

01

Дифракция электромагнитных волн на одномерных дифракционных решетках, образованных щелями в абсолютно поглощающем экране

© А.М. Лерер, В.В. Махно, В.И. Кравченко

Южный федеральный университет,
344090 Ростов-на-Дону, Россия
e-mail: lerer@sfedu.ru

Поступило в Редакцию 30 декабря 2022 г.
В окончательной редакции 30 декабря 2022 г.
Принято к публикации 30 декабря 2022 г.

Получены двусторонние приближенные граничные условия для абсолютно поглощающего („черного“) слоя, лежащего на многослойном диэлектрике. Получены парные сумматорные уравнения для касательных, составляющих напряженности электрического и магнитного полей на щелях. Уравнения решены методом Галеркина с базисными функциями в виде полиномов Чебышева и Лежандра. Полученная система линейных алгебраических уравнений имеет быструю внутреннюю сходимость. Для контроля точности полученного решения решена дуальная задача — решетка из „черных полосок“. В этом случае неизвестные в парных сумматорных уравнениях — плотность токов на полосках. Проведен анализ свойств решеток.

Ключевые слова: приближенные граничные условия, „черный“ экран, дифракционная решетка, парные сумматорные уравнения, метод Галеркина.

DOI: 10.21883/JTF.2023.04.55029.290-22

Введение

Настоящая работа представляет собой продолжение теоретических и экспериментальных исследований дифракции рентгеновских пучков на микроканальных пластинах (МКП) [1–3]. МКП — это пластина из свинцово-силикатного стекла с гексагональной решеткой круглых отверстий. Диаметры отверстий обычно менее $12\ \mu\text{m}$. В диапазоне энергий 100–500 eV (длина волны приблизительно 2–10 nm) стекло имеет комплексный показатель преломления, модуль которого немного меньше единицы. Сплошная стеклянная пластина почти идеальный поглотитель: коэффициенты отражения и прохождения менее –30 dB. Распространение рентгеновских лучей в каналах аналогично распространению электромагнитных волн оптического и микроволнового диапазона в световодах. В [1] и других работах в приближении Кирхгоффа исследуются возбуждение, распространение и излучение собственных волн микроканалов. Из-за большого числа волн такой расчет достаточно трудоемок. Поэтому в [2,3] предложен упрощенный подход — дифракция на отверстиях в непрозрачном экране. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментом. Дальнейшее развитие теории — дифракция на отверстиях в абсолютно поглощающем („черном“) экране.

При исследовании дифракции на тонких экранах или на телах с тонкопленочным покрытием удобно использовать метод приближенных граничных условий (ПГУ). Так, например, в [4] получены импедансные ПГУ, в том числе и для „черного“ покрытия, которые использованы для моделирования характеристик рассеяния волн телами с поглощающим покрытием.

Для тонких экранов вводятся двусторонние ПГУ (ДПГУ): [5] — для диэлектрических слоев, [6] — для тонких пленок с кривизной, [7] — для тонких металлических решеток и др.

Область применения ДПГУ — толщина экрана много меньше длины волны. Но возможна модификация ДГУ для толщин меньше длины волны. В [8] это сделано для плазмонных оптических решеток.

Хотя ПГУ введены для неограниченных по длине и ширине пленок, они широко используются для решения задач рассеяния на дифракционных решетках [8–12]. В случае применения метода ПГУ требуется обоснование достоверности полученных результатов. Один из возможных подходов к этой проблеме — сравнение результатов расчетов одной и той же структуры двумя методами. В [8,12,13] задача о дифракции электромагнитных волн оптического и терагерцового диапазонов на двумерной решетке из металлических и графеновых полосок решена двумя методами. Первый метод основан на численно-аналитическом методе решения объемного интегро-дифференциального уравнения (ОИДУ). Неизвестными в ОИДУ являются компоненты напряженности электрического поля внутри плазмонных полосок. Во втором методе использованы приближенные граничные условия для тонкого диэлектрического слоя. Сравнение результатов расчетов этими методами позволило обосновать корректность применения метода ПГУ для получения основных физических закономерностей.

Цель настоящей работы — модификация двусторонних приближенных граничных условий (ДПГУ) импедансного типа для расчета дифракции электромагнитных тел на отверстиях в абсолютно поглощающих экранах и применение этих граничных условий для решения крае-

вой задачи о дифракции на одномерно-периодической решетке из отверстий в „черном“ экране. В отличие [1–3] в настоящей работе развита строгая теория в диапазоне длин волн, соизмеримых с размерами решетки.

