

01
Адиабатические волноводные моды трехслойного интегрально-оптического волновода

© Д.В. Диваков,^{1,2} К.П. Ловецкий,¹ А.Л. Севастьянов,³ А.А. Тютюнник^{1,2}

¹ Российский университет дружбы народов, 117198 Москва, Россия

² Объединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Московская обл., Россия

³ Высшая школа экономики, 109028 Москва, Россия
 e-mail: divakov-dv@rudn.ru

Поступило в Редакцию 7 февраля 2023 г.
 В окончательной редакции 7 февраля 2023 г.
 Принято к публикации 7 февраля 2023 г.

Рассмотрено численное решение задачи волноводного распространения поляризованного света в плавном переходе планарного волновода. В рамках модели адиабатических волноводных мод система уравнений Максвелла сведена к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений и двух алгебраических уравнений для шести компонент электромагнитного поля в нулевом приближении и стольких же уравнений в первом приближении. Многослойная структура волноводов позволила осуществить редукцию задачи к однородной системе линейных алгебраических уравнений, условие нетривиальной разрешимости которой задает дисперсионное уравнение. Решены вспомогательные задачи на собственные значения и собственные векторы для описания адиабатических мод волновода.

Ключевые слова: плавно нерегулярные интегрально-оптические многослойные волноводы, задачи на собственные значения и собственные векторы, одномодовый режим распространения адиабатических волноводных мод.

DOI: 10.21883/JTF.2023.04.55031.292-22

Введение

Объектом нашего рассмотрения является волноводное распространение монохроматического электромагнитного излучения в оптическом диапазоне в тонкопленочных интегрально-оптических структурах. Такие структуры являются сложными волноведущими структурами, образованными нанесением дополнительных волноводных слоев различной (плавно-нерегулярной) геометрической конфигурации на плоскую подложку. Под тонкопленочным волноводом будем понимать волновод, толщина волноводного слоя которого сопоставима с длиной волны λ распространяющегося излучения.

Плавно-нерегулярными будем называть интегрально-оптические структуры, удовлетворяющие неравенствам, задаваемым геометрией дополнительного волноводного слоя:

$$\left| \frac{\partial h}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial h}{\partial z} \right| \ll 1.$$

Волноводное распространение монохроматического поляризованного электромагнитного излучения в интегрально-оптических волноводах описывается уравнениями Максвелла.

В случае отсутствия сторонних зарядов и токов скалярные уравнения Максвелла следуют из векторных, а граничные условия для нормальных компонент следуют из граничных условий для тангенциальных компонент

электромагнитного поля [1,2]. В декартовых координатах, связанных с геометрией подложки (или трехслойного планарного диэлектрического волновода), уравнения Максвелла записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}, & \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для построения модели адиабатических волноводных мод (АВМ) представим решения (1) в виде локально нормальных волноводных мод локально-планарного волновода сравнения (см. [3,4]), которые в методе асимптотического разложения принимают вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x; y, z, t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}_s(x; y, z)}{(-i\omega)^{y+s}} \exp\{i\omega t - ik_0\varphi(y, z)\}, \\ \mathbf{H}(x; y, z, t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}_s(x; y, z)}{(-i\omega)^{y+s}} \exp\{i\omega t - ik_0\varphi(y, z)\}. \end{aligned}$$

В записи $\mathbf{E}_s(x; y, z)$, $\mathbf{H}_s(x; y, z)$ отделение x от остальных аргументов точкой с запятой означает следующее

предположение:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_s(x; y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathbf{E}_s(x; y, z)}{\partial z} \sim \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_s(x; y, z)}{\partial x},$$

$$j = x, y, z,$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}_s(x; y, z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}_s(x; y, z)}{\partial z} \sim \frac{1}{\omega} \frac{\partial \mathbf{H}_s(x; y, z)}{\partial x},$$

$$j = x, y, z,$$

где ω — круговая частота распространяющегося монохроматического электромагнитного излучения.

