

03

## О суперразрешении в мнимом изображении в прозрачной диэлектрической сфере

© А.Р. Бекиров

Физический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,  
119991 Москва, Россия

e-mail: bekirov@nanolab.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 10.10.2022 г.

В окончательной редакции 30.11.2022 г.

Принята к публикации 30.11.2022 г.

Известно, что линзы микрометрового размера позволяют разрешать объекты за дифракционным пределом. В настоящей работе с помощью матричного формализма в построении изображений обсуждаются две возможные модели данного явления. В первой модели рассматривается преобразование поля источников при неизменном действительном изображении. Вторая модель ориентирована на поиск матрицы рассеяния частицы, дающей суперразрешение в мнимом изображении. Оба подхода демонстрируют требуемое суперразрешение. Обсуждаются недостатки предложенных моделей и возможные пути их решения.

**Ключевые слова:** дифракционный предел, теория Ми, мнимое изображение, сверхразрешение, дифракция.

DOI: 10.21883/OS.2023.03.55389.4198-22

### Введение

Явление суперразрешения в мнимом изображении с помощью малых сферических микролинз с размером порядка нескольких микрометров [1] вызвало большой интерес. Подтверждение этого эффекта сообщалось во многих работах [2]. В то же время теоретическое объяснение данного явления находится в процессе обсуждения. Были предложены различные модели, например, на основе эффекта суперосцилляций [3]. Другая модель связывает суперразрешение с фокусировкой радиально поляризованного света, которая приводит к возникновению продольно поляризованного света на выходе из частицы и соответствующего преодолению дифракционного предела [4,5]. Есть модели, использующие особенности возбуждения мод шепчущей галереи [6] и интерференционный подход [7]. В целом эти подходы можно разделить на модели, основанные на построении функции рассеяния сферой точечного источника света [8], и модели, опирающиеся на рассмотрение фотонного наноджета [9]. Дискуссия о том какая модель более адекватна эксперименту имеется в [10].

Данная работа опирается на рассмотрение функции рассеяния точки (point spread function, PSF). Многие авторы отмечали, что при таком подходе ограничение, накладываемое на оптическое разрешение, в основном обусловлено дифракционным расплыванием PSF в мнимом изображении [6,10]. Как правило, рассматривается модель сферы или цилиндра вместе с источником, после чего решается задача дифракции, и на основании этого решения осуществляется построение PSF. Результаты однозначно связаны со свойствами рассеивающей сферы, ее размером и показателем преломления. В большинстве

случаев такой подход не приводит к эффекту суперразрешения [6,10].

В настоящей работе решается обратная задача, а именно, рассматривается возможность суперразрешения, задавая требуемую PSF и определяя соответствующие параметры частицы и другие факторы.

В первой части работы вводится математический аппарат, сводящий задачу к решению системы линейных уравнений. Во второй и третьей частях обсуждаются свойства полученного решения: во второй части обсуждаются возможности, связанные с изменением поля источника, в третьей части — с изменением свойств частицы. В обоих случаях удастся найти необходимое решение, но имеются сложности, связанные с его физическим смыслом. Кроме того, задача не имеет единственное решение. В результате обсуждаем лишь принципиальную возможность существования таких решений, а также различных возможностей усиления эффекта суперразрешения.

### Матричный оператор преобразования поля в его оптическое изображение

Согласно теории Аббе, оптическое изображение, создаваемое некоторым источником поля, является восстановленным фурье-преобразованием, определенным при отбрасывании затухающих мод. С использованием такого определения поле мнимого изображения вычисляется [6,7,10] по формуле

$$\mathbf{E}_{\text{im}}(x, y, z) = \left( \frac{1}{2\pi k} \right)^2 \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} \tilde{\mathbf{E}}^*(k_x, k_y, z_0) \times e^{-i[k_x x + k_y y + k_z(z - z_0)]} dk_x dk_y. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{E}}$  — двумерное фурье-преобразование поля в плоскости  $xу$  при  $z = z_0$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2$  — соответствующие волновые числа, а звездочка означает комплексное сопряжение. Формулу (1) можно переписать в другом виде, используя интеграл, записанный в обычном координатном пространстве:

$$\mathbf{E}_{\text{im}} = \frac{k^2}{4\pi} \iint_{\Gamma} (G(\mathbf{n}, \nabla) \mathbf{E}^* - \mathbf{E}^*(\mathbf{n}, \nabla) G) dS_0. \quad (2)$$

Здесь  $G = \exp[ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|]/k|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$  — функция Грина волнового уравнения, оператор

$$\nabla = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}, \frac{\partial}{\partial z_0} \right),$$

а область интегрирования  $\Gamma$  представляет бесконечную поверхность, гомотопную плоскости.

Отметим, что формула (1) свидетельствует о том, что по полю  $\mathbf{E}_{\text{im}}$  невозможно однозначно восстановить поле источника  $\mathbf{E}$  (поскольку в (1) удалена информация об эванесцентных волнах). Однако можно поставить вопрос о получении дополнительной информации за счет наложения на поле  $\mathbf{E}$  каких-то специальных условий. Можно, например, учесть специальные свойства источника или специфику формирования поля  $\mathbf{E}$ . В частности, в данной работе рассматривается случай, когда поле  $\mathbf{E}$  образуется за счет дифракции на частице. Исходя из формул (1) и (2), решение такой обратной задачи приводит к интегральному уравнению, что представляет сложности для соответствующего анализа. Улучшить ситуацию позволяет введение оператора, действующего на коэффициенты разложения поля источника по векторным сферическим функциям. Такой подход приводит к системе линейных уравнений. С помощью указанного оператора можно вычислять поля (1), (2) с большей точностью, чем в результате прямого численного интегрирования. Точность вычислений при этом определяется количеством мод, учитываемых в разложении поля по векторным сферическим функциям.

