

01

Релятивистские расчеты энергий низко возбужденных состояний $1sns$, $1snp$, $1snd$ и вероятностей однофотонных переходов $1snl \rightarrow 1sn'l'$ в гелиеподобном ионе урана

© Н.К. Дулаев^{1,2}, М.Ю. Кайгородов¹, А.В. Малышев¹, И.И. Тупицын¹, В.М. Шабаев^{1,2}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия

² Национальный исследовательский центр „Курчатовский Институт“, Петербургский институт ядерной физики
188300 Гатчина, Ленинградская обл., Россия

e-mail: st069071@student.spbu.ru

Поступила в редакцию 15.01.2023 г.

В окончательной редакции 15.01.2023 г.

Принята к публикации 30.01.2023 г.

Для гелиеподобного иона урана проведены расчеты энергий однократно возбужденных состояний $1sns$, $1snp$ и $1snd$ с $n \leq 4$, а также вероятностей однофотонных переходов $1s3d \rightarrow 1s2p$, $1s3p \rightarrow 1s2s$, $1s3p \rightarrow 1s2p$, $1s4d \rightarrow 1s2p$. Расчеты выполнены в брейтовском приближении методом конфигурационного взаимодействия в базисе орбиталей Дирака-Фока-Штурма. Квантово-электродинамические поправки к уровням энергии вычислены посредством использования модельного оператора лэмбовского сдвига. Дополнительно учтены поправки на эффект отдачи ядра, на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, а также на поляризацию и деформацию ядра.

Ключевые слова: релятивистские эффекты, корреляционные эффекты, квантово-электродинамические поправки, многозарядные ионы, энергии переходов, вероятности переходов.

DOI: 10.21883/OS.2023.03.55379.4569-22

1. Введение

Исследование многозарядных ионов является важным направлением в современной физике [1–6]. Сравнение измеренных в прецизионных экспериментах различных характеристик многозарядных ионов с результатами теоретических расчетов позволяет проверять методы квантовой электродинамики (КЭД) в области сильных полей, уточнять значения фундаментальных констант и параметры ядерной структуры. Особый интерес представляет изучение многозарядных ионов с двумя электронами — гелиеподобных ионов, поскольку они являются простейшими атомными системами, в которых проявляются эффекты межэлектронного взаимодействия.

Экспериментальная точность определения энергий переходов в многозарядных ионах была значительно повышена за последние десятилетия. Например, погрешность измерения лэмбовского сдвига в водородоподобном уране U^{91+} составляет 2% [7,8]. Еще более высокая точность была достигнута в экспериментах с литиеподобными ионами [9–12]. Высокоточные измерения энергий переходов в гелиеподобных ионах были проведены в целом ряде работ [13–22]. Для анализа экспериментальных результатов необходим теоретический расчет энергий переходов, а также вероятностей переходов. Наиболее точные расчеты энергий переходов в гелиеподобных ионах были выполнены в работах [23–26]. Вероятности переходов в двухэлектронных системах вычислялись в работах [27–30].

Одним из актуальных экспериментов по изучению электронной структуры многозарядных ионов является эксперимент на накопительном кольце CRYRING@ESR, расположенном в институте GSI, Дармштадт [31,32]. В рамках этого эксперимента для гелиеподобного урана U^{90+} планируются исследования рентгеновского спектра, обусловленного переходами в основное состояние из состояний с однократными возбуждениями в оболочках L , M и N . Характерные энергии указанных переходов составляют десятки keV. В эксперименте, помимо энергий переходов, запланировано измерение заселенностей возбужденных состояний гелиеподобного урана. Для идентификации уровней, а также для обработки экспериментальных данных необходим теоретический расчет параметров электронной структуры однократно возбужденных состояний U^{90+} .

Данная работа направлена на теоретическое исследование электронной структуры гелиеподобного урана. В работе выполнены расчеты энергий состояний $1sns$, $1snp$, $1snd$ с $n \leq 4$ в рамках брейтовского приближения методом конфигурационного взаимодействия. Для энергий исследуемых состояний вычислены КЭД-поправки в рамках подхода модельного КЭД-оператора, поправки на эффект отдачи ядра, на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, а также на поляризацию и деформацию ядра. Кроме того, произведен расчет вероятностей однофотонных переходов $1s3d \rightarrow 1s2p$, $1s3p \rightarrow 1s2s$, $1s3p \rightarrow 1s2p$, $1s4d \rightarrow 1s2p$.

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе дано описание теоретических методов, используемых для расчетов. В третьем разделе приводятся и обсуждаются результаты настоящих вычислений, а также выполнено сравнение с данными, опубликованными в литературе.

В работе используется атомная система единиц.

2. Теоретические методы

Расчет энергий, а также вероятностей переходов в гелиеподобном уране выполнен в брейтовском приближении с помощью метода конфигурационного взаимодействия в базисе орбиталей Дирака-Фока-Штурма (КВ-ДФШ) [33–35]. Для описания N -электронной системы (в нашем случае $N = 2$) в брейтовском приближении используется гамильтониан Дирака-Кулона-Брейта (ДКБ):

$$\hat{H}^{\text{DCB}} = \Lambda^{(+)} [\hat{H}_{\text{D}} + \hat{V}_{\text{C}} + \hat{V}_{\text{B}}] \Lambda^{(+)} \quad (1)$$

Здесь \hat{H}_{D} — сумма одноэлектронных дираковских гамильтонианов:

$$\hat{H}_{\text{D}} = \sum_i^N \hat{h}_i^{\text{D}}, \quad (2)$$

$$\hat{h}_i^{\text{D}} = c(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{p}_i) + mc^2(\beta - 1) + V_{\text{nucl}}(r_i), \quad (3)$$

где \mathbf{p} — оператор импульса, $\boldsymbol{\alpha}$ и β — матрицы Дирака, V_{nucl} — потенциал, создаваемый ядром. В данной работе использована фермиевская модель распределения заряда по ядру, значение среднеквадратичного радиуса ядра урана взято из работы [36]. Оператор \hat{V}_{C} является суммой операторов двухэлектронного кулоновского взаимодействия:

$$\hat{V}_{\text{C}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, \quad (4)$$

а оператор \hat{V}_{B} — суммой операторов брейтовского взаимодействия:

$$\hat{V}_{\text{B}} = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{2r_{ij}} \left[\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{\alpha}_j + \frac{(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\boldsymbol{\alpha}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2} \right]. \quad (5)$$

Проектор $\Lambda^{(+)}$ в гамильтониане (1) является прямым произведением одноэлектронных проекторов на положительный спектр оператора Дирака-Фока (ДФ).

