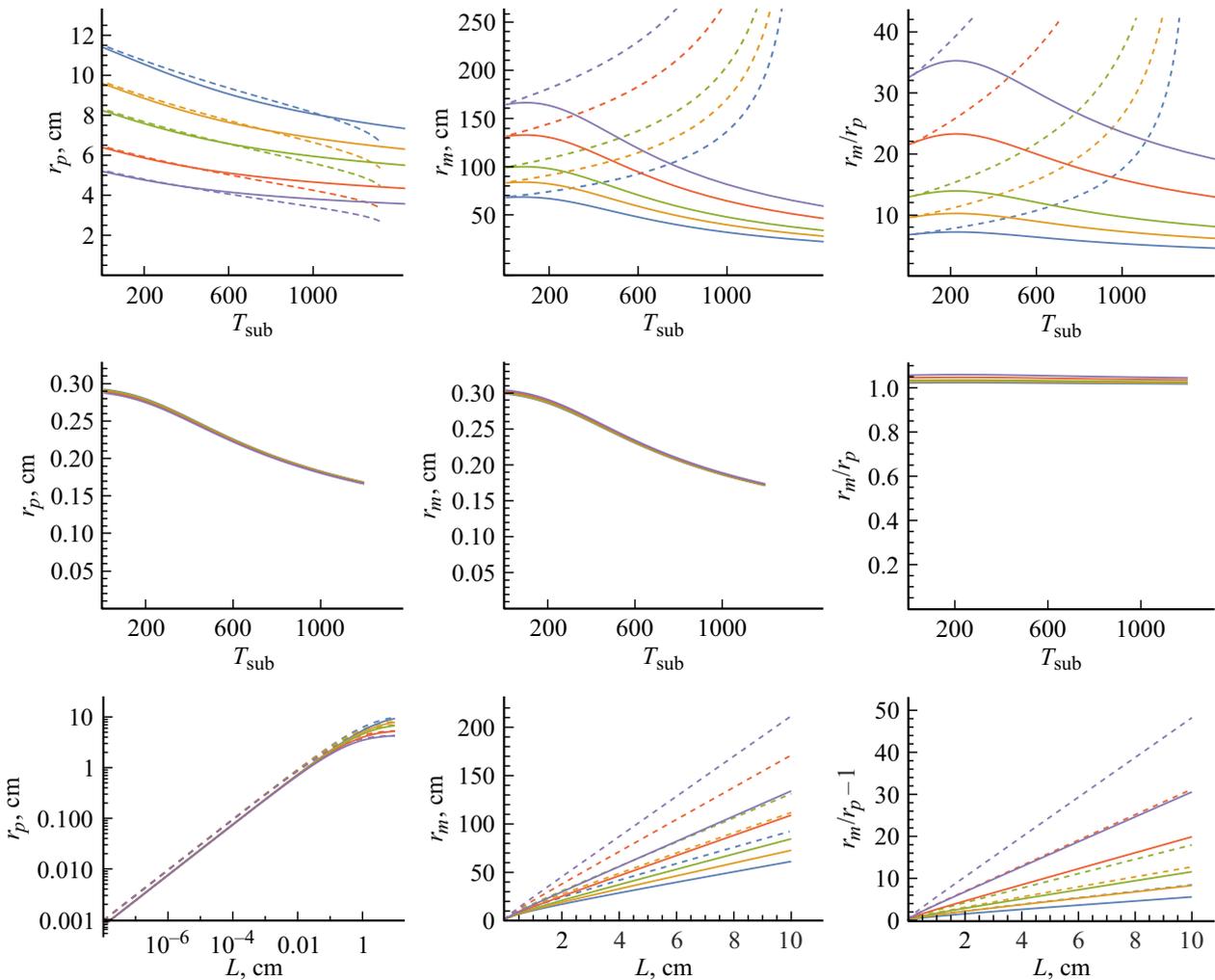
$$\gamma(\Theta) = \Theta^{-1}(\chi)d\Theta/d\chi \quad (15)$$

и уравнение для ее изменения

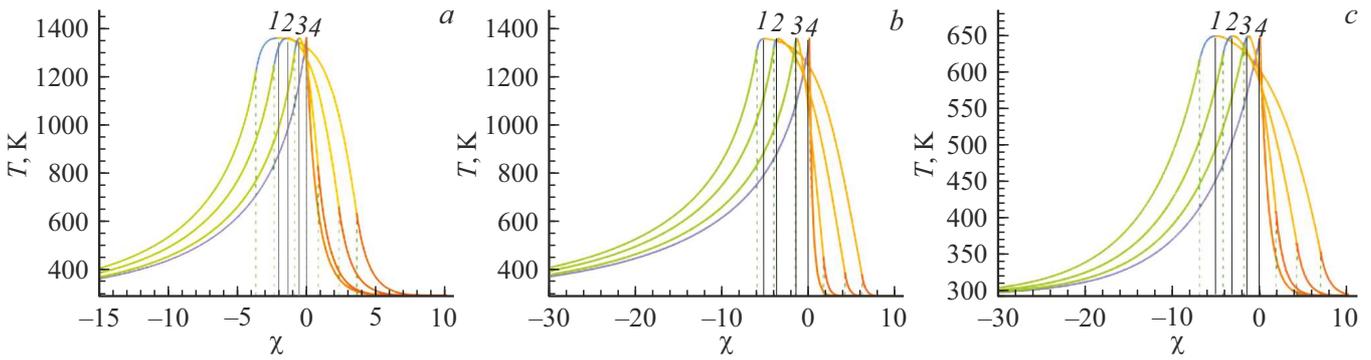
$$\Lambda(\Theta)\Theta^2\gamma \frac{d\gamma}{d\Theta} + [K(\Theta)\Theta^2 + \Lambda(\Theta)\Theta]\gamma^2 + v_s c_v \Theta \gamma + [1 - R(\Theta)]I_0(\chi) = 0. \quad (16)$$