Определение Зоммерфельдом „черного“ тела — тело с $\varepsilon = \mu$ с большой мнимой частью [14]. Поэтому для расчета “черных” экранов целесообразно использовать ДПГУ [5], в которые входят диэлектрическая и магнитная проницаемости экрана.

ПГУ для черных экранов возможно использовать и для расчета тонкопленочных сверхширокополосных поглотителей, которые применяются для повышения чувствительности оптических приборов, в солнечных элементах, для противодействия средствам визуально-оптической, оптико-электронной и радиоэлектронной разведки, для повышения электромагнитной совместимости в микроволновом и терагерцовом диапазонах, в модуляторах и поляризаторах [15]. Для поглощения электромагнитного излучения в определенном диапазоне частот разрабатываются и применяются различные материалы. На сегодняшний день известно большое количество композитных полимерных радиопоглощающих материалов на основе различных форм углеродных частиц, например, углеродных нанотрубок, а также ферритовых порошков или наночастиц. Современные поглощающие структуры должны быть тонкими и обеспечивать почти 100%-ное поглощение в широком диапазоне частот и углов облучения. В оптическом диапазоне наилучшие результаты имеют покрытия из вертикально ориентированных углеродных нанотрубок [16] и на основе карбида титана [17]. Особый интерес вызывают исследования, посвященные совершенным поглотителям на основе метаматериалов — периодических структур со слоями из графена [12,13,15,18–21], VO₂ [22], цилиндрами с комплексной диэлектрической проницаемостью и неоднородной оболочкой [23].

1. Двусторонние ПГУ для тонкого поглощающего экрана

Общий вид двусторонних ПГУ для тонкого диэлектрического экрана приведен в монографии [5]:

$$E_{x,z}^+ - E_{x,z}^- = \pm \frac{\rho}{2} (H_{z,x}^+ + H_{z,x}^-),$$

$$H_{x,z}^+ - H_{x,z}^- = \mp \frac{\sigma}{2} (E_{z,x}^+ + E_{z,x}^-).$$

Символы \pm обозначают поля над и под экраном, зависимость от времени $\exp(j\omega t)$:

$$\rho = j\omega(\mu - 1)\mu_0\tau, \quad \sigma = j\omega(\varepsilon - 1)\varepsilon_0\tau, \quad (1)$$

где μ, ε, τ — эквивалентные диэлектрические и магнитные проницаемости и толщина экрана.

Для двумерного случая ПГУ примут вид:

для Е-поляризации: **ЕНе**:

$$\mathbf{E}(0, 0, E), \mathbf{H}(H_x, H_y, 0), \mathbf{H} = \frac{j}{kZ_0\mu} \left(\mathbf{e}_x \frac{dE}{dy} - \mathbf{e}_y ik_x E \right),$$

$$E^+ = E^- = a \left(\frac{1}{\mu^+} \frac{dE^+}{dy} + \frac{1}{\mu^-} \frac{dE^-}{dy} \right);$$

$$\left(\frac{1}{\mu^+} \frac{dE^+}{dy} - \frac{1}{\mu^-} \frac{dE^-}{dy} \right) = -k^2 b (E^+ + E^-), \quad (2)$$

где

$$a = -\frac{\rho}{2} \frac{j}{kZ_0}, \quad b = -jZ_0 \frac{\sigma}{2k}, \quad (3)$$

где k, Z_0 — волновое число и характеристическое сопротивление в вакууме;

для Н-поляризации:

$$\mathbf{H}(0, 0, E), \mathbf{E}(E_x, E_y, 0), \mathbf{H} = \frac{jZ_0}{k\varepsilon} \left(\mathbf{e}_x \frac{dE}{dy} - \mathbf{e}_y ik_x E \right);$$

в (1) нужно поменять $\rho \leftrightarrow \sigma, Z_0 \rightarrow 1/Z_0, \mu \rightarrow -\varepsilon$.