В большинстве случаев поле источника  $\mathbf{E}$ , входящее в (1), может быть представлено в виде разложения по векторным сферическим функциям  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  третьего рода. Такой вид имеет, например, рассеянное поле в теории Ми [11]:

$$\mathbf{E} = \sum_{l,m} a_{lm} \mathbf{N}_{lm}^{(3)} + b_{lm} \mathbf{M}_{lm}^{(3)}. \quad (3)$$

Нормировка функций  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  совпадает с принятой в работе [12], угловая зависимость дается через  $e^{im\varphi}$ . Коэффициенты, входящие в (3), удобно представить в виде столбца  $\begin{pmatrix} b_{lm} \\ a_{lm} \end{pmatrix}$ . Нумерация компонент этого столбца совпадает с принятой в работе [13]. Поле изображения (1), (2) является регулярным во всем пространстве,

и соответственно может быть представлено в виде разложения по векторным сферическим функциям первого рода, ограниченным в начале координат. Удобно это разложение осуществлять по комплексно сопряженным функциям:

$$\mathbf{E}_{\text{im}} = \sum_{l,m} \tilde{a}_{lm} \mathbf{N}_{lm}^{(1)*} + \tilde{b}_{lm} \mathbf{M}_{lm}^{(1)*}. \quad (4)$$

Можно ввести матричный оператор изображения  $\mathbf{A}$ , определяемый соотношением

$$\begin{pmatrix} \tilde{b}_{lm} \\ \tilde{a}_{lm} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} b_{lm}^* \\ a_{lm}^* \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Для того, чтобы получить в явном виде элементы матрицы  $\mathbf{A}$ , необходимо форму (3) подставить в выражение (1) и затем разложить результат по векторным сферическим функциям в форме (4). Явный вид для компонент оператора  $\mathbf{A}$  и описание метода вычисления приведены в Приложении. Так как поле изображения не позволяет однозначно восстановить поле источника, то

$$\det \mathbf{A} = 0. \quad (6)$$

Используя определения (1) и (2), можно показать, что для любого натурального числа  $n$  справедливо соотношение

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}^n}{2^{n-1}}. \quad (7)$$

Из (7) следует, что столбцы матрицы  $\mathbf{A}$  являются ее собственными векторами с собственным значением, равным 2. Отметим, что матрица  $\mathbf{A}$  имеет, вообще говоря, бесконечную размерность, но в практических расчетах естественно ограничиться конечным числом мод. Количество соответствующих мод в разложениях (3) и (4) удобно брать равным, при этом матрица  $\mathbf{A}$  становится квадратной. Заметим, что соотношения (6) и (7) справедливы, строго говоря, лишь в пределе бесконечного числа мод.

Используя соотношение (7), можно определить ядро оператора  $\mathbf{A}$ . Пусть матрица  $\mathbf{Q}$  содержит в качестве столбцов векторы из ядра оператора  $\mathbf{A}$ , тогда  $\mathbf{A}\mathbf{Q} = 0$ . Используя условия (7), легко убедиться что в этом случае

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{A}/2. \quad (8)$$

Отметим, что в формуле (5) мы ввели оператор  $\mathbf{A}$ , который действует на столбцы из коэффициентов, входящих в разложения поля  $\mathbf{E}$  (3) по сферическим функциям третьего рода. В случае, когда поле  $\mathbf{E}$  разлагается по функциям первого рода (конечным в начале координат), в формуле аналогичной (5), необходимо в правой части добавить множитель  $1/2$ . Это обусловлено тем, что сферические функции первого рода можно представить в виде полусуммы функций третьего и четвертого родов  $\mathbf{M}^{(1)} = 1/2 (\mathbf{M}^{(3)} + \mathbf{M}^{(4)})$  (аналогичное соотношение справедливо и для  $\mathbf{N}$ ). Из формулы (2) и условия излучения Зоммерфельда для решений на бесконечности

следует, что функции 4-го рода не дают вклада в изображение. Физически это означает, что сходящиеся к началу координат волны попросту не попадают на апертуру оптического прибора, поскольку распространяются в противоположную сторону.

### Суперразрешение в мнимом изображении при преобразовании полей источников

В соответствии с определением матрицы  $\mathbf{Q}$  произведение  $\mathbf{A}\mathbf{Q} = 0$ . В таком случае при преобразовании поля (3) в виде