В методе КВ-ДФШ волновая функция $\Psi(JM_J)$ с определенным значением полного момента J и его проекции M_J представляется в виде линейной комбинации конфигурационных функций (configuration state functions, CSF) $\Phi_{\alpha}(JM_J)$

$$\Psi(JM_J) = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(JM_J) \Phi_{\alpha}(JM_J). \quad (6)$$

Функции CSF являются собственными функциями оператора \hat{J}^2 и строятся в виде линейных комбинаций детерминантов Слэтера. Коэффициенты смешивания $C_{\alpha}(JM_J)$

вычисляются в ходе решения матричной задачи на собственные значения:

$$H^{\text{DCB}} C(JM_J) = E^{\text{DCB}}(J) C(JM_J), \quad (7)$$

где H^{DCB} — матрица гамильтониана \hat{H}^{DCB} в базисе CSF, а $C(JM_J)$ — вектор-столбец коэффициентов смешивания.

Базис одноэлектронных функций строится следующим образом. Для занятых состояний nl и для низко лежащих виртуальных состояний $n'l'$, где $n' \leq n$ и $l' \leq l$, строятся орбитали, полученные в ходе численного решения уравнений ДФ. Все прочие виртуальные орбитали соответствуют решениям уравнения ДФ в конечном базисе штурмовских функций. Штурмовские функции являются численными решениями уравнения Дирака-Фока-Штурма

$$(\hat{h}^{\text{DF}} - \varepsilon_0)\phi_j = \lambda_j W(r)\phi_j, \quad (8)$$

где \hat{h}^{DF} — оператор ДФ, ε_0 — ссылочная энергия, в качестве которой выбирается энергия ДФ орбиталей ns , np или nd , $W(r)$ — весовая функция вида

$$W(r) = \left[\frac{1 - e^{-(ar)^2}}{(ar)^2} \right]^n. \quad (9)$$

Параметры a и n подбираются определенным образом с целью достижения наиболее быстрой сходимости энергии $E(J)$ по числу виртуальных орбиталей.

Для учета КЭД-поправок применяется метод модельного КЭД-оператора [37–39]. Модельный КЭД-оператор \hat{V}^{Q} построен таким образом, чтобы воспроизводить точные значения диагональных и недиагональных матричных элементов от однопетлевых КЭД-вкладов для низко лежащих уровней водородоподобных ионов. Практическое применение модельного КЭД-оператора состоит в добавлении оператора \hat{V}^{Q} к гамильтониану \hat{H}^{DCB} :

$$\hat{H}^{\text{DCBQ}} = \Lambda_{\text{Q}}^{(+)} [\hat{H}^{\text{D}} + \hat{V}^{\text{C}} + \hat{V}^{\text{B}} + \hat{V}^{\text{Q}}] \Lambda_{\text{Q}}^{(+)}, \quad (10)$$

и последующем поиске нижних собственных чисел матрицы H^{DCBQ} :

$$H^{\text{DCBQ}} C(JM) = E^{\text{DCBQ}}(J) C(JM). \quad (11)$$

Следует отметить, что оператор V^{Q} включается в гамильтониан \hat{h}^{DF} на этапе построения базиса, поэтому проекторы $\Lambda_{\text{Q}}^{(+)}$ в уравнении (10) отличаются от проекторов $\Lambda^{(+)}$ в уравнении (1). КЭД-поправка к энергии уровня J определяется как разность полных энергий:

$$\Delta E^{\text{QED}}(J) = E^{\text{DCBQ}}(J) - E^{\text{DCB}}(J). \quad (12)$$

Изложенная процедура позволяет в многоконфигурационном расчете частично учесть экранированные КЭД-поправки.

Эффект отдачи ядра, обусловленный конечной массой ядра, приводит к сдвигу уровней энергии иона. В низшем релятивистском приближении и в первом порядке по отношению массы электрона к массе ядра гамильтониан отдачи ядра можно записать как [40–43]

$$\hat{H}^{MS} = \frac{1}{2M} \sum_{i,j} \left[\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j - \frac{\alpha Z}{r_i} \left(\boldsymbol{\alpha}_i + \frac{(\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i}{r_i^2} \right) \cdot \mathbf{p}_j \right]. \quad (13)$$

КЭД-поправки к эффекту отдачи ядра вычислялись ранее [40,41, 44–48]. В настоящей работе поправка на эффект отдачи ядра к энергии уровня, ΔE^{MS} , определяется как сумма среднего значения оператора \hat{H}^{MS} на скоррелированной многоэлектронной функции $\Psi(JM_J)$ и соответствующих одноэлектронных КЭД-поправок.

Поправка на частотную зависимость брейтовского взаимодействия к энергии уровня, ΔE^{FB} , рассчитывается следующим образом. Рассмотрим оператор однофотонного обмена

$$I(\omega) = \alpha_1^\mu \alpha_2^\nu D_{\mu\nu}(\omega, \mathbf{r}_{12}), \quad (14)$$

где $D_{\mu\nu}$ — фотонный пропагатор в кулоновской калибровке:

$$D_{00}(\omega, \mathbf{r}_{12}) = \frac{1}{r_{12}}, \quad D_{i0} = D_{0i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$D_{il}(\omega, \mathbf{r}_{12}) = 4\pi \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_{12})}{\omega^2 - \mathbf{k}^2 + i0} \left(\delta_{il} - \frac{k_i k_l}{\mathbf{k}^2} \right),$$

$$i, l = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Переходя к пределу $\omega \rightarrow 0$ в выражении (15), можно получить стандартную форму брейтовского взаимодействия (5). Поправка ΔE^{FB} вычисляется как среднее значение симметризованного оператора однофотонного обмена [49–53] на волновой функции, полученной методом КВ-ДФШ.

Поправки на поляризацию и деформацию ядра к энергии уровней гелиеподобного урана, ΔE^{PD} , учитывались согласно работам [25,54–57].