2. Двусторонние ПГУ для идеально поглощающего экрана

Решаем задачу об отражении от экрана, расположенного между двумя полубесконечными слоями с параметрами $\varepsilon_1\mu_1$ (верхний слой — откуда падает волна) и $\varepsilon_2\mu_2$. На экране выполняются двусторонние ПГУ (2). Нетрудно получить, что коэффициенты отражения R и прохождения T удовлетворяют системе линейных уравнений

$$1 + R - T = ja(\xi_1 k_y^{(1)}(1 - R) + T\xi_2 k_y^{(2)}),$$

$$j\xi_1 k_y^{(1)}(1 - R) - Tj\xi_2 k_y^{(2)} = -k^2 b(1 + R + T),$$

где $k_y^{(1,2)}$ — нормальные к экрану компоненты волнового вектора в слоях 1 и 2, $\xi_{1,2} = \frac{1}{\mu_{1,2}}$ для Е-поляризации, $\xi_{1,2} = \frac{1}{\varepsilon_{1,2}}$ для Н-поляризации.

Решение системы линейных уравнений при $R = T = 0$ возможно при коэффициентах

$$a = -\frac{j}{\xi_1 k_y^{(1)}}, \quad b = -\frac{j\xi_1 k_y^{(1)}}{k^2}. \quad (4)$$

Подставим в (4) (1) и (3), полагаем $\xi_1 = 1$ (вакуум). В результате получим

$$(\mu - 1)d = -\frac{2j}{k_y^{(1)}}, \quad (\varepsilon - 1)d = -2j \frac{k_y^{(1)}}{k^2}.$$

Для нормального падения

$$(\varepsilon - 1)d = (\mu - 1)d = -\frac{2j}{k}, \quad (5)$$

что согласуется с определением Зоммерфельдом черного тела $\varepsilon = \mu$ с большой комплексной частью [14].

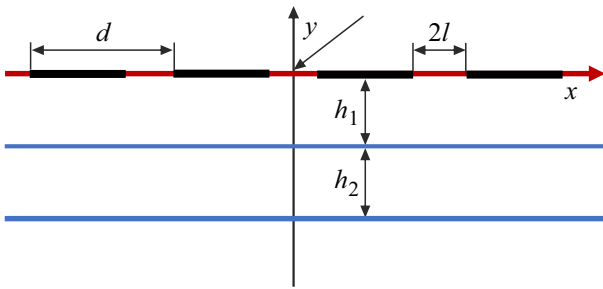


Рис. 1. Щелевая решетка.

3. Дифракция на решетке из щелей в поглощающем экране

Система координат — решетка периодичная с периодом d вдоль оси x (рис. 1). Щели — вдоль оси z . Ось y перпендикулярна плоскости решетки. Экран со щелями лежит в плоскости $y = 0$, ширина щелей $2l$. Волна падает сверху из среды с $\epsilon = \mu = 1$, снизу от экрана ($y \leq 0$) — многослойная подложка. Плоскость падения перпендикулярна щелям, поэтому при дифракции поляризация волны не меняется. Угол падения θ . Обозначим $U(x, y) = E_z(x, y)$ для Е-поляризации, $U(x, y) = H_z(x, y)$ для Н-поляризации. Неизвестную $U(x, y)$ разложим в ряд Флоке

$$U(x, y) = U^{ext}(x, y) + \frac{1}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{U}_n(y) \exp(j\alpha_n x),$$

$$\alpha_n = \frac{2n\pi}{d} + k_x, \quad (6)$$

где $k_x = k \sin \theta$ — касательная к экрану компоненты волнового вектора падающей на решетку волны, $U^{ext}(x, y)$ — внешнее поле (падающее плюс отраженное от экрана и прошедшее через экран без щелей). $U^{ext}(x, y)$ удовлетворяет ПГУ (2). Функции $\tilde{U}_n(y) \exp(j\alpha_n x)$ — решения уравнения Гельмгольца в каждом слое (см. Приложение).

$$\tilde{U}_n(y) = \begin{cases} A_n U_n^+(y), & y \geq 0, \\ B_n U_n^-(y), & y \leq 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $A_n B_n$ — неизвестные коэффициенты, $U_n^+(y) = \exp(-\gamma_n y) \gamma_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k_x^2}$, функции $U_n^-(y)$ определены в Приложении. Они удовлетворяют условию $U_n^-(0) = 1$.

Введем функции

$$f(x) = \begin{cases} U^+ - U^- - a \left(\xi_+ \frac{dU^+}{dy} + \xi_- \frac{dU^-}{dy} \right), & |x| \leq l, \\ 0, & d \geq |x| \geq l, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \left(\xi_+ \frac{dU^+}{dy} - \xi_- \frac{dU^-}{dy} \right) + k^2 b (U^+ + U^-), & |x| \leq l, \\ 0, & d \geq |x| \geq l. \end{cases}$$

Подставляем (6), (7). В результате получим

$$f_n = A_n - B_n - a(-\gamma_n A_n + \nu_{n,0} B_n);$$

$$g_n = (-\gamma_n A_n - \nu_{n,0} B_n) + k^2 b (A_n + B_n), \quad (8)$$

где f_n, g_n — коэффициенты в рядах Флоке для функций $f(x), g(x), \nu_{n,0} = U_n^-(0)$.