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}, \quad (9)$$

где  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$  произвольный вектор-столбец, поле изображения (1) не меняется. Иначе обстоит дело при наличии рассеивающей частицы, например, сферы. В этом случае поле  $\mathbf{E}$  можно интерпретировать как падающее на частицу и дающее реальное изображение, которое не меняется при преобразовании (9). Преобразование (9) меняет изображение, определяемое рассеянием на сфере, за счет множителя  $\mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ . Поле  $\mathbf{E}^{\mathbf{s}}$ , рассеянное частицей, можно представить в виде

$$\mathbf{E}^{\mathbf{s}} = \mathbf{S}\mathbf{E}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{S}$  — матрица рассеяния [13]. Применяя преобразование (9) к  $\mathbf{E}$ , находим, что  $\mathbf{E}^{\mathbf{s}}$  преобразуется как  $\mathbf{E}^{\mathbf{s}} \rightarrow \mathbf{E}^{\mathbf{s}} + \mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ . При этом, однако, произведение  $\mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$  не обязано быть равным нулю. Это дает возможность рассмотреть задачу, в которой мнимое изображение в сфере меняется независимо от реального изображения, получаемого при отсутствии сферы. Для решения такой задачи предлагается искать поправки к падающему полю в форме  $\mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ , где вектор  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$  неизвестен. При этом можно рассмотреть ситуацию, при которой разрешение в действительном изображении ограничено дифракционным пределом, а мнимое изображение может давать разрешение за дифракционным пределом. Именно такая ситуация наблюдалась в экспериментах [1].

Естественно, что нас интересуют поправки  $\mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ , соизмеримые с начальным полем  $\mathbf{E}$ , во всяком случае, не превышающие это поле на порядки величины. Для соблюдения условий сверхразрешения и соизмеримости  $\mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$  и  $\mathbf{E}$  естественно учесть наличие подложки на которой располагается сфера. Дело в том, что мод, входящих в суммы теории Ми, недостаточно для формирования предельно малого мнимого изображения [14]. Рассмотрим, например, ситуацию с идеально проводящей подложкой. В этом случае можно говорить о наличии поля, рассеянного сферой, и поля, рассеянного ее изображением в подложке. В результате рассеянное поле исходит от двух центров (рис. 1):

$$\mathbf{E}_1^{\mathbf{s}} = \mathbf{S}\mathbf{E}, \quad (11)$$

$$\mathbf{E}_2^{\mathbf{s}} = \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{E}. \quad (12)$$

На рисунке начало координат выбрано в центре реальной сферы. Величина  $\mathbf{R}$  — матрица отражения от подложки (в случае идеально проводящей подложки  $\mathbf{R}$  — диагональная матрица, элементы которой равны  $\pm 1$  в зависимости от номера отраженной моды) [15]. Строго говоря, при наличии подложки, под  $\mathbf{S}$  следует понимать матрицу рассеяния частицы на подложке [15]. Мы используем упрощенную модель, в которой матрица  $\mathbf{S}$  определяется теорией Ми. Поле  $\mathbf{E}_1^{\mathbf{s}}$  исходит из центра реальной сферы, а поле  $\mathbf{E}_2^{\mathbf{s}}$  — из центра ее отражения в подложке. Соответственно, поле изображения можно представить в виде разложения по двум центрам. С учетом преобразования (9) можно написать

$$\mathbf{E}_1^{\text{im}} = \mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{E} + \mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} + \mathbf{E}), \quad (13)$$

$$\mathbf{E}_2^{\text{im}} = \mathbf{A}(\mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{E} + \mathbf{R}\mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}). \quad (14)$$

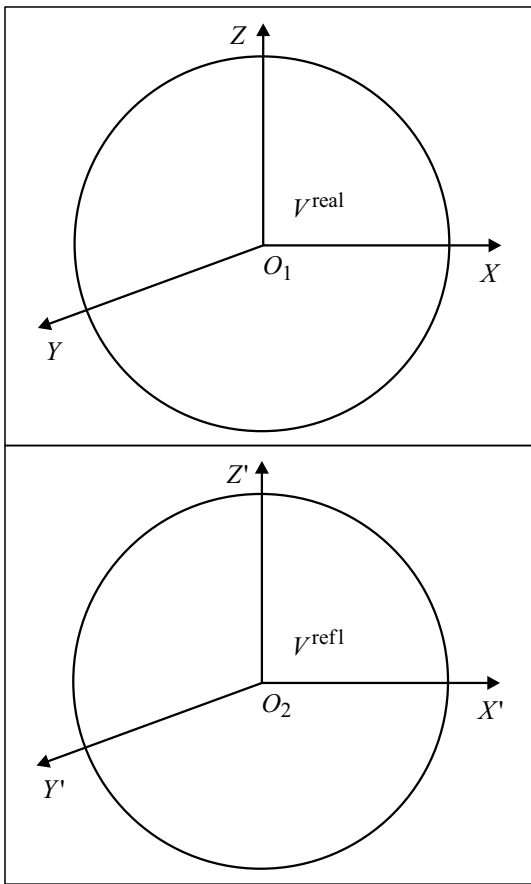
Здесь учтено, что  $\mathbf{A}\mathbf{Q} = 0$ . Формулы (13), (14) представляют собой систему уравнений для определения  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$ .

В разложении поля в теории Ми учитывается конечное число мод  $L$  [16]. При этом условия (13), (14) представляют собой систему линейных уравнений, в которых число неизвестных в два раза меньше числа уравнений. В действительности половину этих уравнений можно отбросить в силу их линейной зависимости.

Как отмечалось выше, столбцы матрицы  $\mathbf{A}$  являются ее собственными векторами. Учитывая явный вид элементов столбцов и условие (7), можно утверждать, что все четные столбцы выражаются через нечетные и наоборот. Аналогичное замечание справедливо и для строк (этим, по сути, обусловлено равенство  $\det \mathbf{A} = 0$ ). Отсюда следует, что в условиях (13) и (14) четные (или нечетные) строки можно вычеркнуть, так как они определяются нечетными (или четными) строками.