Рассмотрим вероятность перехода многоэлектронной системы из состояния β в состояние α . Вероятность спонтанного излучения фотона с частотой ω и мультипольностью λL ($\lambda = E$ для переходов электрического типа и $\lambda = M$ для переходов магнитного типа) при переходе иона из состояния β с моментом J_β в состояние α с моментом J_α дается выражением [58]

$$A_L^{(\lambda)}(\beta, \alpha) = 2\alpha\omega \frac{2L+1}{2J_\beta+1} \left| \langle \alpha || T_L^{(\lambda)} || \beta \rangle \right|^2, \quad (16)$$

где $\langle \alpha || T_L^{(\lambda)} || \beta \rangle$ — приведенный матричный элемент оператора мультипольного перехода $T_L^{(\lambda)}$. Для вычисления вероятностей переходов в качестве волновых функций состояний α и β брались соответствующие многоэлектронные функции Ψ_α и Ψ_β , полученные методом КВ-ДФШ. При расчете многоэлектронных функций

использовался гамильтониан ДКБ с добавленным к нему модельным КЭД-оператором (10). Рассчитанная таким образом вероятность перехода частично учитывает КЭД-поправки.

3. Результаты вычислений

Для гелиеподобного урана были проведены систематические расчеты энергий состояний $1sns$, $1snp$, $1snd$ с $n \leq 4$. При построении многоэлектронного базиса в методе КВ-ДФШ рассматривались всевозможные однократные и двукратные возбуждения из сылочной конфигурации, соответствующей занятому состоянию, в пространство, натянутое на заданное число виртуальных орбиталей. Для расчета полной энергии E^{DCB} в качестве одноэлектронного базисного набора использовались орбитали с $n \leq 17$ для каждого орбитального квантового числа $l \leq 11$, всего 138 одноэлектронных функций. Для каждого исследуемого состояния погрешность, связанная с неполнотой одноэлектронного базиса, определялась из анализа сходимости полной энергии E^{DCB} по числу одноэлектронных функций. Установлено, что погрешность вычисления E^{DCB} из-за конечного размера базиса не превышает величины порядка 0.1 eV для всех рассмотренных состояний.

Далее к энергиям E^{DCB} были рассчитаны различные поправки. КЭД-поправки учитывались в рамках подхода модельного КЭД-оператора согласно уравнениям (10)–(12). При расчете КЭД-поправки использовался существенно меньший базис одноэлектронных функций, поскольку поправка ΔE^{QED} сходится по числу одноэлектронных функций быстрее, чем полная энергия E^{DCB} . При расчете КЭД-поправок использовались орбитали с $n \leq 13$ для каждого орбитального квантового числа $l \leq 4$, всего 55 функций. Погрешность расчета КЭД-поправки, связанная с неполнотой базиса, для всех рассмотренных состояний составляет примерно 0.01 eV. Также были рассчитаны поправки на массовый сдвиг, ΔE^{MS} , и на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, ΔE^{FB} . Эти поправки вычислены с использованием ещё меньшего числа виртуальных орбиталей, однако при этом численная точность расчета этих поправок на несколько порядков превосходит точность расчета энергии E^{DCB} .

В табл. 1 для основного состояния гелиеподобного урана представлены значения энергии, полученные в рамках гамильтониана ДКБ, E^{DCB} , поправки на КЭД эффекты, ΔE^{QED} , поправки на эффект отдачи ядра, ΔE^{MS} , поправки на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, ΔE^{FB} , поправки на поляризацию и деформацию ядра, ΔE^{PD} , а также значение полной энергии основного состояния с учетом всех поправок, E^{tot} . Полученные результаты сравниваются с данными из работы [25]. В работе [25] был выполнен строгий расчет одноэлектронных (собственная энергия и вакуумная поляризация) и экранированных КЭД-поправок, вклада

Таблица 1. Энергия основного состояния гелиеподобного иона урана, рассчитанная с использованием гамильтониана Дирака-Кулона-Брейта, E^{DCB} , и различные поправки к этой величине: ΔE^{FB} — поправка на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, ΔE^{QED} — КЭД-поправка, рассчитанная при помощи подхода модельного КЭД-оператора, ΔE^{MS} — поправка на эффект отдачи ядра, ΔE^{PD} — поправки на поляризацию и деформацию ядра. E_{1s1s}^{tot} — сумма всех вкладов. Суммарное значение энергии сравнивается с полным результатом работы [25]. Все значения приведены в eV

Величина	Значение
E^{DCB}	-261910.84
ΔE^{FB}	-0.02
ΔE^{QED}	527.00
ΔE^{MS}	0.92
ΔE^{PD}	-0.62
E_{1s1s}^{tot}	-261383.56
E_{1s1s}^{tot} [25]	-261386.15

двухфотонного обмена, а также вкладов высших порядков по межэлектронному взаимодействию в рамках брейтовского приближения. Кроме того, были учтены вклады одноэлектронных двухпетлевых диаграмм. Расчет эффекта отдачи ядра как в [25], так и в настоящей работе выполнен с учетом КЭД вклада.

Полученная в настоящей работе энергия ДКБ сравнивается с энергией ДКБ из работы [25], рассчитанной с использованием проекторов $\Lambda^{(+)}$ в уравнении (1), соответствующих уравнению Дирака (3). Значение КЭД-поправки, полученное в настоящей работе, сравнивается с рассчитанной в работе [25] суммой вкладов одноэлектронных и экранированных КЭД-поправок в локальном потенциале Дирака-Фока (local Dirac-Fock, LDF). Поправка на частотную зависимость брейтовского взаимодействия сравнивается со значением соответствующего вклада от однофотонного обмена из работы [25]. Наше итоговое значение энергии сравнивается с полным значением из работы [25], которое в том числе включает и поправки на поляризацию и деформацию ядра.