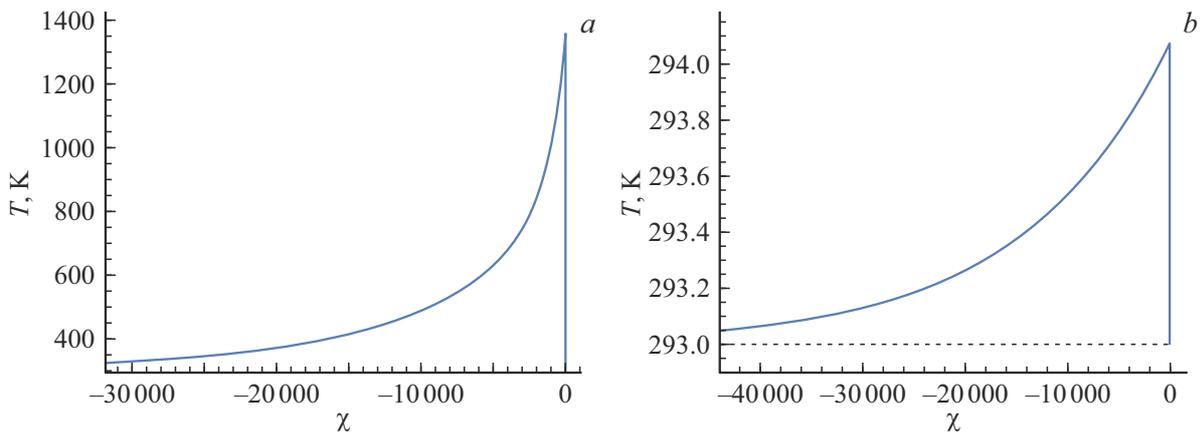
**Рис. 2.** Зависимость относительного сдвига максимума профиля температуры относительно максимума профиля лазерного пучка от толщины пластинки (*b*) и от максимальной интенсивности  $I_{\max}$  [kW/cm<sup>2</sup>] для заданной температуры в максимуме  $T_{\max} = T_{\text{melt}}/4 = 559$  К (*a*) и  $T_{\max} = T_{\text{melt}} = 1356$  К (*c*), равной температуре плавления меди. Температура подложки  $T_{\text{sub}} = T_g$ . Разные кривые, сверху вниз, соответствуют скоростям сканирования  $V = 2, 2.5, 3, 4, 5$  см/с. На графиках ширина пучка уменьшается с ростом  $I_{\max}$  начиная с  $\rho_b = 1, r_b = 0.1$  см при  $I_{\max} = 2$  [kW/cm<sup>2</sup>] так, что постоянно величина мощности  $T_{\max} = T_{\text{melt}}/4 = 559$  К (*a*) или  $I_{\max} = 6$  [kW/cm<sup>2</sup>], при  $P_{\text{in}} = 182$  W (*c*). Толщина слоя шариков  $L = 10 \mu\text{m}$ . Для зависимости от толщины (*b*)  $I_{\max} = 20$  [kW/cm<sup>2</sup>]. Пунктирные кривые — без учета радиационного охлаждения. Расчет для примерного случая шариков,  $c_{\text{r eff}} = 400, c_{\text{Sph}} = 20$  и для ускоренного теплообмена с подложкой,  $c_{\text{subCu}} = 10$ .



**Рис. 3.** Первый и второй ряд — зависимости характерного масштаба спада профиля температуры на переднем и заднем фронте,  $r_{\pm}$ , от температуры подложки для разных скоростей сканирования  $V = 2; 2.5; 3; 4$  см/с для кривых  $r_{-}$  сверху вниз и  $r_{+}, r_{+}/r_{-}$  снизу вверх, при толщине слоя  $L = 10$  см в первом и  $L = 10 \mu\text{m}$  во втором ряду. Третий ряд — зависимости ширин фронтов от толщины пластинки  $L$  при  $T_{\text{sub}} = T_g$ . Расчет — для примерного случая шариков,  $c_{\text{r eff}} = 400, c_{\text{Sph}} = 20$ , и для ускоренного теплообмена с подложкой,  $c_{\text{subCu}} = 10$ . Штриховые кривые — для случая без учета радиационного охлаждения, т.е. при  $\alpha_R = 0$ .



**Рис. 4.** Профили температуры для пучков со ступенчатым профилем интенсивности различной ширины при условии одной и той же максимальной температуры,  $T_m = T_{melt} = 1356$  (a, b) и  $T_m = 647$  (c). Максимумы профилей температуры для разных пучков с конечной шириной отмечены тонкой вертикальной линией. Границы пучков обозначены штрихами. Центр узкого пучка — в нуле. Кривые слева на право: полуширина пучка  $\rho_b = 3.6, 2.35, 0.85, 0.0$ , интенсивность  $I_s = 5.16, 5.62, 9.38, \infty$  kW/cm<sup>2</sup>, мощность  $P_b = 6.83, 3.1, 0.68, 1.0 \cdot l^2 \cdot$  MW (a) и  $\rho_b = 6.07, 4.11, 1.63, 0.0$ ,  $I_s = 5.16, 5.62, 9.38, \infty$  kW/cm<sup>2</sup>,  $P_b = 19.0, 9.52, 2.45, 1.8 \cdot l^2 \cdot$  MW (b),  $\rho_b = 6.91, 4.21, 1.82, 0.0$ ,  $I_s = 0.78, 0.93, 1.56, \infty$  kW/cm<sup>2</sup>,  $P_b = 3.73, 1.66, 0.52, 0.4 \cdot l^2 \cdot$  MW (c). Скорость сканирования  $V = 2 \cdot l^{-1}$  cm/s (a, c) и  $5 \cdot l^{-1}$  cm/s (b). Параметры выбраны для типичного случая шариков,  $c_{\tau eff} = 400$ ,  $c_{sph} = 20$  и для ускоренного теплообмена с подложкой,  $c_{subCu} = 10$ .