При отбрасывании половины строк в каждом из соотношений (13), (14) система преобразуется в квадратную: число уравнений сравнялось с числом неизвестных. Однако система все еще не имеет решения, так как в поправках  $\mathbf{Q}\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}$  матрица  $\mathbf{Q}$  вырождена аналогично  $\mathbf{A}$ . Из-за этого определитель получившейся системы равен нулю, и система не имеет решений. Если искать поправки в произвольном виде, то теряется инвариантность действительного изображения.

Чтобы прийти к однозначному решению, следует еще уменьшить размерность системы. Для этого в матрице  $\mathbf{Q}$  можно выделить лишь четные или нечетные столбцы. В результате мы вновь приходим к переопределенной системе, в которой число уравнений в два раза превосходит число неизвестных. Хотя дальнейшее сокращение числа уравнений за счет вычеркивания строк невозможно, анализ показывает, что проблема может быть преодолена за счет того, что от условия (13) можно попросту отказаться. Это возможно в силу нескольких причин. Во-первых, поле мнимого изображения, даваемое слагаемым  $\mathbf{A}(\mathbf{S}\mathbf{E} + \mathbf{E})$ , сосредоточено преимущественно ниже подложки в объеме отраженной сферы



**Рис. 1.** Схематичные изображения сферы на подложке и ее зеркального отражения. Вектор  $\mathbf{E}_1^s$  содержит коэффициенты разложения относительно центра реальной сферы  $O_1$ , а вектор  $\mathbf{E}_2^s$  относительно центра отраженной сферы  $O_2$ .

$V^{\text{refl}}$  (рис. 1). Поэтому соответствующий вектор можно преобразовать через отраженный базис без потери точности, используя лишь  $L$  мод. Это обстоятельство позволяет исключить вклад данного слагаемого в поле мнимого изображения. Как показывает расчет, моды  $Q$  дают на порядок больший вклад в поле изображения в значение слагаемого  $\mathbf{RSQE}^Q$ , чем в значение слагаемого  $\mathbf{SQE}^Q$ , которое приводит лишь к „малым“ искажениям поля изображения. Эти искажения преимущественно локализованы в объеме реальной сферы  $V^{\text{refl}}$  (рис. 1). Физически это означает что лучи, отраженные от сферы и подложки, дают на порядок больший вклад в изображение, чем лучи, прошедшие сквозь сферу.

Поле  $\mathbf{E}_2^{\text{im}}$  нельзя определить однозначно. Мы предлагаем описывать это поле в виде

$$\mathbf{E}_2^{\text{im}} = -1/2\mathbf{AT}_{12}\mathbf{A}(\mathbf{SE} + \mathbf{E}) + \mathbf{AE}^{\text{supres}}. \quad (15)$$

Здесь  $\mathbf{T}_{12}$  — матрица преобразования сферических мод первого рода от реальной к отраженной сфере. Первое слагаемое выбрано так, чтобы обнулить изображение, которое дает реальная сфера без учета малого вклада

мод  $\mathbf{E}^Q$ . Второе слагаемое в (15)  $\mathbf{AE}^{\text{supres}}$  описывает мнимое изображение, обеспечивающее суперразрешение.

Приведем пример. Рассмотрим три диполя, расположенные в вершинах правильного треугольника со стороной  $\lambda/8$ , в плоскости  $z = -R$ , где  $R$  — радиус сферы. Соответствующее поле  $\mathbf{E}$  можно интерпретировать как результат прохождения плоской волны через три малых отверстия в непрозрачном экране. Результат расчетов представлен на рис. 2.

Физическое объяснение явления суперразрешения на рис. 2 связано с дифракцией эванесцентных волн на сфере. В результате дифракции эванесцентные волны преобразуются в распространяющиеся. При отсутствии сферы апертура микроскопа никак не взаимодействует с эванесцентными компонентами. Тем самым сферическая частица передает информацию о ближнем поле, причем фактически основной вклад дает именно отражение от подложки.

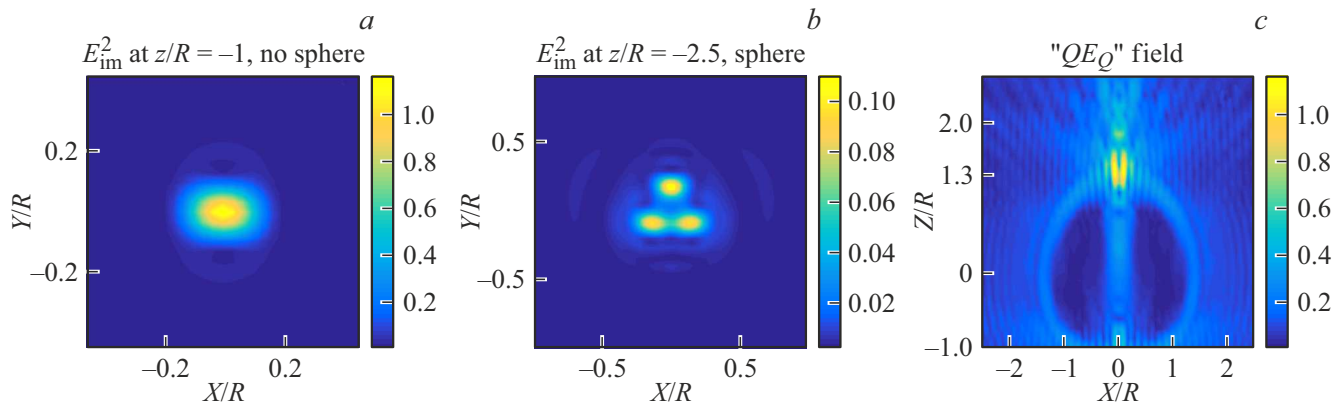
Мы осознаем, что предложенный подход еще не теория, а некоторые „наводящие соображения“. Во-первых, структура поля  $\mathbf{E}$  определяется уравнениями Максвелла, а не наличием сверхразрешения в мнимом изображении. Во-вторых, распределение возникшего дополнительного поля  $\mathbf{QE}^Q$  (рис. 2, c) локализовано не вблизи диполей, а имеет максимумы на значительном удалении от подложки. Интерпретация с дифракцией эванесцентных волн на сфере фактически опирается на выбор поля  $\mathbf{E}_2^{\text{im}}$  в формуле (15).