Сравнение показывает, что результаты настоящего расчета для основного состояния гелиеподобного урана находятся в согласии с работой [25]. Действительно, ДКБ-энергия связи основного состояния гелиеподобного урана, вычисленная в настоящей работе, составляет -261910.84 eV, а в работе [25] эта величина равна -261910.73 eV, что находится в пределах оцененной численной погрешности 0.1 eV. Поправка ΔE^{FB} в работе [25] строго равна нулю, поскольку между электронами 1s однофотонный обмен происходит при нулевой частоте виртуального фотона, $\omega = 0$. Однако значение ΔE^{FB} в настоящей работе отлично от нуля, что обусловлено примешиванием состояний, имеющих другую энергию. Для основного состояния гелиеподобного урана КЭД-поправка, рассчитанная в настоящей работе методом модельного оператора, равняется 527.00 eV, что в пределах

0.5% согласуется с суммой вкладов одноэлектронных и экранированных КЭД поправок, 523.01 eV, полученных в работе [25]. Значение поправки ΔE^{MS} , равное 0.92 eV, находится в хорошем согласии с результатом 0.93 eV, полученным в работе [25]. В итоге отличие суммарного значения энергии основного состояния гелиеподобного урана E_{1s1s}^{tot} между настоящей работой и работой [25] составляет около 2.5 eV и главным образом обусловлено отсутствием точного учета в настоящей работе вклада диаграмм двухфотонного обмена, а также приближенным учетом экранированных КЭД-вкладов и частичным учетом вклада двухпетлевых диаграмм.

В табл. 2 для возбужденных состояний $(1s2s)_0$, $(1s2s)_1$, $(1s2p_{1/2})_0$, $(1s2p_{3/2})_2$, $(1s2p_{1/2})_1$, $(1s2p_{3/2})_1$ гелиеподобного урана приведены результаты расчета энергий, полученные в рамках гамильтониана ДКБ, E^{DCB} , поправок на КЭД-эффекты, ΔE^{QED} , поправок на эффект отдачи ядра, ΔE^{MS} , поправок на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, ΔE^{FB} , и поправок на поляризацию и деформацию ядра, ΔE^{PD} . Отдельно приведены полные энергии с учетом всех поправок, E^{tot} , а также энергии относительно основного состояния, $E^{\text{tot}} - E_{1s1s}^{\text{tot}}$. Последние величины сравниваются с полными данными из работы [25].

Таблица 2 показывает, что результаты настоящего расчета находятся в согласии с результатами работы [25]. Полученные нами энергии E^{DCB} согласуются с результатами работы [25] в пределах оцененной погрешности решения уравнения Дирака-Кулона-Брейта 0.1 eV. Для различных возбужденных состояний, так же как и для случая основного состояния, отличия во вкладах ΔE^{QED} между данной работой и работой [25] составляют порядка 0.5%. Для полных энергий E^{tot} различие результатов составляет не более 2.5 eV. Данное систематическое отклонение уменьшается при рассмотрении энергии перехода в основное состояние, отличие между результатами становится порядка 1 eV. Оно обусловлено такими же причинами, что и расхождение с энергией основного состояния: в настоящей работе КЭД-поправки учтены приближенным образом, а двухфотонный обмен за рамками брейтовского приближения исключен из рассмотрения.

В табл. 3 представлены результаты расчета энергий состояний $(1sns)_0$, $(1sns)_1$, $(1snp_{1/2})_0$, $(1snp_{1/2})_1$, $(1snp_{3/2})_1$, $(1snp_{3/2})_2$ для $n = 3, 4$. Для каждого состояния приведены значения отдельных вкладов, суммарной энергии связи, а также энергии относительно основного состояния. Значения энергий переходов в основное состояние сравниваются с результатами работы [26]. В этой работе межэлектронное взаимодействие учитывалось в брейтовском приближении методом конфигурационного взаимодействия. Также в работе [26] учтены поправки на частотную зависимость брейтовского взаимодействия и на эффект отдачи ядра. Учет однопетлевых КЭД-поправок в работе [26] основывается на используемом нами подходе модельного КЭД-оператора. Дополнительно в работе [26] учитывались

Таблица 2. Энергии состояний $1s2s$ и $1s2p$ гелиеподобного иона урана, рассчитанные с использованием гамильтониана Дирака-Кулона-Брейта, E^{DCB} , и различные поправки к этим величинам: ΔE^{FB} — поправка на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, ΔE^{QED} — КЭД-поправка, рассчитанная при помощи подхода модельного КЭД-оператора, ΔE^{MS} — поправка на эффект отдачи ядра, ΔE^{PD} — поправки на поляризацию и деформацию ядра. E^{tot} — сумма всех вкладов, $E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ — суммарная энергия относительно основного состояния. Полученные значения сравниваются с полными результатами из работы [25]. Все значения приведены в eV

Состояние	Величина	Значение	Состояние	Величина	Значение
$(1s2s)_0$	E^{DCB}	-165418.06	$(1s2p_{3/2})_2$	E^{DCB}	-161115.78
	ΔE^{FB}	0.67		ΔE^{FB}	-7.05
	ΔE^{QED}	314.79		ΔE^{QED}	275.05
	ΔE^{MS}	0.58		ΔE^{MS}	0.50
	ΔE^{PD}	-0.37		ΔE^{PD}	-0.31
	E^{tot}	-165102.39		E^{tot}	-160847.60
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$	96281.17		$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$	100535.96
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ [25]	96281.78(54)		$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ [25]	100536.95(54)
$(1s2s)_1$	E^{DCB}	-165673.15	$(1s2p_{1/2})_1$	E^{DCB}	-165488.45
	ΔE^{FB}	0.23		ΔE^{FB}	0.10
	ΔE^{QED}	315.89		ΔE^{QED}	272.92
	ΔE^{MS}	0.58		ΔE^{MS}	0.54
	ΔE^{PD}	-0.37		ΔE^{PD}	-0.32
	E^{tot}	-165356.82		E^{tot}	-165215.20
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$	96026.74		$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$	96168.36
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ [25]	96027.07(54)		$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ [25]	96169.43(54)
$(1s2p_{1/2})_0$	E^{DCB}	-165379.04	$(1s2p_{3/2})_1$	E^{DCB}	-161052.09
	ΔE^{FB}	0.32		ΔE^{FB}	2.96
	ΔE^{QED}	272.73		ΔE^{QED}	275.16
	ΔE^{MS}	0.53		ΔE^{MS}	0.54
	ΔE^{PD}	-0.32		ΔE^{PD}	-0.31
	E^{tot}	-165105.77		E^{tot}	-160773.74
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$	96277.79		$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$	100609.82
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ [25]	96279.01(54)		$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ [25]	100610.68(54)