Из (8) находим

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{a}} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Так как нахождение элементов матрицы $\hat{\mathbf{a}}$ — элементарная задача, они здесь не приводятся.

Следующий этап решения — удовлетворение условиям непрерывности функций $U(x, y), \frac{\partial}{\partial y} U(x, y)$ на щели ($y = 0, |x| \leq l$):

$$E^{ext,+}(x, 0) - E^{ext,-}(x, 0) + \frac{1}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n - B_n) \exp(j\alpha_n x) = 0,$$

$$E'^{ext,+}(x, 0) - E'^{ext,-}(x, 0) + \frac{1}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma_n A_n + \nu_{n,0} B_n) \exp(j\alpha_n x) = 0, \quad (10)$$

где

$$A_n - B_n = a_{11} f_n + a_{12} g_n - (\gamma_n A_n + \nu_{n,0} B_n) = -\gamma_n a_{21} f_n - \nu_{n,0} a_{22} g_n, \quad |x| \leq l.$$

Таким образом, мы получили первую пару парных сумматорных уравнений, относительно f_n, g_n . Вторая следует из определения функций $f(x), g(x)$:

$$\frac{1}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(j\alpha_n x) = 0,$$

$$\frac{1}{d} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \exp(j\alpha_n x) = 0, \quad d \geq |x| \geq l. \quad (11)$$

4. Дифракция на решетке из поглощающих полосок

Естественно, щелевую решетку можно представить и как решетку из полосок. Поэтому приведенное ниже решение представляет интерес в качестве контроля достоверности и точности решения.

Для полосковой решетки внешнее поле — поле в структуре без полосок. Поля, как и в предыдущем случае, запишем в виде (6), (7). Вводим функции $f(x), g(x)$,

определенные при $y = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} U^+ - U^-, & |x| \leq \bar{l}, \\ 0, & d \geq |x| \geq \bar{l}, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \left(\xi_+ \frac{dU^+}{dy} - \xi_- \frac{dU^-}{dy} \right), & |x| \leq \bar{l}, \\ 0, & d \geq |x| \geq \bar{l}, \end{cases}$$

где $2\bar{l} = d - 2l$ — ширина полосок.

Выражаем A_n, B_n через f_n, g_n :

$$f_n = A_n - B_n, \quad g_n = (-\gamma_n A_n - \nu_{n,0} B_n).$$

Отсюда получим

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \mathbf{b} \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$b_{11} = \frac{\nu_{n,0}}{\gamma_n + \nu_{n,0}}, \quad b_{12} = -\frac{1}{\gamma_n + \nu_{n,0}},$$

$$b_{21} = -\frac{\gamma_n}{\gamma_n + \nu_{n,0}}, \quad b_{22} = -\frac{1}{\gamma_n + \nu_{n,0}}.$$

Следующий шаг — удовлетворяем ПГУ (2) на полосках. Подставляем в них (12). В результате получим первую пару сумматорных уравнений при $|x| \leq \bar{l}$. Вторая пара — (10), но при $d \geq |x| \geq \bar{l}$.

5. Решение ПСУ методом Галеркина

Решение ищем в виде

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{(f)} B_m(x), & |x| \leq l, \\ 0, & d \geq |x| \geq l; \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} X_m^{(g)} B_m(x), & |x| \leq l, \\ 0, & d \geq |x| \geq l, \end{cases} \quad (13)$$

где $X_m^{(f)}, X_m^{(g)}$ — неизвестные коэффициенты, $B_m(x)$ — базисные функции (БФ). В качестве БФ используем полиномы Чебышева T_m, U_m и Лежандра P_m [8]:

$$B_m(x) = P_m(x/l), \quad \text{либо } B_m(x) = T_m(x/l), \quad (14)$$

$$B_m(x) = U_m(x/l) \sqrt{l^2 - x^2}. \quad (15)$$

Для полосковой решетки тот же базис, но нужно заметить $l \rightarrow \bar{l}$.