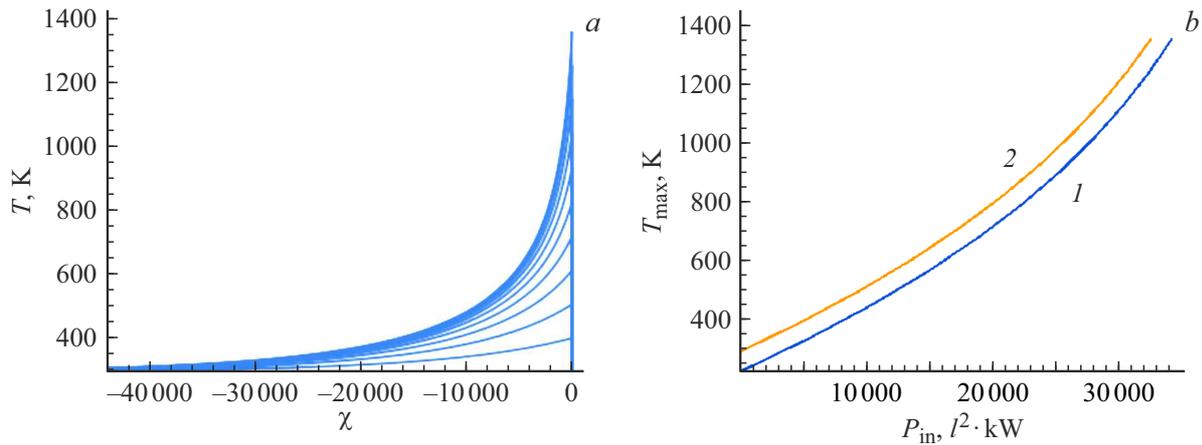
**Рис. 5.** Зависимость температуры от относительной координаты для большой скорости сканирования,  $V = c_{sph} \cdot 5 \cdot l^{-1}$  cm/s (для слоя шариков  $c_{\tau eff} = 400$ ). (a) Зависимость при мощности  $P_{in} = c_{sph} \cdot 33 \cdot l^2 \cdot$  MW, когда температура в максимуме  $T_{max} = 1356$  К чуть меньше, чем температура плавления меди. (b) Зависимость при  $P_{in} = c_{sph} \cdot 53 \cdot l^2 \cdot$  kW,  $T_{max} = 294$  К, т.е. на градус больше температуры окружающей среды, что недостаточно для нагрева пластинки толщиной  $L = 10$  см при такой скорости сканирования.

Асимптотически при  $\chi \rightarrow \pm\infty$  логарифмическая производная  $\gamma(\Theta)$  приближается к величинам  $\gamma_{\pm}$ .

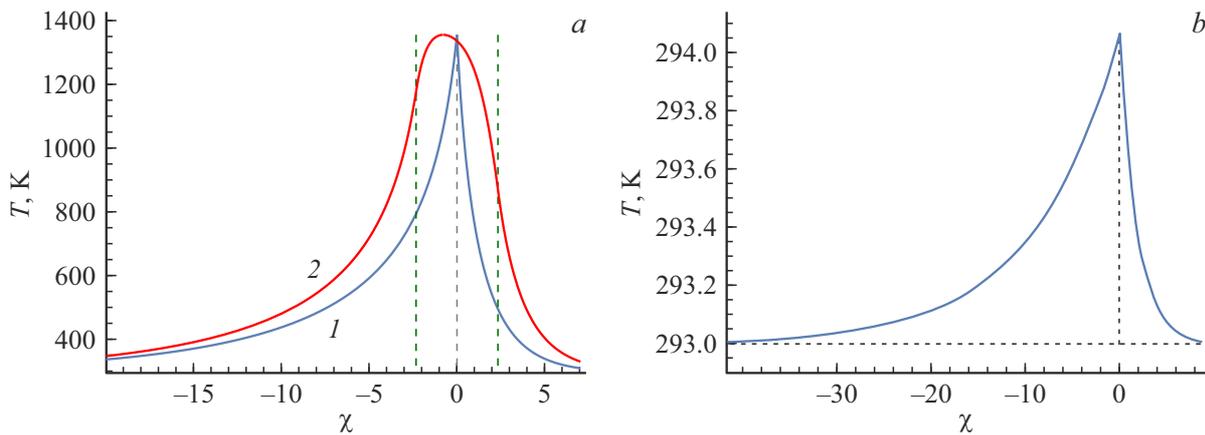
Зависимость профиля интенсивности лазерного излучения можно аппроксимировать рядом ступенек, на каждой из которых интенсивность постоянна,  $I_0 = const$ . В пределах такой ступеньки уравнение (16) позволит найти  $\gamma(\Theta)$ , а сшивая решения для различных ступенек, и полную зависимость этой величины во всем диапазоне изменения. После определения  $\gamma(\Theta)$  координатная зависимость  $\Theta(\chi)$  находится из следующего из уравнения (15) обратного соотношения  $\chi = \int \frac{d\Theta}{\gamma(\Theta)}$ . Практически численное решение осуществляется методом выстрела при старте с асимптотики на одном из краев профиля температуры и подборе условий для обеспечения достижения правильной асимптотики на другом краю профиля.