Используя подход метода асимптотического разложения по размерному малому параметру ω^{-1} [5–7], получаем в нулевом приближении систему однородных уравнений:

$$-ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} H_0^z + ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} H_0^y = ik_0 \varepsilon E_0^x, \quad (2)$$

$$-ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} H_0^x - \frac{\partial H_0^z}{\partial x} = ik_0 \varepsilon E_0^y, \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_0^y}{\partial x} + ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} H_0^x = ik_0 \varepsilon E_0^z, \quad (4)$$

$$-ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} E_0^z + ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} E_0^y = -ik_0 \mu H_0^x, \quad (5)$$

$$-ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} E_0^x - \frac{\partial E_0^z}{\partial x} = -ik_0 \mu H_0^y, \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_0^y}{\partial x} + ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} E_0^x = -ik_0 \mu H_0^z \quad (7)$$

и систему уравнений в первом приближении метода

$$\begin{aligned} -ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{H_1^z}{(-i\omega)} + \frac{\partial H_0^z}{\partial y} + ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{H_1^y}{(-i\omega)} - \frac{\partial H_0^y}{\partial z} \\ = ik_0 \varepsilon \frac{E_1^x}{(-i\omega)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$-ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{H_1^x}{(-i\omega)} + \frac{\partial H_0^x}{\partial z} - \frac{\partial H_1^z}{\partial x} \frac{1}{-i\omega} = ik_0 \varepsilon \frac{E_1^y}{(-i\omega)}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial H_1^y}{\partial x} \frac{1}{(-i\omega)} + ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{H_1^x}{(-i\omega)} - \frac{\partial H_0^x}{\partial y} = ik_0 \varepsilon \frac{E_1^z}{(-i\omega)}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{E_1^z}{(-i\omega)} + \frac{\partial E_0^z}{\partial y} + ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{E_1^y}{(-i\omega)} - \frac{\partial E_0^y}{\partial z} \\ = -ik_0 \mu \frac{H_1^x}{(-i\omega)}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$-ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{E_1^x}{(-i\omega)} + \frac{\partial E_0^x}{\partial z} - \frac{\partial E_1^z}{\partial x} \frac{1}{-i\omega} = -ik_0 \mu \frac{H_1^y}{(-i\omega)}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial E_1^y}{\partial x} \frac{1}{(-i\omega)} + ik_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{E_1^x}{(-i\omega)} - \frac{\partial E_0^x}{\partial y} = -ik_0 \mu \frac{H_1^z}{(-i\omega)}. \quad (13)$$

Для тонкопленочного многослойного волновода, состоящего из оптически однородных слоев, выполняются

условия сопряжения электромагнитного поля на границах раздела сред

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^- + \mathbf{n} \times \mathbf{E}^+ = 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}^- + \mathbf{n} \times \mathbf{H}^+ = 0. \quad (15)$$

Кроме того, выполняются асимптотические условия

$$E_y^0, E_z^0, H_y^0, H_z^0 \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 0, \quad (16)$$

обеспечивающие единственность решения задачи (2)–(13).

1. Двумерные диэлектрические волноводы

При отсутствии зависимости от „y“ уравнения Максвелла упрощаются и разделяются на две независимые подсистемы для ТЕ- и ТМ-поляризации. В частности, для ТЕ-поляризации в нулевом порядке справедливы уравнения:

$$\frac{dE_0^y}{dx} + ik_0 \mu H_0^z = 0, \quad (17)$$

$$\frac{dH_0^z}{dx} - \frac{ik_0}{\mu} \beta^2(z) E_0^y + ik_0 E_0^y = 0, \quad (18)$$

$$H_0^x = -\frac{1}{\mu} \beta(z) E_0^y, \quad (19)$$

и в первом порядке справедливы уравнения:

$$\frac{\partial E_1^y}{\partial x} + ik_0 \mu H_1^z = 0 \quad (20)$$

$$-\frac{\partial H_1^z}{\partial x} + \frac{ik_0}{\mu} \beta^2(z) E_1^y - ik_0 \varepsilon E_1^y = i\omega \frac{\partial H_0^x}{\partial z} - \frac{i\omega}{\mu} \beta(z) \frac{\partial E_0^y}{\partial z}, \quad (21)$$

$$H_1^x = -\frac{1}{\mu} \left(\beta(z) E_1^y + \frac{\omega}{k_0} \left(\frac{\partial E_0^y}{\partial z} \right) \right). \quad (22)$$

На горизонтальных границах раздела соотношения (14), (15) сводятся к равенству горизонтальных компонент электромагнитного поля. На наклонной части границы раздела волноводных слоев $x = h(z)$ касательная плоскость задается уравнением $dx - (dh/dz) dz = 0$, и условия сопряжения электромагнитных полей в точке $(h(z), z)'$ на наклонной границе раздела имеют вид:

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = \left(E_y \frac{\partial h}{\partial z} - E_z \frac{\partial h}{\partial y}; -E_z - E_x \frac{\partial h}{\partial z}; E_y - E_x \frac{\partial h}{\partial y} \right)^T, \quad (23)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \left(H_y \frac{\partial h}{\partial z} - H_z \frac{\partial h}{\partial y}; -H_z - E_x \frac{\partial h}{\partial z}; H_y - H_x \frac{\partial h}{\partial y} \right)^T. \quad (24)$$

Они полностью задаются парами независимых компонент E_y^r, E_z^r и H_y^r, H_z^r .