Базис (14) используем для а) щелевой решетки, Н-поляризации и б) полосковой решетки Е-поляризации. Базис (15) для а) щелевой решетки, Е-поляризации и б) полосковой решетки Н-поляризации. Преобразования Флоке от БФ равны с точностью до константы, которые затем войдут в неизвестные коэффициенты,

$$\tilde{B}_{m,n}(x) = \frac{J_{m+1/2}(\alpha_n l)}{\alpha_n^{1/2}},$$

либо $\tilde{B}_{m,n}(x) = J_m(\alpha_n l)$ для базиса (14),

$$\tilde{B}_{m,n}(x) = \frac{J_{m+1}(\alpha_n l)}{\alpha_n},$$

для базиса (15).

Подставляем (14), (15) в (13)

$$f_n = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{X}_m^{(f)} \tilde{B}_{m,n}, \quad g_n = \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{X}_m^{(g)} \tilde{B}_{m,n},$$

где $\tilde{X}_m^{(f)}, \tilde{X}_m^{(g)}$ — неизвестные коэффициенты, отличающиеся от старых $X_m^{(f)}, X_m^{(g)}$ константами. Полученные f_n, g_n удовлетворяют (10).

Затем подставляем (12) в (9), полученные уравнения проектируем на БФ (14) или (15). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно $\tilde{X}_m^{(f)}, \tilde{X}_m^{(g)}$. СЛАУ имеет быструю внутреннюю сходимость — в рядах (13) достаточно ограничиться 5–15 членами для расчета комплексных амплитуд пространственных гармоник с погрешностью менее 0.5%.

6. Результаты расчетов

Рассмотрим вначале зависимость параметров решетки от длины волны (рис. 2,3). Решетка с размерами $2/d = 0.75$ расположена на двуслойном диэлектрике. Верхний слой толщиной $h_1 = 0.95d$, показатель преломления 1.5, нижний — полубесконечная подложка с показателем преломления 1.77. Нормальное падение. Выбираем длину волны λ_0 , при которой выполняются условия полного поглощения. На рис. 2,3 представлены зависимости коэффициентов отражения по мощности R прохождения по мощности T и потерь $P = 1 - R - T$. Сплошные линии $a = 0, \text{Im}b \rightarrow \infty$ — идеально проводящий экран, $P \rightarrow 0$, линии с символами — поглощающий

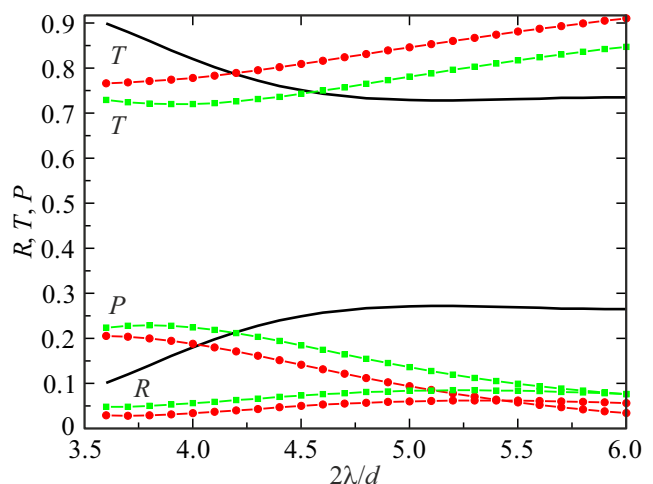


Рис. 2. Зависимость параметров решетки от длины волны. Е-поляризация.

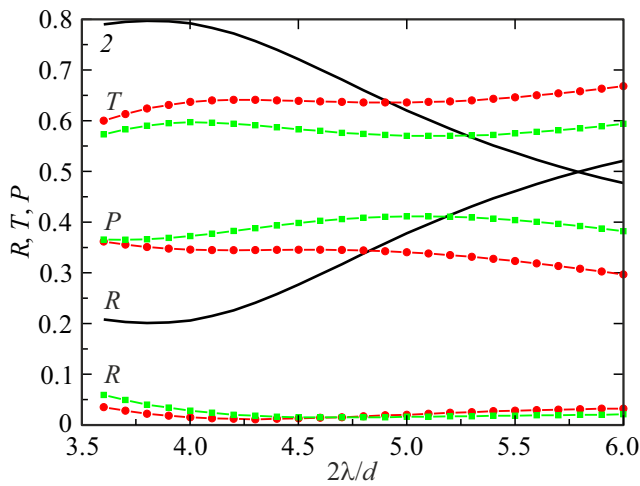


Рис. 3. Зависимость параметров решетки от длины волны. Н-поляризация.