Наиболее проста реализация такого подхода для весьма узких (дельтаобразных) лазерных пучков и для пучка с профилем интенсивности в виде одной ступеньки. В первом случае можно считать профиль  $I_0(\chi)$  дельтаобразным; конкретный профиль интенсивности при этом не важен и имеется только одна граница сшивания. Во втором случае границ сшивания две; первый случай можно считать и частным случаем второго, когда одновременно с уменьшением ширины ступеньки (ширины лазерного пучка) соответственно увеличивается максимальная интенсивность излучения.

Сравнение профилей температуры для лазерных пучков со ступенчатым профилем интенсивности разной ширины при одной и той же температуре в максимуме приведено на рис. 4. Напомним, что безразмерная координата  $\chi$  на рис. 4–10 — это размерная коор-



**Рис. 6.** (а) Зависимость температуры от относительной координаты для разных мощностей пучка, от  $P_{in} = c_{Sph} \cdot 53 \cdot l^2 \cdot \text{kW}$  до  $P_{in} = c_{Sph} \cdot 33 \cdot l^2 \cdot \text{MW}$ . Остальные параметры — те же, что и на рис. 5. (б) Зависимость температуры в максимуме от мощности пучка в  $[l^2 \cdot \text{kW}]$ , т.е. мощность на оси абсцисс меняется от 5 до  $30 l^2 \cdot \text{kW}$  или для тонкой пластинки с  $l = 0.01$ ,  $L = 10 \mu\text{m}$ , от 0.5 до 3 kW при высокой скорости сканирования  $V = c_{\tau\text{eff}} 5 \cdot l^{-1} \text{cm/s}$ . Дополнительная кривая 2 (желтый цвет) приведена для охлажденной подложки,  $T_{\text{sub}} = 202 \text{K}$ .

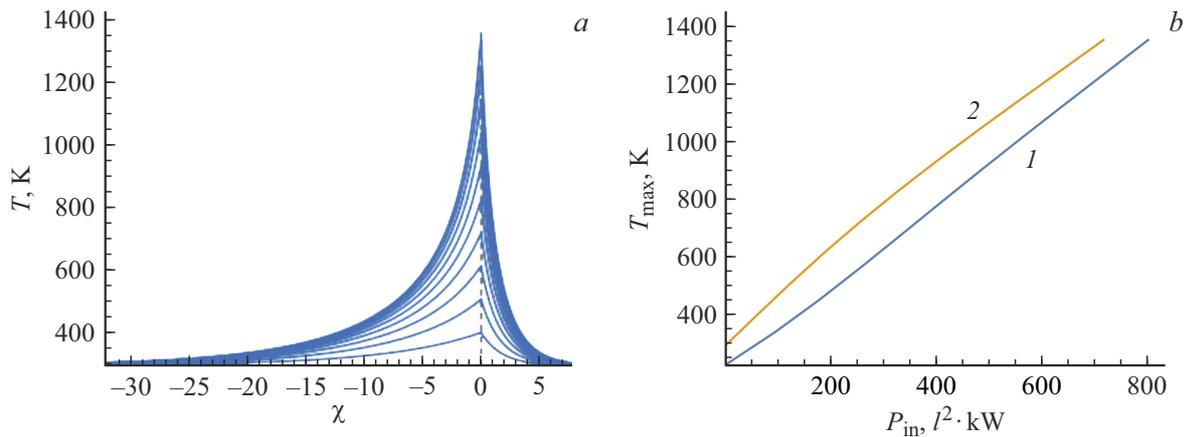


**Рис. 7.** Зависимость температуры от относительной координаты  $\chi$  для небольшой скорости сканирования,  $V = l^{-1} \text{cm/s}$  в случае шариков при  $c_{\tau\text{eff}} = 400$ ,  $c_{\text{subCu}} = 10$ ,  $T_{\text{sub}} = T_g = 293 \text{K}$ . Положение максимума установившегося распределения температуры отмечено штрихами. (а) График для мощности  $P_{in} = 792 \cdot l^2 \cdot \text{kW}$ ,  $T_{\text{max}} = 1396 \text{K}$ . Для (б)  $P_{in} = 0.8 \cdot l^2 \cdot \text{kW}$ ,  $T_{\text{max}} = 294 \text{K}$ , что недостаточно для нагрева пластинки толщиной с такой скоростью сканирования. Кривая 2 соответствует температурному профилю для ступенчатого лазерного пучка с полушириной  $\rho_b = 3$  при той же температуре в максимуме. Границы и центр пучка обозначены вертикальными штриховыми линиями. Смещение максимума  $\chi_m = -0.8$ . Интенсивность на всей ширине пучка  $I_s = 4.9 \text{kW/cm}^2$ , мощность та же,  $P_{in} = 792 \cdot l^2 \cdot \text{kW}$ . Остальные параметры те же, что и на рис. 5.