Сформулируем задачу отыскания решений уравнений (17)–(24), убывающих на бесконечности:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |E_0^y(x; z)| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |E_1^y(x; z)| = 0.$$

Подходим к ее решению с помощью вспомогательной спектральной задачи:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0 \varepsilon \mu\right) E_{k_0}^y &= k_0^2 \beta_k^2 E_{k_0}^y, \\ \mu H_{k_0}^x &= -\beta_k E_{k_0}^x, \\ H_{k_0}^x &= \frac{i}{k_0 \mu} \frac{dE_{k_0}^y}{dx}, \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 \varepsilon \mu\right) E_{k_1}^y - k_0^2 \beta_k^2 E_{k_1}^y &= k_0 \mu \omega \left(\frac{\beta_k}{\mu} \frac{dE_{k_0}^y}{dz} - \frac{dH_{k_0}^x}{dz}\right), \\ H_{k_1}^x + \frac{\beta_k}{\mu} E_{k_1}^y &= -\frac{\omega}{k_0 \mu} \frac{dE_{k_0}^y}{dz}, \\ H_{k_0}^z &= \frac{i}{k_0 \mu} \frac{dE_{k_0}^y}{dz} \end{aligned}$$

с асимптотическими условиями

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |E_k^y(x; z)| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |E_1^y(x; z)| = 0$$

и условиями нормировки

$$\begin{aligned} E_k^y, E_k^y &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} E_k^y(x, z) \overline{E_k^y(x, z)} dx = 1, \\ E_k^y, E_k^y &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} E_k^y(x, z) \overline{E_k^y(x, z)} dx = 1. \end{aligned}$$

Для отыскания электромагнитного поля адиабатических волноводных мод рассмотрим решение вспомогательной задачи.

2. Адиабатические ТЕ-волноводные моды в нулевом и первом приближениях

Рассмотрим амплитуды компонент электромагнитного поля ТЕ-моды в подобластях тонких однородных пленок трехслойных участков волноводов. Запишем общие решения для E_y через параметры

$$\begin{aligned} \gamma_z &= k_0 \sqrt{\beta^2(z) - n_s^2}, \\ \chi_f(z) &= k_0 \sqrt{n_f^2 - \beta^2(z)}, \\ \gamma_c &= k_0 \sqrt{\beta^2(z) - n_c^2}. \end{aligned}$$

На границах раздела слоев условия сопряжения электромагнитного поля в нулевом приближении для ТЕ-моды принимают вид однородной СЛАУ для амплитудных коэффициентов $A_0^c(z)$, $A_0^s(z)$, $A_0^{f+}(z)$, $A_0^{f-}(z)$. Условие разрешимости задается зависимостью между $\beta(z)$ и $h(z) = a_2(z) - a_1$ приводит к отысканию параметров решения $\beta_0(z)$, $\gamma_0^c(z)$, $\gamma_0^s(z)$, $\chi_0^f(z)$. Параметры решения $\beta_0(z)$ и $\gamma_0^c(z)$, $\gamma_0^s(z)$, $\chi_0^f(z)$, а также сами нетривиальные решения СЛАУ ищутся таким образом, чтобы коэффициенты $A_0^c(z)$, $A_0^s(z)$, $A_0^{f+}(z)$, $A_0^{f-}(z)$ были непрерывно дифференцируемыми функциями аргумента. В таком случае зависящие от их производных конкретные уравнения первого порядка будут состоятельны.