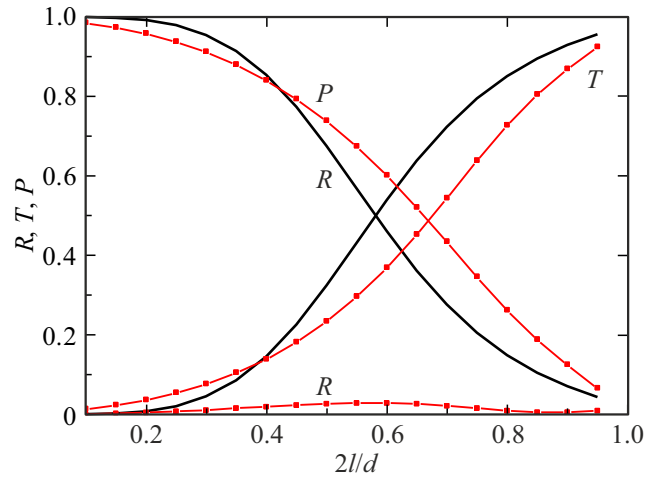


Рис. 5. Зависимость параметров решетки от ширины щели. Н-поляризация. $2\lambda/d = 2\lambda_0/d = 4$.

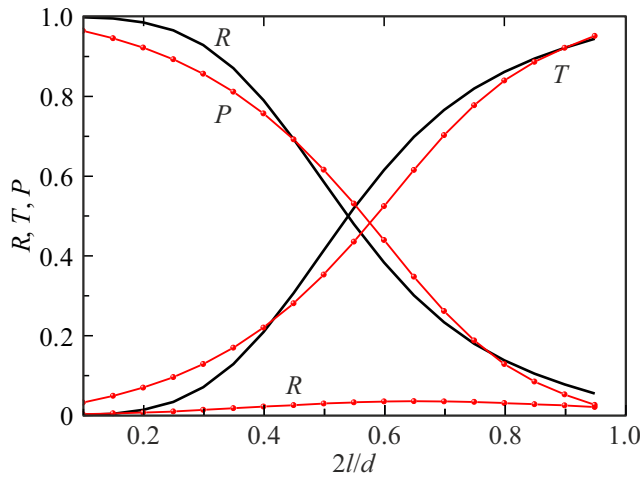


Рис. 4. Зависимость параметров решетки от ширины щели. Е-поляризация. $2\lambda/d = 2\lambda_0/d = 4$.

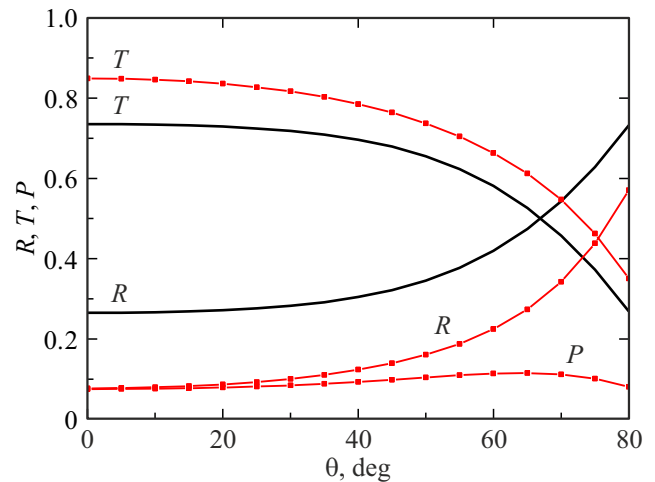


Рис. 6. Зависимость параметров решетки от угла падения. Е-поляризация. $2\lambda/d = 2\lambda_0/d = 6$.

экран. Круглые символы — $2\lambda_0/d = 4$, квадратные — $2\lambda_0/d = 6$.

Если сравнить полученные результаты для решетки в поглощающем экране с решеткой в идеально проводящем экране, то можно отметить:

- резкое снижение коэффициента отражения;
- меньшую зависимость коэффициентов отражения и прохождения от длины волны;
- что коэффициент прохождения либо растет с увеличением длины волны, либо имеет небольшой экстремум.

Минимальный коэффициент отражения R получается при толщине слоя, равном четверти длины волны в диэлектрике. При толщине, большей половине длины волны, R практически не зависит от толщины.