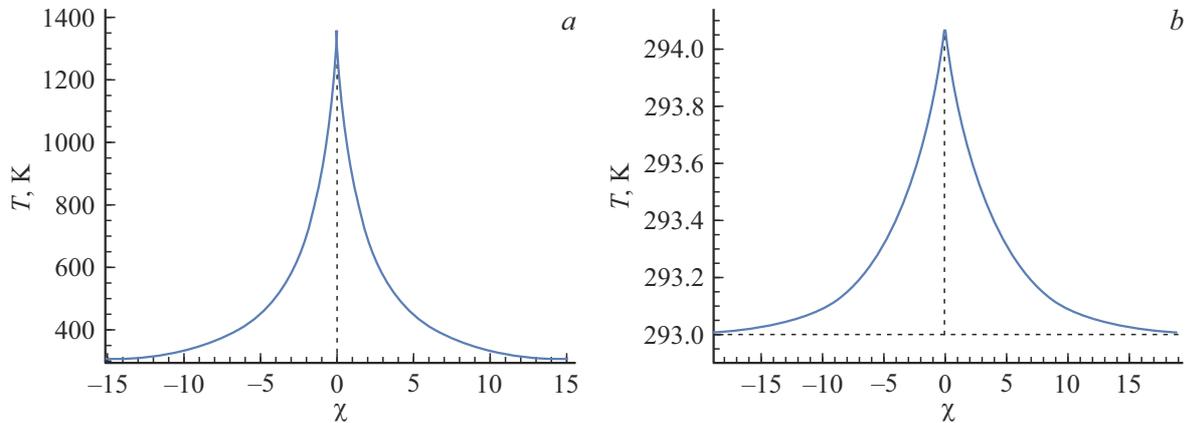
дината, нормированная на  $(L \cdot \kappa_N / \alpha_{g,N})^{1/2}$  — величину, пропорциональную квадратному корню из толщины пластины  $L$ , а безразмерный параметр  $l = [L / (\kappa_N / \alpha_{g,N})]^{1/2}$  также пропорционален корню из  $L$ . Видно, что смещение максимума температуры тем больше, чем меньше интенсивность пучка и чем больше его ширина. Для широкого пучка с максимальной интенсивностью, близкой к  $I_{\text{hom}}$ , смещение резко нарастает, и профиль температуры превращается почти в однородный.

Далее на рис. 5–10 приведены результаты расчета температурного профиля граничной задачи (16) в пределе узкого пучка. В такой постановке поправоч-

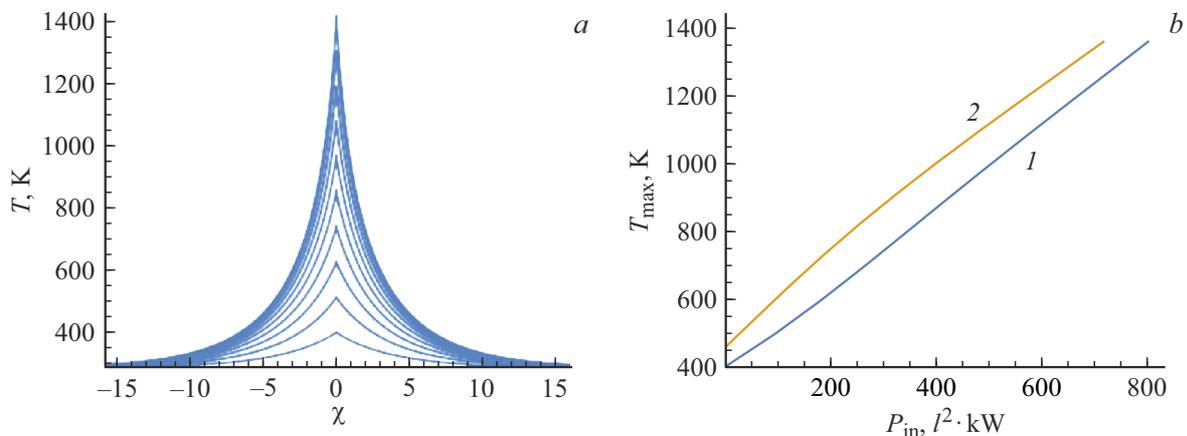
ный коэффициент  $c_{\tau\text{eff}}$  входит только в определение масштаба скорости сканирования, а  $c_{Sph}$  в определение масштаба мощности пучка (далее  $c_{Sph} = 20$ ). Использование введенного выше безразмерного параметра позволяет масштабировать результаты, варьируя толщину слоя металла, мощность лазерного пучка и т.д. Рисунки 5–10 приведены для заданной безразмерной скорости  $v_s$ , и профили температуры для слоя шариков меди отличаются от сплошного слоя меди только увеличением скорости сканирования при  $c_{\tau\text{eff}} = 400$ . Рисунки 5 и 6 соответствуют скорости сканирования для сплошной пластинки на нижней границе выбранного интервала скоростей  $V = (5 \div 10) \cdot l^{-1} \text{cm/s}$ ,



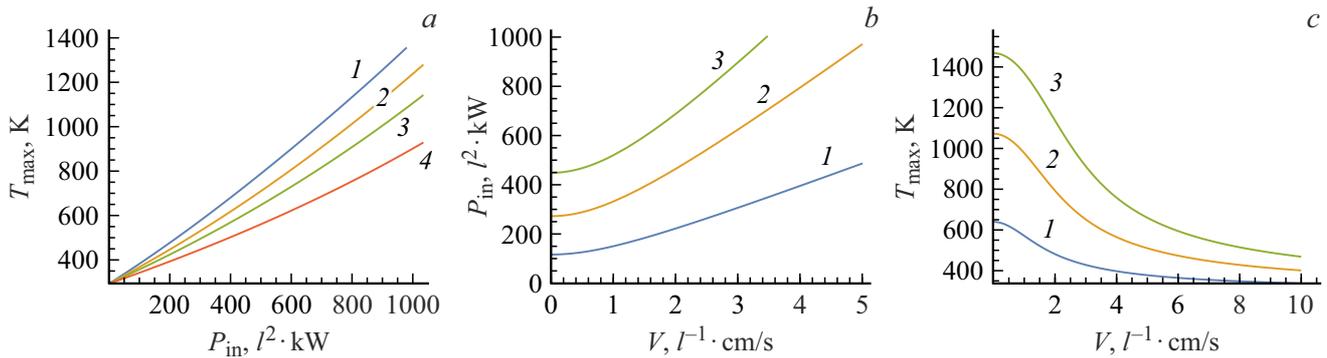
**Рис. 8.** (a) Зависимость температуры от относительной координаты для разных мощностей пучка, от  $P_{in} = 0.8 \cdot l^2 \cdot kW$  до  $P_{in} = 792 \cdot l^2 \cdot kW$ . (b) Зависимость температуры в максимуме от мощности пучка в  $[l^2 \cdot kW]$  для небольшой скорости сканирования,  $V = l^{-1} \text{ cm/s}$ , кривая 1. Дополнительная кривая 2 приведена для охлажденной подложки,  $T_{\text{sub}} = 178 \text{ K}$ .