Таблица 3. Энергии состояний $1sns$ и $1snp$ для $n = 3, 4$ в гелиеподобном ионе урана, рассчитанные с использованием гамильтониана Дирака-Кулона-Брейта, E^{DCB} , и различные поправки к этим величинам: ΔE^{FB} — поправка на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, ΔE^{QED} — КЭД-поправка, рассчитанная при помощи подхода модельного КЭД-оператора, ΔE^{MS} — поправка на эффект отдачи ядра, ΔE^{PD} — поправки на поляризацию и деформацию ядра. E^{tot} — сумма всех вкладов, $E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ — энергия относительно основного состояния. Полученные энергии относительно основного состояния сравниваются с результатами работы [26]. Все значения приведены в eV

n	Величина	$(1sns)_0$	$(1sns)_1$	$(1snp_{1/2})_0$	$(1snp_{3/2})_2$	$(1snp_{1/2})_1$	$(1snp_{3/2})_1$
$n = 3$	E^{DCB}	-146389.84	-146456.53	-146380.77	-145104.14	-146408.38	-145084.29
	ΔE^{FB}	0.24	0.08	0.55	-2.06	0.18	0.92
	ΔE^{QED}	281.11	281.34	269.13	269.52	269.08	269.54
	ΔE^{MS}	0.51	0.51	0.50	0.49	0.50	0.50
	ΔE^{PD}	-0.33	-0.33	-0.31	-0.31	-0.31	-0.31
	E^{tot}	-146108.30	-146174.94	-146110.90	-144836.51	-146138.93	-144813.64
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$	115275.26	115208.62	115272.66	116547.05	115244.63	116569.92
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ [26]	115276.70	115209.77	115273.83	116548.37	115245.92	116571.21
$n = 4$	E^{DCB}	-139923.01	-139949.50	-139919.59	-139387.14	-139930.42	-139378.70
	ΔE^{FB}	0.10	0.03	0.28	-0.86	0.09	0.39
	ΔE^{QED}	272.64	272.71	267.71	267.93	267.73	267.95
	ΔE^{MS}	0.49	0.49	0.48	0.48	0.48	0.48
	ΔE^{PD}	-0.31	-0.31	-0.31	-0.31	-0.31	-0.31
	E^{tot}	-139650.09	-139676.58	-139651.43	-139119.89	-139662.43	-139110.19
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$	121733.47	121706.98	121732.13	122263.67	121721.13	122273.37
	$E^{tot} - E_{1s1s}^{tot}$ [26]	121734.83	121708.20	121733.31	122264.98	121722.35	122274.65

Таблица 4. Энергии состояний $1snd$ с $n \leq 4$ гелиеподобного иона урана, рассчитанные с использованием гамильтониана Дирака-Кулона-Брейта, E^{DCB} , и различные поправки к этим величинам: ΔE^{FB} — поправка на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, ΔE^{QED} — КЭД-поправка, рассчитанная при помощи подхода модельного КЭД-оператора, ΔE^{MS} — поправка на эффект отдачи ядра, ΔE^{PD} — поправки на поляризацию и деформацию ядра. E^{tot} — сумма всех вкладов, $E^{\text{tot}} - E_{1s1s}^{\text{tot}}$ — энергия относительно основного состояния. Все значения приведены в eV

n	Величина	$(1snd_{3/2})_2$	$(1snd_{3/2})_1$	$(1snd_{5/2})_3$	$(1snd_{5/2})_2$
$n = 3$	E^{DCB}	-145092.76	-145084.47	-144759.69	-144754.50
	ΔE^{FB}	0.02	0.12	0.03	0.02
	ΔE^{QED}	266.48	266.49	267.20	267.21
	ΔE^{MS}	0.49	0.49	0.49	0.49
	ΔE^{PD}	-0.31	-0.31	-0.31	-0.31
	E^{tot}	-144826.07	-144817.69	-144492.28	-144487.08
	$E^{\text{tot}} - E_{1s1s}^{\text{tot}}$	116557.49	116565.87	116891.28	116896.48
$n = 4$	E^{DCB}	-139382.25	-139378.74	-139240.45	-139238.15
	ΔE^{FB}	0.01	0.07	0.02	0.00
	ΔE^{QED}	266.62	266.63	267.04	266.92
	ΔE^{MS}	0.48	0.48	0.48	0.48
	ΔE^{PD}	-0.31	-0.31	-0.31	-0.31
	E^{tot}	-139115.44	-139111.87	-138973.22	-138971.06
	$E^{\text{tot}} - E_{1s1s}^{\text{tot}}$	122268.12	122271.69	122410.34	122412.50

двухпетлевые КЭД-поправки. В работе [26] погрешность теоретического расчета энергий переходов оценивалась на уровне 1 eV. Из табл. 3 видно, что для рассмотренных переходов наши результаты находятся в разумном согласии с результатами работы [26]: отличие для энергий переходов составляет не более 2 eV.

Наконец, в табл. 4 приведены результаты расчета энергий состояний $(1snd_{3/2})_1$, $(1snd_{3/2})_2$, $(1snd_{5/2})_2$, $(1snd_{5/2})_3$ с $n = 3, 4$. Для каждого состояния представлены значения отдельных вкладов, суммарное значение энергии состояния, а также энергия состояния относительно основного состояния. Основываясь на сравнении полученных результатов для энергий переходов в основное состояние из состояний $1sns$, $1snp$ с $n = 1, 2$ и из состояний $1sns$, $1snp$ с $n = 3, 4$ с работами [25] и [26] соответственно, мы оцениваем погрешность полученных значений для соответствующих переходов из состояний $1snd$ с $n = 3, 4$ на уровне 2 eV. В эту погрешность включена как погрешность от КЭД-эффектов, выходящих за рамки подхода модельного КЭД-оператора, так и погрешность, происходящая от неопределенности среднеквадратичного радиуса ядра ^{238}U .