Конкретный вид поля  $\mathbf{QE}^Q$ , строго говоря, зависит от процедуры усечения уравнений (13), (14), а также от выбора полей  $\mathbf{E}_1^{\text{im}}$  и  $\mathbf{E}_2^{\text{im}}$ . Не ясно, можно ли сформулировать эти условия так, чтобы локализовать поле  $\mathbf{QE}^Q$  вблизи подложки?

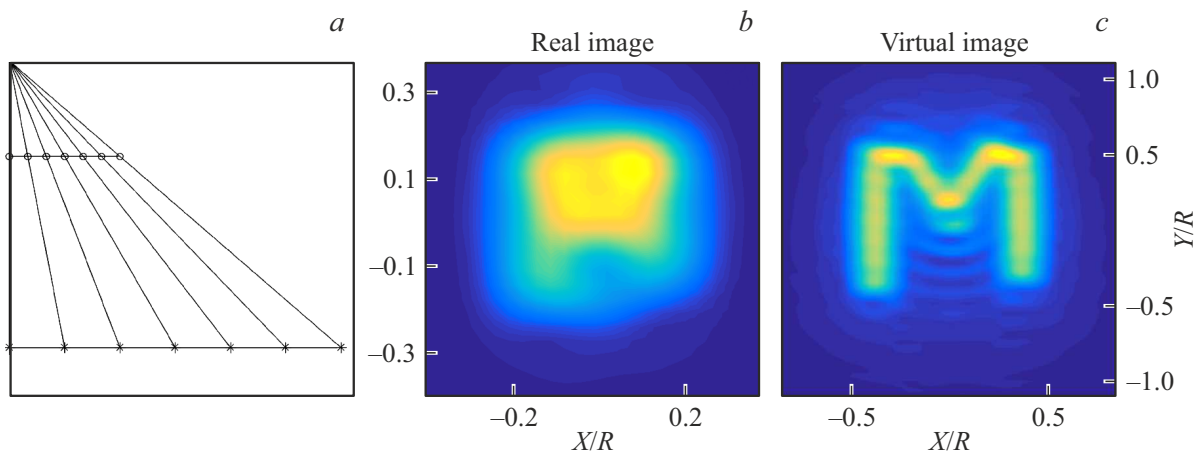
### Построение суперразрешающей матрицы рассеяния частицы

Для построения теории без изменения падающего поля следует найти матрицу рассеяния  $\mathbf{S}$ , обеспечивающую сверхразрешение в мнимом изображении. Вид этой матрицы зависит от того, каким образом рассматриваются соответствующие точечные источники. Разложения поля точечного источника в ближней и дальней зонах отличается [17]. Матрица рассеяния  $\mathbf{S}$  действует на разложение источников в ближней зоне, в предположении что источники находятся вне частицы. При построении матрицы рассеяния  $\mathbf{S}$  будем исходить из соотношений (13), (14). Пусть четные компоненты вектора  $\mathbf{E}_{1/2}^{\text{im}}$  содержат четные компоненты разности  $\mathbf{E}_1^{\text{im}} - \mathbf{AE}$ , а нечетные компоненты  $\mathbf{E}_{1/2}^{\text{im}}$  содержат нечетные компоненты  $\mathbf{E}_2^{\text{im}}$ . Можно также построить матрицу  $\mathbf{A}_R^{\text{im}}$ , четные строки которой равны четным строкам матрицы  $\mathbf{A}$ , а нечетные строки — нечетным строкам произведения  $\mathbf{AR}$ . Тогда соотношения (13), (14) можно записать в виде

$$\mathbf{E}_{1/2}^{\text{im}} = \mathbf{A}_R^{\text{im}}\mathbf{SE}. \quad (16)$$



**Рис. 2.** (a) Реальное изображение в плоскости нахождения источников без сферы; (b) мнимое изображение при наличии сферы; (c) модуль „дополнительного“ поля  $E^Q$ , которое можно интерпретировать как поле, существующее в отсутствие сферы. Последнее распределение имеет некоторый „хаотический“ характер, который никак не указывает на наличие источников в плоскости  $z = -R$ . В данном расчете сфера расположена на идеально проводящей подложке, параметры сферы  $2\pi R/\lambda = 24.5$ ,  $n = 1.46$ .