**Рис. 9.** Зависимость температуры от относительной координаты  $\chi$  для малой скорости сканирования,  $V = 5 \cdot l^{-1} \mu\text{m/s}$ , для слоя шариков  $c_{\text{r eff}} = 400$ . (a) Зависимость при мощности  $P_{in} = 719 \cdot l^2 \cdot kW$ ,  $T_{\max} = 1356 \text{ K}$ . (b) Зависимость при  $P_{in} = 0.61 \cdot l^2 \cdot kW$ ,  $T_{\max} = 294 \text{ K}$ , что недостаточно для нагрева пластинки толщиной  $L = 10 \text{ cm}$ . Остальные параметры — те же, что и на рис. 5. То есть скорость сканирования на рис. 7 и 8 почти не меняет величину мощности нагрева, а влияет только на симметрию пучка, приводя к сравнительно длинному заднему фронту стационарного профиля.



**Рис. 10.** Слева — зависимость температуры от относительной координаты для разных мощностей пучка, от  $P_{in} = 0.61 \cdot l^2 \cdot kW$  до  $P_{in} = 719 \cdot l^2 \cdot kW$ . Справа — зависимость температуры в максимуме от мощности пучка в  $[l^2 \cdot kW]$  для почти нулевой скорости сканирования,  $V = 5 \cdot l^{-1} \mu\text{m/s}$ , кривая 1. Дополнительная кривая 2 приведена для охлажденной подложки,  $T_{\text{sub}} = 202 \text{ K}$ .



**Рис. 11.** (а) Зависимость максимальной температуры для разных скоростей сканирования,  $V = 2; 2.5; 3; 4 \cdot l^{-1} \text{ cm/s}$  для кривых сверху вниз (от синей к красной), от мощности лазерного излучения  $P [l^2 \cdot \text{kW}]$ . (b) Зависимость мощности лазерного излучения, необходимой для достижения максимальной температуры  $T_{\text{max}} = 500, 750, 100 \text{ K}$  для кривых снизу вверх (от синей к зеленой), от скорости сканирования  $V [l^{-1} \text{ cm/s}]$ . (с) Зависимость максимальной температуры для разных значений мощности падающего пучка:  $P_{\text{in}} = 200, 500, 800 \cdot l^2 \cdot \text{kW}$  для кривых снизу вверх (от синей к зеленой), от скорости сканирования  $V [l^{-1} \text{ cm/s}]$ .

соответственно для слоя шариков это большая скорость  $V = 2000 \cdot l^{-1} \text{ cm/s}$ , так что при сканировании пластинка практически не успевает прогреться. Наоборот, сплошная пластинка прогревается почти до температуры плавления, поскольку скорость охлаждения в этом случае недостаточно велика, а время установления профиля очень большое. Величина мощности падающего пучка меняется на этих рисунках в интервале  $P_{\text{in}} = (10 \div 50) \cdot l^2 \cdot \text{MW}$ . В результате передний фронт профиля очень резкий, а задний очень длинный. Необходимо отметить, что интервал скоростей, использованный для демонстрации, здесь повышен в сто раз для  $l = 10^{-2}$ ,  $L = 10 \mu\text{m}$ . Если же выбирать для таких слоев микронного размера интервал скоростей  $V = (5 \div 10) \text{ cm/s}$ , то асимметрия профиля температуры будет существенно меньше, т.е. почти так, как на последующих рис. 9 и 10.

Рис. 7 и 8 соответствуют скорости сканирования  $V = 10 \cdot l^{-1} \text{ cm/s}$  для слоя шариков. В этом случае шарики значительно нагреваются для мощностей  $P_{\text{in}} \sim 400 \cdot l^2 \cdot \text{KW}$ , но длина переднего фронта профиля температуры короче заднего только в 10 раз. На рис. 9 и 10 скорость сканирования весьма мала, так что профиль температуры почти симметричный. Оба типа слоя меди существенно нагреваются при мощности лазерного излучения  $P_{\text{in}} \sim 400 \cdot l^2 \cdot \text{KW}$ .

Из рис. 11,а видны общие тенденции зависимостей максимальной температуры от скорости сканирования и мощности пучка (в  $[l^2 \cdot \text{kW}]$ ). Естественно, что увеличение скорости сканирования ослабляет нагрев слоя. Рис. 11, b показывает, в какой мере следует увеличивать мощность лазерного излучения или уменьшать скорость сканирования для достижения той или иной максимальной температуры. В несколько иной форме ту же тенденцию показывает рис. 11, с.

### Заключение

Проведенный анализ режима нагрева металлического слоя сканирующим лазерным пучком приводит к следующим основным выводам.

Чрезвычайно важное значение имеет структура металлического слоя. Учет того, что слой не сплошной (однородный), а состоит из металлических шариков, меняет основные характеристики режима на несколько порядков величины. В частности, установление температурного профиля при постоянной скорости сканирования лазерного пучка происходит за разумные времена практически только в модели слоя шариков.

Ввиду того, что в характерных условиях ширина температурного профиля заметно превышает ширину лазерного пучка, форма пучка не влияет существенным образом на характеристики нагрева. Достаточную информацию дает рассмотрение случая весьма узких (дельтаобразных) лазерных пучков.