С учетом соотношений $\beta_0(z)$, $A_0^c(z)$, $A_0^s(z)$, $A_0^{f+}(z)$, $A_0^{f-}(z)$ исследуемые уравнения (20)–(22) первого порядка малости в трех слоях принимают вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} + k_0^2 \varepsilon \mu - k_0^2 \beta_k^2\right) E_{k_1}^y &= 2k_0 \beta_k \omega \frac{d}{dz} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &A_s(z) \exp\{\gamma_s(z)(x - a_1)\} \\ &(A_f^+(z) \exp\{i\chi_f(z)(x - a_1)\} + \\ &+ A_f^-(z) \exp\{-i\chi_f(z)(x - a_1)\}) \\ &A_c(z) \exp\{-\gamma_c(z)(x - a_1)\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} H_1^x + \frac{\beta z}{\mu} E_1^y &= -\frac{\omega}{\mu k_0} \frac{\partial}{\partial z} \\ &\times \left\{ \begin{aligned} &A_s(z) \exp\{\gamma_s(z)(x - a_1)\} \\ &A_f^+(z) \exp\{i\chi_f(z)(x - a_1)\} + \\ &+ A_f^-(z) \exp\{-i\chi_f(z)(x - a_1)\} \\ &A_c(z) \exp\{-\gamma_c(z)(x - a_1)\} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial E_1^y}{\partial x} + ik_0 \mu H_1^z = 0. \quad (27)$$

Решения системы уравнений (25)–(27) имеют вид суммы решений однородных частей указанных уравнений и частных решений полных неоднородных уравнений.

Решение однородной системы в первом приближении имеет вид:

$$\begin{aligned} E_s^y(z) &= A_{s1}(z) \exp(\gamma_{s1}(z)(x - a_1)), \\ E_f^y(z) &= A_{f1}^+(z) \exp(i\chi_{f1}(z)(x - a_1)) \\ &+ A_{f1}^-(z) \exp(-i\chi_{f1}(z)(x - a_1)), \\ E_c^y(z) &= A_{c1}(z) \exp(\gamma_{c1}(z)(x - a_1)), \\ H_s^x(z) &= -\frac{\beta_1(z)}{\mu} A_{s1}(z) \exp(\gamma_{s1}(z)(x - a_1)), \\ H_f^x(z) &= -\frac{\beta_1(z)}{\mu} (A_{f1}^+(z) \exp(i\chi_{f1}(z)(x - a_1)) \\ &+ A_{f1}^-(z) \exp(-i\chi_{f1}(z)(x - a_1))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_c^x(z) &= -\frac{\beta_1(z)}{\mu} A_{c1}(z) \exp(\gamma_{c1}(z)(x - a_1)), \\
H_s^z(z) &= \frac{i\gamma_{s1}(z)}{k_0\mu} A_{s1}(z) \exp(\gamma_{s1}(z)(x - a_1)), \\
H_f^z &= -\frac{\chi_{f1}}{k_0\mu} \left(A_{f1}^+(z) \exp(i\chi_{f1}(z)(x - a_1)) \right. \\
&\quad \left. + A_{f1}^-(z) \exp(-i\chi_{f1}(z)(x - a_1)) \right), \\
H_c^z(z) &= \frac{i\gamma_{c1}(z)}{k_0\mu} A_{c1}(z) \exp(\gamma_{c1}(z)(x - a_1)).
\end{aligned}$$

Частное решение неоднородной системы ОДУ (25)-(27) ищем с помощью определителя Вронского методом, разработанным для ОДУ второго порядка. При этом используем полные общие решения, не обязательно удовлетворяющие асимптотическим условиям (16), и лишь после получения итоговых формальных выражений обнуляем в них слагаемые, растущие на бесконечности.

Общее решение в первом приближении имеет вид:

$$\begin{aligned}
E_y &= E_y^{homog} + E_y^p, \\
H_x &= H_x^{homog} + H_x^p, \\
H_z &= H_z^{homog}.
\end{aligned}$$

Граничные условия на плоской границе принимают вид:

$$\begin{aligned}
E_s^y(x = a_1) &= E_f^y(x = a_1), \\
H_s^z(x = a_1) &= H_f^z(x = a_1).
\end{aligned}$$

На криволинейной границе $x = a_2(z)$ (при этом $a_2(z) - a_1 = h(z)$) принимают вид:

$$\begin{aligned}
E_f^y(x = a_2(z)) &= E_c^y(x = a_2(z)), \\
H_f^z(x = a_2(z)) + \frac{\partial h}{\partial z} H_f^x(x = a_2(z)) &= H_c^z(x = a_2(z)) + \frac{\partial h}{\partial z} H_c^x(x = a_2(z)).
\end{aligned}$$

В итоге получим неоднородную систему из четырех уравнений с неизвестными коэффициентами ($A_{s1}(z)$, A_{f1}^+ , A_{f1}^- , $A_{c1}(z)$) и неизвестным параметром $\beta_1(z)$.