**Рис. 3.** (a) Схематичное изображение выбора положений источников (кружки) и их изображения в увеличенном виде (звездочки). (b) Изображение буквы „М“ размером порядка  $\lambda$  в свободном пространстве (неразлично в силу дифракционного предела). (c) То же при действии матрицы рассеяния. Для построения точечные источники размещались вдоль контуров буквы „М“ с  $x$ -поляризацей. Значение  $R$  то же, что на рис. 2.

Если из векторов  $\mathbf{E}$  образовать матрицу  $\mathbf{X}$ , а из векторов  $\mathbf{E}_{1/2}^{\text{im}}$  — матрицу  $\mathbf{Y}$ , то связывающее их уравнение можно записать в виде  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}_R^{\text{im}} \mathbf{S} \mathbf{X}$ . Отсюда легко найти решение для матрицы  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{S} = (\mathbf{A}_R^{\text{im}})^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1}. \quad (17)$$

При неверном выборе положения источников  $\mathbf{E}$  определитель матрицы  $\mathbf{X}$  может быть равным нулю. Поэтому необходимо следить за тем, чтобы вектор  $\mathbf{E}$  не являлся нулевым, а сами вектора  $\mathbf{E}$  были бы линейно независимы. Если искать матрицу  $\mathbf{S}$  в диагональном виде по азимутальным модам, то положения источников можно выбрать вдоль одной прямой. Предпочтительно, чтобы матрица  $\mathbf{X}$  и соответственно  $\mathbf{Y}$  содержала источники с различной поляризацией, в этом случае разрешение в мнимом изображении не зависит от поляризации.

Может показаться, что матрица  $\mathbf{S}$  будет давать суперразрешение только для источников вдоль этой прямой. Однако это не так, поскольку аналогичные источники вдоль других направлений линейно зависимы. Тем самым поворот положения источника на некоторый угол будет сопровождаться поворотом изображения на аналогичный угол. Более того, как показывают расчеты, матрица  $\mathbf{S}$  будет давать изображение, даже если размещать источники в промежутках между теми положениями, которые были выбраны для построения матрицы  $\mathbf{X}$  (рис. 3).

Изображение на рис. 3, c демонстрирует матрицу  $\mathbf{S}$ , обеспечивающую суперразрешение. В то же время элементы матрицы  $\mathbf{S}$  слишком велики, порядка  $10^{15}$ . Хотя нам пока не удалось найти матрицу рассеяния, элементы которой имели бы реалистичные значения, существование такой матрицы мы не исключаем.

В принципе, данная проблема частично решается с помощью уменьшения размерности матриц  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$  (т.е. выбора условий меньшей размерности искомой матрицы  $\mathbf{S}$ ). При этом сама матрица  $\mathbf{S}$  определяется из соотношений (13), (14) неоднозначным образом. Такой подход в принципе позволяет получить матрицу рассеяния  $\mathbf{S}$  с элементами порядка единицы, но лишь для первых азимутальных мод  $m = 1, 2, 3$ . Для более высоких мод не удастся избавиться от больших значений элементов матрицы  $\mathbf{S}$ . Для высоких  $m$  элементы матрицы  $\mathbf{Y}$  на несколько порядков превосходят элементы матрицы  $\mathbf{X}$ . Это связано с тем, что мнимое изображение локализовано на значительно большем удалении от начала координат по сравнению с положением источника. Возможно, что от больших элементов матрицы рассеяния можно избавиться путем выбора  $\mathbf{Y}$  так, чтобы изображение представляло локализованную яркую точку, но при этом столбцы матрицы  $\mathbf{Y}$  будут того же порядка, что столбцы матрицы  $\mathbf{X}$ .

### Заключение

Нам не известно ни одного наблюдения суперразрешения в мнимом изображении с помощью диэлектрических сфер в отсутствие подложки. В данной работе показано, что суперразрешение обусловлено подложкой не в меньшей степени, чем самой сферой. Мы рассмотрели две модели теории суперразрешения. Первая опирается на преобразование поля источников, при котором их действительное изображение не меняется из-за наличия сферы. Вторая основана на построении матрицы рассеяния, дающей суперразрешение в мнимом изображении. Хотя суперразрешение экспериментально исследовалось во многих работах [2], единой теории данного явления до сих пор не создано. Предлагаемые нами модели тоже не свободны от недостатков. В первой модели затруднительна интерпретация математических результатов и возможность их прямой экспериментальной проверки. Во второй — полученное решение также не имеет ясного физического смысла, но представляет возможную математическую интерпретацию явления. В любом случае нам представляется важным исследовать различные модели, приводящие к сверхразрешению, в плане тестирования новых идей.

### Благодарности

Автор благодарен профессорам Б.С. Лукьянчуку и А.А. Федяину за полезные обсуждения.