Учет радиационного теплообмена в условиях, когда температура металлического слоя приближается к температуре плавления, определяющим образом ограничивает расплывание профиля температуры.

Максимум температурного профиля сдвинут относительно центра лазерного пучка в сторону заднего фронта. Величина сдвига становится малой для тонких слоев металла, см. (13). Асимметрия температурного профиля заметно уменьшается при увеличении скорости сканирования.

### Финансирование работы

Исследование поддержано грантом РФФИ 21-52-53009 ГФЕН.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Приложение

### Теплофизические параметры меди

Здесь мы приводим значения параметров и коэффициентов в зависимостях теплофизических характеристик от температуры  $T$ , заданной в Кельвинах, и их модификацию для относительной температуры  $\theta = T/T_{\text{work}}$  в двух рабочих диапазонах,  $T_{\text{work}} = 293 \text{ K}$  и  $T_{\text{work}} = 1300 \text{ K} < T_{\text{melt}} = 1356.55 \text{ K}$ , на основании данных [21–24].

Плотность меди:  $\rho_0 = 8890 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}\text{]}$ ,

$\rho_1 = 0.362 \text{ [kg} \cdot \text{m}^{-3}\text{K}^{-1}\text{]}$ ,

$\rho(T) = 8890 - (8890 - 8680) \times (T - T_n) / (600 - 20)$  для  $T_n = 293 \text{ K}$ ,  $\rho(T) = \rho_0 + \rho_1(T - T_n) = \rho_0[1 + \rho_\theta^{(1)}(\theta - \theta_n)]$ ,

$\rho_\theta^{(1)} = 0.012(0.0529)$  для  $T_{\text{work}} = 293(1300) \text{ K}$ .

Теплоемкость:  $c_p = 0.381 \text{ [kJ/(kg} \cdot \text{K)]}$ ,

$c_v^{(1)} = 1.419 \cdot 10^{-4} \text{ [kJ/(kg} \cdot \text{K}^2)\text{]}$ ,

$c_v(T) = 0.374 + (0.414 - 0.374)(T - T_n) / (573 - 293)$ ,

$c_v = c_p / 1.02 = 0.374 \text{ [kJ/(kg} \cdot \text{K)]}$ ,

$c_v(T) = c_v + c_v^{(1)}(T - T_n) = c_v[1 + c_\theta^{(1)}(\theta - \theta_n)]$ ,

$c_\theta^{(1)} = 0.1115$ .

Коэффициент теплопроводности:

$\kappa(T) = k(\theta) = \kappa_0 - \kappa_1 \cdot T + \kappa_2 \cdot T^2 - \kappa_3 \cdot T^3$ ,

$\kappa_i = (-1)^i \kappa_i T_{\text{work}}^i$ ,  $[\kappa_j] = \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ ,  $\kappa_0 = 427$ ,

$\kappa_1 = 0.147$ ,  $\kappa_2 = 1.14 \cdot 10^{-4}$ ,  $\kappa_3 = 4.7 \cdot 10^{-8}$ ,

$[\kappa_j] = \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-(j+1)}$ .  $k(\theta) = \kappa_0(1 + k_1\theta + k_2\theta^2 + k_3\theta^3)$ ,

$k_1 = -0.101$ ,  $k_2 = 0.0229$ ,  $k_3 = -0.00276$  для

$T_{\text{work}} = 293 \text{ K}$  и  $k_1 = -0.448$ ,  $k_2 = 0.4508$ ,  $k_3 = -0.241$  для  $T_{\text{work}} = 1300 \text{ K}$ .

Конвективный (ньютоновский) теплообмен:

Теплообмен с газом,

$\alpha_g(T) = h_0 - h_1 \cdot T + h_2 \cdot T^2 - h_3 \cdot T^3$ ,

$[c_v \rho_0] = \text{Jm}^{-3}\text{K}^{-1}$ ,  $h_0 = 0$ ,  $h_1 = 0.003$ ,  $h_2 = 10^{-6}$ ,

$h_3 = 10^{-9}$ ,  $[h_j] = \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-(j+1)}$ ,  $[C_N] = \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ ,

$c_N(T) = 1 + c_1 \cdot \theta + c_2 \cdot \theta^2 + c_3 \cdot \theta^3$ ,  $c_1 = -0.11$ ,

$c_2 = 0.0107$ ,  $c_3 = -0.00314$  для  $T_{\text{work}} = 293 \text{ K}$ ,

и  $c_1 = -0.488$ ,  $c_2 = 0.0475$ ,  $c_3 = -0.0139$  для

$T_{\text{work}} = 1300 \text{ K}$ .  $c_N(T_{\text{amb}} = 293 \text{ K}) = 0.898$ .

Теплообмен с подложкой из стали

$\alpha_{\text{sub}} = c_{\text{sub Cu}} C_{\text{Fe}} = \text{const}$ ,  $C_{\text{Fe}} = 30 \text{ [W m}^{-2}\text{K}^{-1}\text{]}$ .

Радиационный теплообмен:

$\alpha_R = 4.54 \cdot 10^{-8} \text{ [W m}^{-2}\text{K}^{-4}\text{]}$ ,  $\beta_R = 0.143$ .

Коэффициент поглощения:  $1 - R(T) = B_0 b(\theta) = B_0 +$

$+B_1 T + B_2 T^2$ ,  $B_0 = 0.028$ ,  $B_1 = 1.5 \cdot 10^{-5}$ ,  $|B_2| \leq 10^{-8}$ ,

$[B_j] = \text{K}^{-j}$ ,  $b(\theta) = 1 + b_1(\theta) + b_2(\theta)^2$ ,  $b_1 = 0.157$ ,

$|b_2| \leq 0.031$ .