3. Обсуждение и заключение

Для формирования системы ОДУ первого порядка необходимо предварительно решить однородную систему ОДУ нулевого порядка. После этого для каждого решения нулевого порядка мы записываем неоднородную систему ОДУ первого порядка.

Система однородных ОДУ (17)–(19) для вкладов нулевого порядка в АВМ редуцируется в трехслойном тонкопленочном волноводе к однородной СЛАУ

$$\hat{M}(\beta_0(z))\mathbf{A}_0(\beta_0(z)) = \mathbf{0}. \quad (28)$$

Условие разрешимости СЛАУ (1) является условие

$$\det \hat{M}(\beta_0(z)) = 0 \quad (29)$$

при любых $z \in [z_0, z_1]$ на интервале решения исходной задачи.

Система неоднородных ОДУ (20)–(22) для вкладов первого порядка в АВМ в правой части содержит аналитические выражения, зависящие от производных от $\mathbf{A}_0(\beta_0(z))$ и от $\beta_0(z)$, $\chi_0^f(z)$, $\gamma_0^c(z)$, $\gamma_0^s(z)$. Таким образом, для конкретной записи правой части, в зависимости от решений (28) и (29), их решения необходимо получить в классе непрерывно дифференцируемых функций. С целью отыскания таких решений нулевого порядка предложен метод, изложенный в работе [8].

После получения с помощью системы символьных вычислений явного вида выражений $\mathbf{A}_0(\beta_0(z))$ в зависимости от численного решения $\beta_0 \in C^1[z_0, z_1]$ получаем возможность редуцировать систему неоднородных ОДУ (25)–(27) для вкладов первого порядка к системе неоднородных СЛАУ

$$\hat{M}(\beta_1(z))\mathbf{A}_1(\beta_1(z)) = \mathbf{F} \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial z} \right) \quad (30)$$

с такой же матрицей, как и в случае вкладов нулевого порядка, но зависящей от другого параметра $\beta_1(z)$, а значит и от других $\chi_1^f(z)$, $\gamma_1^c(z)$, $\gamma_1^s(z)$. Как и ранее, и в этом случае необходимо потребовать разрешимости неоднородной СЛАУ (30).

После получения решений уравнений нулевого и первого порядка для электромагнитных полей модели АВМ в замкнутом виде мы можем составить из их решений выражения для электромагнитных полей в первом (плюс нулевом) приближении

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(x; y, z) &= \mathbf{E}_0(x; y, z) + \frac{i}{\omega} \mathbf{E}_1(x; y, z), \\
\mathbf{H}(x; y, z) &= \mathbf{H}_0(x; y, z) + \frac{i}{\omega} \mathbf{H}_1(x; y, z).
\end{aligned}$$

Финансирование работы

Исследование А.А. Гютюнник (разработка символьных методов) и Д.В. Дивакова (программирование) выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20257). Вклад К.П. Ловецкого — постановка задачи, А.Л. Севастьянова — написание рукописи.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников. *Математические модели электродинамики* (Высшая школа, М., 1991)

- [2] И.Е. Могилевский, А.Г. Свешников. *Математические задачи теории дифракции* (Физ. фак. МГУ, М., 2010)
- [3] D. Markuze. *Theory of Dielectric Optical Waveguides* (Academic Press, NY., 1974)
- [4] M.J. Adams. *An Introduction to Optical Waveguides* (Wiley, NY., 1981)
- [5] V.M. Babich, V.S. Buldyrev. *Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory* (Alpha Science International, Harrow, UK, 2009)
- [6] S. Solimeno, B. Crosignani, P. DiPorto. *Guiding, Diffraction and Confinement of Optical Radiation* (Academic Press, NY., 1986)
- [7] M. Kline, I.W. Kay. *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics* (Interscience Publishers, Hoboken, 1965)
- [8] D.V. Divakov, K.P. Lovetskiy, L.A. Sevastianov, A.A. Tiutiunnik. *A Single-Mode Model of Cross-Sectional Method in a Smoothly Irregular Transition Between Planar Thin-Film Dielectric Waveguides*. Proc. SPIE 11846, Saratov Fall Meeting 2020: Laser Physics, Photonic Technologies, and Molecular Modeling, 118460T (2021). DOI: 10.1117/12.2590916