В табл. 5 представлены результаты расчета вероятностей однофотонных переходов $1s3d \rightarrow 1s2p$, $1s3p \rightarrow 1s2s$, $1s3p \rightarrow 1s2p$ и $1s4d \rightarrow 1s2p$ с наименьшей возможной мультипольностью. Энергии переходов получены из результатов, приведенных в табл. 1–4. При расчете вероятностей переходов использовались орбитали с $n \leq 14$ для $l = 0$, $n \leq 11$ для $l = 1$, $n \leq 9$ для $l = 3, 4$, всего 37 одноэлектронных функций. Наибольшую вероятность, которая составляет примерно $0.44 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$, имеют дипольные E1-переходы $(1s3d_{5/2})_3 \rightarrow (1s2p_{3/2})_2$ и $(1s3d_{3/2})_2 \rightarrow (1s2p_{1/2})_1$. Энер-

Таблица 5. Вероятности однофотонных переходов с наименьшей возможной мультипольностью λL , $A_L^{(\lambda)}(\beta, \alpha)$, (в s^{-1}), а также энергии переходов, $\Delta E_{\beta\alpha}$, (в eV), для гелиеподобного иона урана. Для краткости орбиталь $1s$ опущена в обозначения начального и конечного состояний

Переход $\beta \rightarrow \alpha$	λL	$\Delta E_{\beta\alpha}$	$A_L^{(\lambda)}(\beta, \alpha)$
$(3d_{3/2})_2 \rightarrow (2p_{3/2})_1$	E1	15947.7	$0.747 \cdot 10^{14}$
$(3d_{3/2})_2 \rightarrow (2p_{3/2})_2$	E1	16021.5	$0.645 \cdot 10^{15}$
$(3d_{3/2})_1 \rightarrow (2p_{3/2})_2$	E1	16029.9	$0.119 \cdot 10^{15}$
$(3d_{5/2})_3 \rightarrow (2p_{3/2})_1$	M2	16281.5	$0.149 \cdot 10^{12}$
$(3d_{5/2})_2 \rightarrow (2p_{3/2})_1$	E1	16286.7	$0.390 \cdot 10^{16}$
$(3d_{5/2})_3 \rightarrow (2p_{3/2})_2$	E1	16355.3	$0.436 \cdot 10^{16}$
$(3d_{5/2})_2 \rightarrow (2p_{3/2})_2$	E1	16360.5	$0.437 \cdot 10^{15}$
$(3d_{3/2})_1 \rightarrow (2p_{1/2})_0$	E1	20288.1	$0.294 \cdot 10^{16}$
$(3p_{3/2})_1 \rightarrow (2s_{1/2})_0$	E1	20288.8	$0.776 \cdot 10^{15}$
$(3p_{3/2})_1 \rightarrow (2p_{1/2})_0$	M1	20292.1	$0.224 \cdot 10^{12}$
$(3d_{3/2})_2 \rightarrow (2p_{1/2})_1$	E1	20389.1	$0.443 \cdot 10^{16}$
$(3d_{3/2})_1 \rightarrow (2p_{1/2})_1$	E1	20397.5	$0.148 \cdot 10^{16}$
$(3p_{3/2})_2 \rightarrow (2s_{1/2})_1$	E1	20520.3	$0.114 \cdot 10^{16}$
$(3p_{3/2})_1 \rightarrow (2s_{1/2})_1$	E1	20543.2	$0.373 \cdot 10^{15}$
$(3d_{5/2})_2 \rightarrow (2p_{1/2})_0$	M2	20618.7	$0.215 \cdot 10^{12}$
$(4d_{5/2})_2 \rightarrow (2p_{3/2})_1$	E1	21802.7	$0.127 \cdot 10^{16}$
$(4d_{5/2})_3 \rightarrow (2p_{3/2})_2$	E1	21874.4	$0.141 \cdot 10^{16}$

гии этих переходов равны 16360.5 и 20389.1 eV соответственно.

4. Заключение

В работе проведен расчет энергий состояний $1sns$, $1snp$, $1snd$ с $n \leq 4$ гелиеподобного урана методом

конфигурационного взаимодействия в базисе Дирака-Фока-Штурма. Также вычислены энергии и вероятности однофотонных переходов $1s3d \rightarrow 1s2p$, $1s3p \rightarrow 1s2s$, $1s3p \rightarrow 1s2p$ и $1s4d \rightarrow 1s2p$ с наименьшей возможной мультипольностью. КЭД-поправки к энергиям состояний были учтены при помощи подхода модельного КЭД-оператора. Дополнительно для энергий состояний и энергий переходов были рассчитаны поправки на эффект отдачи ядра, на частотную зависимость брейтовского взаимодействия, а также на поляризацию и деформацию ядра.