### Список литературы

- [1] А.А. Углов, И.Ю. Смуров, А.М. Лашин, А.Г. Гуськов. *Моделирование теплофизических процессов импульсного лазерного воздействия на металлы* (Наука, М., 1991).
- [2] А.М. Prokhorov, V.I. Konov, I. Ursu, I.N. Mihailescu. *Laser Heating of Metals* (CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 1990).
- [3] G.G. Gladush, I. Smurov. *Physics of Laser Material Processing. Theory and Experiment* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011).
- [4] W.M. Steen, J. Mazumder. *Laser Material Processing. 4th Edition* (Springer, London, 2010).
- [5] B.S. Yilbas, A.Y. Al-Dweik, N. Al-Aqeeli, H.M. Al-Qahtani. *Laser Pulse Heating of Surfaces and Thermal Stress Analysis* (Springer, Heidelberg, 2014).
- [6] M. Gouge, P. Michaleris. *Thermo-Mechanical Modelling of Additive Manufacturing* (Elsevier Inc., Cambridge, MA, 2018).
- [7] J.M. Dowden. *The Mathematics of Thermal Modeling. An Introduction to the Theory of Laser Material Processing* (Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001).
- [8] Seok Kim, Do Hyeog Kim, Wonpyo Kim, Young Tae Cho, Nicholas X. Fang. *International J. Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*, **8**, 303–326 (2021). <https://bmf3d.com/high-precision-micro-3d-printers/>
- [9] J. Liu, Y. Zhou, S. Li, S. Wen, Q. Wei, C. Yan, Y. Shi. *J. Alloys and Compounds*, **688**, 626–636 (2016).
- [10] T. Bhardwaj, M. Shukla. *Materials Science and Engineering A*, **734**, 102–109 (2018).
- [11] Y. Yang, J.B. Zhan, Z.Z. Sun, H.L. Wang, J.X. Lin, Y.J. Liu, L.C. Zhang. *J. Alloys and Compounds*, **804**, 220–229 (2019).
- [12] R. Esmailizadeh, A. Keshavarzkermani, U. Ali, Y. Mahmoodkhani, B. Behraves, H. Jahed, A. Bonakdar, E. Toyserkani. *J. Alloys and Compounds*, **812**, 152097 (2020).
- [13] W. Guo, B. Feng, Y. Yang, Y. Ren, Y. Liu, H. Yang, Q. Yang, L. Cui, X. Tong, S. Hao. *Materials and Design*, **215**, 110460 (2022).
- [14] A. Collazo, R. Figueroa, C. Pérez, X.R. Nóvoa. *Materials*, **15**, 1353 (2022).
- [15] B.B. Ravichander, K. Mamidi, V. Rajendran, B. Farhang, A. Ganesh-Ram, M. Hanumantha, N. Shayesteh Moghaddam, A. Amerinatanzi. *Materials Characterization*, **186**, 111765 (2022).
- [16] S. Zou, Z. Zhao, W. Xu, X. Ni, L. Zhang, W. Wu, D. Kong, X. He, L. Wang, C. Dong. *Optics and Laser Technology*, **147**, 107652 (2022).
- [17] R. Li, W. Yuan, H. Yue, Y. Zhu. *Optics and Laser Technology*, **146**, 107574 (2022).
- [18] A. Mussatto, R. Groarke, R.K. Vijayaraghavan, M.A. Obeidi, P.J. McNally, V. Nicolosi, Y. Delaure, D. Brabazon. *J. Materials Research and Technology*, **18**, 2672–2698 (2022).
- [19] Н.Н. Розанов. *ЖЭТФ*, **80**, 96 (1981). [N.N. Rozanov. *Sov. Phys. JETP*, **53**, 47 (1981)].
- [20] N.N. Rosanov. *Spatial Hysteresis and Optical Patterns* (Springer, Berlin, 2002).
- [21] Thermalinfo.ru URL: <http://thermalinfo.ru/svoystva-materialov/metally-i-splavy/svoystva-medi-plotnost-teploemkost-teploprovodnost>
- [22] В.Е. Зиновьев. *Теплофизические свойства металлов при высоких температурах* (Металлургия, М., 1989). <http://thermalinfo.ru/spravochniki-skachat/zinovev-teplofizicheskie-svoystva-metallov-pri-vysokih-temperaturah>; <https://metallplaza.ru/cu/phispropcu.htm>; [http://thermalinfo.ru/Sets/bibl\\_files/Zinovjev\\_teplofizicheskie\\_svoystva\\_metallov.djvu](http://thermalinfo.ru/Sets/bibl_files/Zinovjev_teplofizicheskie_svoystva_metallov.djvu)
- [23] В.С. Чиркин. *Теплофизические свойства материалов ядерной техники. Справочник* (Атомиздат, М., 1968). <http://thermalinfo.ru/spravochniki-skachat/chirkin-spravochnik-po-teplofizicheskim-svoystvam>

materialov-yadernoj-tehniki; [http://thermalinfo.ru/Sets/  
bibl\\_files/chirkin-teploffizicheskie-svoistva-materialov-  
yadernoy-tehniki-spravochnik.djvu](http://thermalinfo.ru/Sets/bibl_files/chirkin-teploffizicheskie-svoistva-materialov-yadernoy-tehniki-spravochnik.djvu)

- [24] Медь. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Медь#: :  
text=Температура%20плавления%201356  
%2C55%20К%20\(1083%2C4,вещества.%20Структура%20  
решётки%20кубическая%20гранцентрированная](https://ru.wikipedia.org/wiki/Медь#: :text=Температура%20плавления%201356%2C55%20К%20(1083%2C4,вещества.%20Структура%20решётки%20кубическая%20гранцентрированная)