### Финансирование работы

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (грант № 14.W03.31.0008) в части постановки задачи,

Российским научным фондом (проект № 20-12-00389) в части проведения аналитических исследований, Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 20-02-00715) в части компьютерного моделирования и фондом „БАЗИС“ (№ 21-2-10-39-1) в части подготовки и публикации статьи.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Приложение

Для вычисления оператора  $\mathbf{A}$  мы использовали разложение плоской волны с произвольным направлением волнового вектора и поляризацией [12]. Возникающие интегралы удобно вычислять, предварительно преобразовав их к полярной системе координат в пространстве волновых векторов. При этом фактически приходится вычислять разложения (4) для каждой из мод  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{N}$ . Соответствующее разложение для  $\mathbf{M}$  имеет вид

$$\mathbf{E}_{\text{im}}(\mathbf{M}_{\nu\mu}) = \sum_{l,m} d_{lm}^{\nu\mu} \mathbf{N}_{lm}^{(1)*} + c_{lm}^{\nu\mu} \mathbf{M}_{lm}^{(1)*}. \quad (18)$$

Разложение для функций  $\mathbf{N}$  имеет вид аналогичный (18) и отличающийся лишь переменной коэффициентов  $c$  и  $d$  местами, что следует из соотношения  $\mathbf{N} = \text{rot}(\mathbf{M})/k$ . Вычисляя интегралы по „угловой“ переменной, приходим к следующему виду для коэффициентов:

$$\begin{aligned} d_{lm}^{\nu\mu} = & \frac{4\pi\gamma_{lm}(-i)^{l-\nu}\delta_{m\mu}}{2l(l+1)} \int_0^1 \left\{ -\text{sign}(m)P_\nu^{(|m|+1)} \right. \\ & \times [ |m|\sqrt{1-t^2}P_l^{|m|} + tP_l^{(|m|+1)} ] + \text{sign}(m)(\nu + |m|) \\ & \times (\nu - |m| + 1)P_\nu^{(|m|-1)} [ |m|\sqrt{1-t^2}P_l^{|m|} + (l + |m|) \\ & \times (l - |m| + 1)tP_l^{(|m|-1)} ] - mP_\nu^{(|m|)} [ P_l^{|m|+1} - (l + |m|) \\ & \left. \times (l - |m| + 1)P_l^{(|m|-1)} ] \sqrt{1-t^2} \right\} dt, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} c_{lm}^{\nu\mu} = & \frac{4\pi\gamma_{lm}(-i)^{l-\nu}\delta_{m\mu}}{l(l+1)} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} P_\nu^{|m|+1} P_l^{|m|+1} \right. \\ & + \frac{1}{2} (\nu + |m|)(\nu - |m| + 1)(l + |m|)(l - |m| + 1) \\ & \left. \times P_\nu^{|m|-1} P_l^{|m|-1} + m^2 P_\nu^{(|m|)} P_l^{|m|} \right\} dt, \end{aligned} \quad (20)$$

здесь и далее во всех случаях аргументом полиномов Лежандра является  $t$ , т.е.  $P_l^{|m|} = P_l^{|m|}(t)$ . Формулы (19)

и (20) справедливы при  $\mu \neq 0$ . В случае  $\mu \equiv 0$  соответствующие формулы принимают вид

$$d_{lm}^{v\mu} \equiv 0, \tag{21}$$

$$c_{lm}^{v\mu} = \frac{4\pi\gamma_{lm}(-i)^{l-v}\delta_{m\mu}}{l(l+1)} \int_0^1 P_v^1 P_l^1 dt. \tag{22}$$

Здесь коэффициент  $\gamma_{lm}$  определяется формулой

$$\gamma_{lm} = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}. \tag{23}$$

Сложность вычисления интегралов, входящих в (19), (20) главным образом связана с тем, что интегрирование в них производится от 0 до 1, в то время как полиномы Лежандра ортогональны на интервале от -1 до 1. В конечном счете вычисления сводятся к вычислению интегралов вида

$$I_{lv}^m \int_0^1 P_v^{|m|} P_l^{|m|} dt. \tag{24}$$

Интеграл (24) можно вычислять различными способами. В случае  $(-1)^{l+v} = 1$  вычисление производится элементарно сведением к интегралу в пределах от -1 до 1:

$$\begin{aligned} I_{lv}^m &= \int_0^1 P_v^{|m|} P_l^{|m|} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_v^{|m|} P_l^{|m|} dt \\ &= \frac{\delta_{lv}}{(2l+1)} \frac{(1+|m|)!}{(1-|m|)!}, \quad \text{при } (-1)^{l+v} = 1. \end{aligned} \tag{25}$$

В случае  $(-1)^{l+v+1} = 1$  следует использовать интегрирование по частям, при этом для (24) окончательно получаем

$$\begin{aligned} I_{lv}^m &= \frac{(-1)^{\nu+(l+\nu-1)/2}}{2^l l! 2^\nu \nu!} \\ &\times \sum_{n=1}^{\nu+m+1} \frac{l!(l+m-n)!}{((l+m-n)/2)!((l-m+n)/2)!} \\ &\times \sum_{k=0}^{\nu} C_\nu^k C_{z-1}^{2k-\nu-m} C_m^{(n-1-2k+\nu+m)/2} (2k)! \\ &\times (n-1-2k+\nu+m)!, \quad \text{при } (-1)^{l+\nu+1} = 1. \end{aligned} \tag{26}$$

Слагаемые, содержащие отрицательные или полуцелые значения факториала, следует полагать нулю, а в качестве  $m$  следует брать модуль, т.е.  $m \geq 0$ . Кроме того, будем считать что  $l > \nu$ , в противном случае в выражении (26) следует поменять индексы местами.