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 22-62-00004, <https://rscf.ru/project/22-62-00004/>.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] V.M. Shabaev, O.V. Andreev, A.N. Artemyev, S.S. Baturin, A.A. Elizarov, Y.S. Kozhedub, N.S. Oreshkina, I.I. Tupitsyn, V.A. Yerokhin, O.M. Zherebtsov. *Int. J. Mass Spectrometry*, **251** (2), 109 (2006).
- [2] A.V. Volotka, D.A. Glazov, G. Plunien, V.M. Shabaev. *Ann. Phys.*, **525** (8–9), 636 (2013).
- [3] M.G. Kozlov, M.S. Safronova, J.R.C. López-Urrutia, P.O. Schmidt. *Rev. Mod. Phys.*, **90** (4), 045005 (2018).
- [4] V.M. Shabaev, A.I. Bondarev, D.A. Glazov, M.Y. Kaygorodov, Y.S. Kozhedub, I.A. Maltsev, A.V. Malyshev, R.V. Popov, I.I. Tupitsyn, N.A. Zubova. *Hyperfine Interact.*, **239**, 60 (2018).
- [5] M.S. Safronova, D. Budker, D. DeMille, D.F.J. Kimball, A. Derevianko, C.W. Clark. *Rev. Mod. Phys.*, **90** (2), 025008 (2018).
- [6] P. Indelicato. *J. Phys. B*, **52** (23), 232001 (2019).
- [7] T. Stöhlker, P.H. Mokler, F. Bosch, R.W. Dunford, F. Franzke, O. Klepper, C. Kozhuharov, T. Ludziejewski, F. Nolden, H. Reich, P. Rymuza, Z. Stachura, M. Steck, P. Swiat, A. Warczak. *Phys. Rev. Lett.*, **85** (15), 3109 (2000).
- [8] A. Gumberidze, T. Stöhlker, D. Banaś, K. Beckert, P. Beller, H.F. Beyer, F. Bosch, S. Hagmann, C. Kozhuharov, D. Liesen, F. Nolden, X. Ma, P.H. Mokler, M. Steck, D. Sierpowski, S. Tashenov. *Phys. Rev. Lett.*, **94** (22), 223001 (2005).
- [9] J. Schweppe, A. Belkacem, L. Blumenfeld, N. Claytor, B. Feinberg, H. Gould, V.E. Kostroun, L. Levy, S. Misawa, J.R. Mowat, M.H. Prior. *Phys. Rev. Lett.*, **66** (11), 1434 (1991).
- [10] C. Brandau, C. Kozhuharov, A. Müller, W. Shi, S. Schippers, T. Bartsch, S. Böhm, C. Böhme, A. Hoffknecht, H. Knopp, N. Grün, W. Scheid, T. Steih, F. Bosch, B. Franzke, P.H. Mokler, F. Nolden, M. Steck, T. Stöhlker, Z. Stachura. *Phys. Rev. Lett.*, **91** (7), 073202 (2003).
- [11] P. Beiersdorfer, H. Chen, D.B. Thorn, E. Träbert. *Phys. Rev. Lett.*, **95** (23), 233003 (2005).
- [12] C. Brandau, C. Kozhuharov, Z. Harman, A. Müller, S. Schippers, Y.S. Kozhedub, D. Bernhardt, S. Böhm, J. Jacobi, E.W. Schmidt, P.H. Mokler, F. Bosch, H.J. Kluge, T. Stöhlker, K. Beckert, P. Beller, F. Nolden, M. Steck, A. Gumberidze, R. Reuschl, U. Spillmann, F.J. Currell, I.I. Tupitsyn, V.M. Shabaev, U.D. Jentschura, C.H. Keitel, A. Wolf, Z. Stachura. *Phys. Rev. Lett.*, **100** (7), 073201 (2008).
- [13] P. Beiersdorfer, M. Bitter, S. von Goeler, K.W. Hill. *Phys. Rev. A*, **40** (1), 150 (1989).
- [14] M. Trassinelli, S. Boucard, D.S. Covita, D. Gotta, A. Hirtil, P. Indelicato, É.-O. Le Bigot, J.M.F. dos Santos, L.M. Simons, L. Stingelin, J.F.C.A. Veloso, A. Wasser, J. Zmeskal. *J. of Physics: Conference Series*, **58**, 129 (2007).
- [15] M. Trassinelli, A. Kumar, H.F. Beyer, P. Indelicato, R. Martin, R. Reuschl, Y.S. Kozhedub, C. Brandau, H. Bräuning, S. Geyer, A. Gumberidze, S. Hess, P. Jagodzinski, C. Kozhuharov, D. Liesen, U. Spillmann, S. Trotsenko, G. Weber, D.F.A. Winters, T. Stöhlker. *Europhys. Lett.*, **87** (6), 63001 (2009).
- [16] M. Trassinelli, A. Kumar, H.F. Beyer, P. Indelicato, R. Martin, R. Reuschl, Y.S. Kozhedub, C. Brandau, H. Bräuning, S. Geyer, A. Gumberidze, S. Hess, P. Jagodzinski, C. Kozhuharov, D. Liesen, U. Spillmann, S. Trotsenko, G. Weber, D.F.A. Winters, T. Stöhlker. *Phys. Scr.*, **2011** (1144), 014003 (2011).
- [17] J.K. Rudolph, S. Bernitt, S.W. Epp, R. Steinbrügge, C. Beilmann, G.V. Brown, S. Eberle, A. Graf, Z. Harman, N. Hell, M. Leutenegger, A. Müller, K. Schlage, H.C. Wille, H. Yavaş, J. Ullrich, J.R. Crespo López-Urrutia. *Phys. Rev. Lett.*, **111** (10), 103002 (2013).
- [18] S. Schlessler, S. Boucard, D.S. Covita, J.M.F. dos Santos, H. Fuhrmann, D. Gotta, A. Gruber, M. Hennebach, A. Hirtil, P. Indelicato, É.-O. Le Bigot, L.M. Simons, L. Stingelin, M. Trassinelli, J.F.C.A. Veloso, A. Wasser, J. Zmeskal. *Phys. Rev. A*, **88** (2), 022503 (2013).
- [19] K. Kubiček, P.H. Mokler, V. Mäkel, J. Ullrich, J.R.C. López-Urrutia. *Phys. Rev. A*, **90** (3), 032508 (2014).
- [20] S.W. Epp, R. Steinbrügge, S. Bernitt, J.K. Rudolph, C. Beilmann, H. Bekker, A. Müller, O.O. Versolato, H.C. Wille, H. Yavaş, J. Ullrich, J.R. Crespo López-Urrutia. *Phys. Rev. A*, **92** (2), 020502 (2015).
- [21] P. Beiersdorfer, G.V. Brown. *Phys. Rev. A*, **91** (3), 032514 (2015).
- [22] J. Machado, C.I. Szabo, J.P. Santos, P. Amaro, M. Guerra, A. Gumberidze, G. Bian, J.M. Isac, P. Indelicato. *Phys. Rev. A*, **97** (3), 032517 (2018).
- [23] A.N. Artemyev, V.M. Shabaev, V.A. Yerokhin, G. Plunien, G. Soff. *Phys. Rev. A*, **71** (6), 062104 (2005).
- [24] A.V. Malyshev, Y.S. Kozhedub, D.A. Glazov, I.I. Tupitsyn, V.M. Shabaev. *Phys. Rev. A*, **99** (1), 010501 (2019).
- [25] Y.S. Kozhedub, A.V. Malyshev, D.A. Glazov, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn. *Phys. Rev. A*, **100** (6), 062506 (2019).
- [26] V.A. Yerokhin, A. Surzhykov. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **48** (3), 033104 (2019).
- [27] E. Lindroth, S. Salomonson. *Phys. Rev. A*, **41** (9), 4659 (1990).
- [28] P. Indelicato. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (16), 3323 (1996).
- [29] P. Indelicato, V.M. Shabaev, A.V. Volotka. *Phys. Rev. A*, **69** (6), 062506 (2004).
- [30] W.L. Wiese, J.R. Fuhr. *J. Phys. Chem. Ref. Data*, **38** (3), 565 (2009).