На рис. 4, 5 представлены зависимости параметров решетки от ширины щели, а на рис. 6, 7 — от угла падения. Сплошные линии — идеально проводящий экран, $P \rightarrow 0$, линии с символами — поглощающий экран. Следует

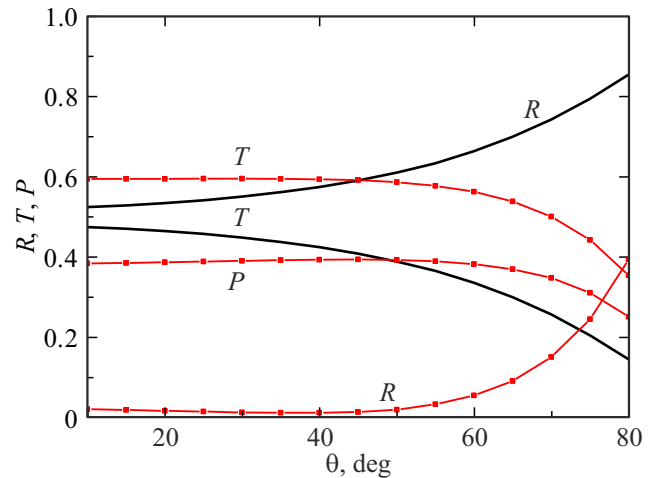


Рис. 7. Зависимость параметров решетки от угла падения. Н-поляризация. $2\lambda/d = 2\lambda_0/d = 6$.

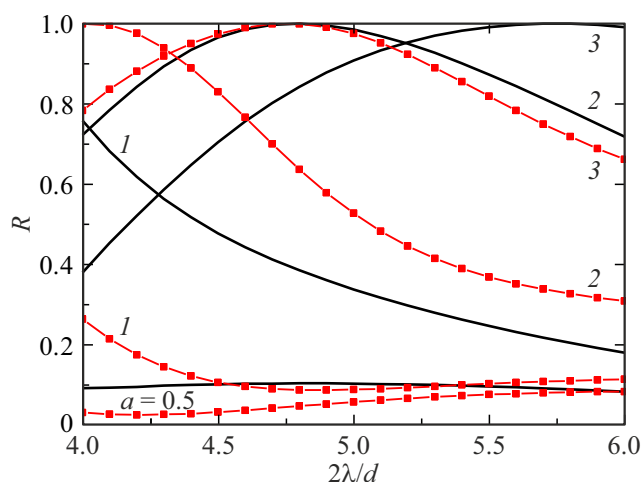


Рис. 8. Зависимость коэффициента отражения решетки от длины волны при изменении параметра a . $2l/d = 0.75$, $b = a$. Кривые без символов — Н-поляризация, с символами — Е-поляризация.

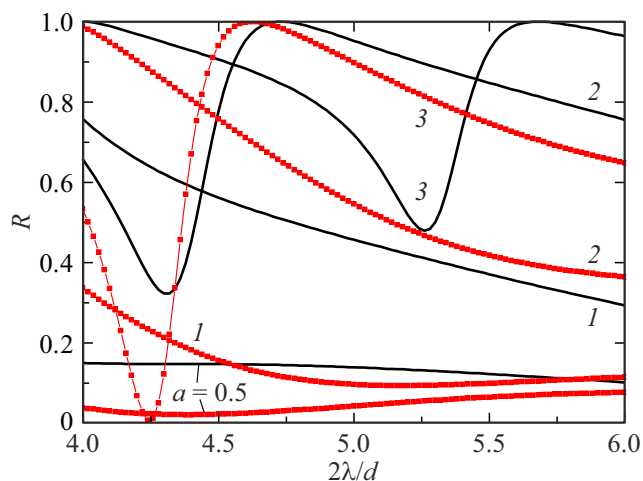


Рис. 9. Зависимость коэффициента отражения решетки от длины волны. $2l/d = 0.5$, $b = a$. Кривые без символов — Н-поляризация, с символами — Е-поляризация.

отметить, что у поглощающего экрана и экрана идеально проводящего сопоставимый коэффициент прохождения T . Характер угловых зависимостей $R(\theta)$, $T(\theta)$ у двух типов, естественно, одинаковый — коэффициент отражения резко возрастает при увеличении угла падения. Хотя условие полного поглощения (5) выполняется для нормального падения, коэффициент отражения меньше 0.15 вплоть до $\theta = 50^\circ$ для Е-поляризации и $\theta = 70^\circ$ для Н-поляризации.