В результате для коэффициентов (19) и (20) при  $\mu \neq 0$  получаем

$$\begin{aligned} d_{lm}^{v\mu} &= \frac{4\pi\gamma_{lm}(-i)^{l-v}\delta_{m\mu}}{2l(l+1)} \left\{ -\text{sign}(m)[(l-|m|)I_{l+1\nu}^{m+1} \right. \\ &+ (l+|m|+1)I_{l-1\nu}^{m+1}]/(2l+1) + \text{sign}(m)(\nu+|m|) \\ &\times (\nu-|m|+1)(l+|m|)(l-|m|+1)[(l-|m|+2) \\ &\times I_{l+1\nu}^{|m|-1} + (l+|m|-1)I_{l-1\nu}^{|m|-1}]/(2l+1) + \frac{2m}{2\nu+1} \\ &\times [\nu(\nu-|m|+1)I_{l\nu+1}^m - (\nu+|m|)(\nu+1)I_{l\nu-1}^m] \\ &\left. - \frac{2m}{2l+1} [(l+|m|)(l+1)I_{l-1\nu}^m - l(l-|m|+1)I_{l+1\nu}^m] \right\}, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} c_{lm}^{v\mu} &= \frac{4\pi\gamma_{lm}(-i)^{l-v}\delta_{m\mu}}{l(l+1)} \left\{ \frac{1}{2} I_{l\nu}^{m+1} + \frac{1}{2} (\nu+|m|) \right. \\ &\times (\nu-|m|+1)(l+|m|)(l-|m|+1)I_{l\nu}^{m-1} + m^2 I_{l\nu}^m \left. \right\}, \end{aligned} \tag{28}$$

(В данном выражении мы преобразовали коэффициент  $d_{lm}^{v\mu}$ ). Аналогично для случая  $\mu = 0$  получаем

$$d_{lm}^{v\mu} \equiv 0, \tag{29}$$

$$c_{lm}^{v\mu} = \frac{4\pi\gamma_{lm}(-i)^{l-v}\delta_{m\mu}}{l(l+1)} I_{l\nu}^1. \tag{30}$$

При  $(-1)^{l+\nu+1} = 1$  несложно показать что  $d_{lm}^{v\mu} \equiv 0$  для всех  $\mu$ , т.е.

$$d_{lm}^{v\mu} \equiv 0, \quad (-1)^{l+\nu+1} = 1. \tag{31}$$

Используя выражение для коэффициентов  $c$  и  $d$ , матрицу  $\mathbf{A}$  в выражении (5) можно окончательно представить в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_{lm}^{v\mu} & d_{lm}^{v\mu} \\ d_{lm}^{v\mu} & c_{lm}^{v\mu} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

### Список литературы

- [1] Z. Wang, W. Guo, L. Li, B. Luk'yanchuk, A. Khan, Z. Liu, M. Hong. Nature communications, **2** (1), 1 (2011). DOI: 10.1038/ncomms1211
- [2] L. Chen, Y. Zhou, Y. Li, M. Hong. Appl. Phys. Rev., **6** (2), 021304 (2019). DOI: 10.1063/1.5082215
- [3] N.I. Zheludev, G. Yuan. Nat. Rev. Phys., **4**, 16 (2022). DOI: 10.1038/s42254-021-00382-7
- [4] C. Simovski, R. Heydarian. AIP Conf. Proc. **2300**, 020117 (2020). DOI: 10.1063/5.0031707
- [5] R. Heydarian, C. Simovski. Photonics and Nanostructures — Fundamentals and Applications, **46**, 100950 (2021). DOI: 10.1016/j.photonics.2021.100950

- [6] Y. Duan, G. Barbastathis, B. Zhang. *Opt. Lett.*, **38** (16), 2988 (2013). DOI: 10.1364/OL.38.002988
- [7] A.R. Bekirov, B.S. Luk'yanchuk, Z. Wang, A.A. Fedyanin. *Opt. Mater. Express*, **11** (11), 3646 (2021). DOI: 10.1364/OME.437467
- [8] A.R. Bekirov, B.S. Luk'yanchuk, A.A. Fedyanin. *JETP Lett.*, **112** (6), 341 (2020). DOI: 10.1134/S0021364020180058
- [9] B.S. Luk'yanchuk, R. Paniagua-Domínguez, I. Minin, O. Minin, Z. Wang. *Opt. Mater. Express*, **7** (6), 1820 (2017). DOI: 10.1364/OME.7.001820
- [10] A.V. Maslov, V.N. Astratov. *Phys. Rev. Appl.*, **11** (6), 064004 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevApplied.11.064004
- [11] C.F. Bohren, D.R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles* (John Wiley & Sons, 2008).
- [12] X. Ma, E. Li. *Chin. Opt. Lett.*, **8** (12), 1195 (2010). DOI: 10.3788/COL20100812.1195.
- [13] L. Tsang, J.A. Kong, K.H. Ding. *Scattering of electromagnetic waves: theories and applications* (John Wiley & Sons, 2004).
- [14] B.S. Luk'yanchuk, A.R. Bekirov, Z.B. Wang, I.V. Minin, O.V. Minin, A.A. Fedyanin. *Physics of Wave Phenomena*, **30** (5), 283 (2022).
- [15] P.A. Bobbert, J. Vlieger. Light scattering by a sphere on a substrate. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **137** (1–2), 209–242 (1986). DOI: 10.1016/0378-4371(86)90072-5
- [16] P.W. Barber, S.C. Hill. *Light scattering by particles: computational methods*. V. 2. (World Scientific, 1990).
- [17] Mason, V. Bradford. *The Electromagnetic Radiation from Simple Sources in the Presence of a Homogenous Dielectric Sphere*. (University of Michigan, Radiation Laboratory, 1972).