- [31] M. Lestinsky, V. Andrianov, B. Aurand, V. Bagnoud, D. Bernhardt, H. Beyer, S. Bishop, K. Blaum, A. Bleile, A. Borovik, F. Bosch, C.J. Bostock, C. Brandau, A. Bräuning-Demian, I. Bray, T. Davinson, B. Ebinger, A. Echler, P. Egelhof, A. Ehresmann, M. Engström, C. Enss, N. Ferreira, D. Fischer, A. Fleischmann, E. Förster, S. Fritzsche, R. Geithner, S. Geyer, J. Glorius, K. Gobel, O. Gorda, J. Goullon, P. Grabitz, R. Grisenti, A. Gumberidze, S. Hagmann, M. Heil, A. Heinz, F. Herfurth, R. Heß, P.M. Hillenbrand, R. Hubele, P. Indelicato, A. Källberg, O. Kester, O. Kiselev, A. Knie, C. Kozhuharov, S. Kraft-Bermuth, T. Kühl, G. Lane, Y. Litvinov, D. Liesen, X.W. Ma, R. Martin, R. Moshhammer, A. Muller, S. Namba, P. Neumeyer, T. Nilsson, W. Nörtershäuser, G. Paulus, N. Petridis, M. Reed, R. Reifarth, P. Reiß, J. Rothhardt, R. Sanchez, M.S. Sanjari, S. Schippers, H.T. Schmidt, D. Schneider, P. Scholz, R. Schuch, M. Schulz, V. Shabaev, A. Simonsson, J. Sjöholm, Ö. Skeppstedt, K. Sonnabend, U. Spillmann, K. Stiebing, M. Steck, T. Stöhlker, A. Surzhykov, S. Torilov, E. Träbert, M. Trassinelli, S. Trotsenko, X.L. Tu, I. Uschmann, P.M. Walker, G. Weber, D.F.A. Winters, P.J. Woods, H.Y. Zhao, Y.H. Zhang. *The European Physical Journal Special Topics*, **225** (5), 797 (2016).
- [32] P. Pfäfflein, S. Allgeier, S. Bernitt, A. Fleischmann, M. Friedrich, C. Hahn, D. Hengstler, M.O. Herdrich, A. Kalinin, F.M. Kröger, P. Kuntz, M. Lestinsky, B. Löher, E.B. Menz, T. Over, U. Spillmann, G. Weber, B. Zhu, C. Enss, T. Stöhlker. *Phys. Scr.*, **97** (11), 114005 (2022).
- [33] I.I. Tupitsyn, V.M. Shabaev, J.R. Crespo López-Urrutia, I. Draganić, R. Soria Orts, J. Ullrich. *Phys. Rev. A*, **68** (2), 022511 (2003).
- [34] I.I. Tupitsyn, A.V. Volotka, D.A. Glazov, V.M. Shabaev, G. Plunien, J.R. Crespo López-Urrutia, A. Lapiere, J. Ullrich. *Phys. Rev. A*, **72** (6), 062503 (2005).
- [35] I.I. Tupitsyn, N.A. Zubova, V.M. Shabaev, G. Plunien, T. Stöhlker. *Phys. Rev. A*, **98** (2), 022517 (2018).
- [36] I. Angeli, K. Marinova. *At. Data. Nucl. Data Tables*, **99** (1), 69 (2013).
- [37] V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, V.A. Yerokhin. *Phys. Rev. A*, **88** (1), 012513 (2013).
- [38] V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, V.A. Yerokhin. *Comp. Phys. Commun.*, **189**, 175 (2015).
- [39] V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, V.A. Yerokhin. *Comp. Phys. Commun.*, **223**, 69 (2018).
- [40] В.М. Шабаев. *Теор. мат. физ.*, **63**, 394 (1985). [V.M. Shabaev. *Theor. Math. Phys.*, **63**, 588 (1985)].
- [41] В.М. Шабаев. *Яд. физ.*, **47**, 107 (1988). [V.M. Shabaev. *Sov. J. Nucl. Phys.*, **47**, 69 (1988)].
- [42] C.W.P. Palmer. *J. Phys. B*, **20** (22), 5987 (1987).
- [43] V.M. Shabaev. *Phys. Rev. A*, **57** (1), 59 (1998).
- [44] A.N. Artemyev, V.M. Shabaev, V.A. Yerokhin. *Phys. Rev. A*, **52** (3), 1884 (1995).
- [45] A.N. Artemyev, V.M. Shabaev, V.A. Yerokhin. *J. Phys. B*, **28** (24), 5201 (1995).
- [46] V.M. Shabaev, A.N. Artemyev, T. Beier, G. Plunien, V.A. Yerokhin, G. Soff. *Phys. Rev. A*, **57** (6), 4235 (1998).
- [47] A.V. Malyshev, R.V. Popov, V.M. Shabaev, N.A. Zubova. *J. Phys. B*, **51** (8), 085001 (2018).
- [48] I.S. Anisimova, A.V. Malyshev, D.A. Glazov, M.Y. Kaygorodov, Y.S. Kozhedub, G. Plunien, V.M. Shabaev. *Phys. Rev. A*, **106** (6), 062823 (2022).
- [49] M.H. Mittleman. *Phys. Rev. A*, **5** (6), 2395 (1972).
- [50] V.M. Shabaev. *J. Phys. B*, **26** (24), 4703 (1993).
- [51] V.M. Shabaev. *Phys. Rep.*, **356** (3), 119 (2002).
- [52] И.И. Тупицын, С.В. Безбородов, А.В. Малышев, Д.В. Миронова, В.М. Шабаев. *Опт. и спектр.*, **128** (1), 24 (2020).
- [53] С.В. Безбородов, И.И. Тупицын, А.В. Малышев, Д.В. Миронова, В.М. Шабаев. *Опт. и спектр.*, **130** (10), 1471 (2022).
- [54] G. Plunien, B. Muller, W. Greiner, G. Soff. *Phys. Rev. A*, **43** (11), 5853 (1991).
- [55] G. Plunien, G. Soff. *Phys. Rev. A*, **51** (2), 1119 (1995).
- [56] A.V. Nefiodov, L.N. Labzowsky, G. Plunien, G. Soff. *Phys. Lett. A*, **222** (4), 227 (1996).
- [57] Y.S. Kozhedub, O.V. Andreev, V.M. Shabaev, I.I. Tupitsyn, C. Brandau, C. Kozhuharov, G. Plunien, T. Stöhlker. *Phys. Rev. A*, **77** (3), 032501 (2008).
- [58] I.P. Grant. *J. Phys. B*, **7** (12), 1458 (1974).