На рис. 8,9 представлены результаты расчетов для другого типа экрана — из магнитоэлектрика, у которого $\varepsilon > 1$, $\mu > 1$. Подставляем (1) в (3). В результате получим

$$a = \frac{(\mu - 1)\tau}{2}, \quad b = \frac{(\varepsilon - 1)\tau}{2}.$$

Полагаем, что ε , μ — действительные величины. Тогда потерь нет, и коэффициент отражения $T = 1 - R$. На рисунках виден эффект полного отражения, который возникает при резонансе поля в магнитоэлектрических полосках. Ширина полосок $2w = d - 2l$, поэтому на рис. 7 — $2w/d = 0.25$, а на рис. 8 в два раза больше. На рис. 7 резонансы первого порядка, а на рис. 8 — второго. Резонансная длина волны, естественно, увеличивается с увеличением параметров a/d , d/d . Резонансы поперечного электрического поля (Н-поляризация падающей волны) более длинноволновые, чем резонансы продольного поля (Е-поляризация).

Таким образом, в настоящей работе из решения задачи об отражении электромагнитной волны от экрана, на котором выполняются двусторонние граничные условия импедансного типа, получены условия полного поглощения волны экраном. Полученные граничные условия применены для решения задачи дифракции на щелевой и полосковой решетке в абсолютно поглощающем экране. Решение задачи сведено к решению парных сумматорных уравнений, которые решены методом Галеркина. При сравнении с дифракционными решетками в идеально проводящем экране отмечены: резкое снижение коэффициента отражения в широком диапазоне длин волн и углов падения при сопоставимом коэффициенте прохождения; меньшая зависимость коэффициентов отражения и прохождения от длины волны.

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание в области научной деятельности, № FENW-2022-0001).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Приложение

Определим функцию $U_n^-(y)$ в (7) для подложки дифракционной решетки. Подложка расположена при $y \leq 0$ (рис. 1). Она содержит $N + 1$ слоев (на рис. 1 $N = 2$), причем слой с номером $N + 1$ — полубесконечный. Нумерация слоев идет сверху вниз. Толщина слоя с номером p ($p = 1, \dots, N$) h_p , диэлектрическая проницаемость ε_p . Магнитная проницаемость всех слоев равна единице. Координаты границ слоев — $y = y_p$, где $y_1 = 0$, $y_{p+1} = y_p - h_p$, $p = 1, \dots, N + 1$.

Функция $U(x, y)$ (6) является решением уравнения Гельмгольца в каждом слое

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \varepsilon(y) \right) U(x, y) = 0.$$

Поэтому $U_n^-(y)$ (см. (6), (7)) удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \varepsilon(y) - \alpha_n^2\right) U_n^-(y) = 0. \quad (\text{П.1})$$

Граничные условия непрерывности при $y = y_p$, $p(p = 2, \dots, N+1)$ функций а) $U_n^-(y)$ и б) $\xi \frac{dU_n^-(y)}{dy}$ ($\xi = 1$ для Е-поляризации, $\xi = \frac{1}{\varepsilon}$ для Н-поляризации). Кроме того, должно выполняться условие в) $U_N^-(0) = 1$.

Для того чтобы упростить выполнение граничных условий решения (П.1) запишем в виде: при $y_p \geq y \geq y_{p+1}$, ($p = 1, \dots, N$)

$$U_n^-(y) = \frac{X}{\text{sh} \kappa_{n,p} h_p} \left\{ -D_{p+1} \text{sh}[\kappa_{n,p}(y - y_p)] + D_p \text{sh}[\kappa_{n,p}(y - y_{p+1})] \right\}, \quad (\text{П.2})$$

при $y \geq y_{N+1}$

$$U_n^-(y) = -X D_{N+1} \exp[\kappa_{n,N+1}(y - y_{N+1})], \quad (\text{П.3})$$

где X, D_p неизвестные коэффициенты, $\kappa_{n,p} = \sqrt{\alpha_n^2 - k^2 \varepsilon_p}$.

Функции (П.2), (П.3) удовлетворяют граничному условию а) — они непрерывны на границах раздела слоев.

Выполняем граничное условие б), получим рекуррентную схему

$$D_p Q_{n,p} = D_{p+1} (T_{n,p} + T_{n,p+1}) - D_{p+2} Q_{n,p+1}, \quad p = N, N-1, \dots, 1, \quad (\text{П.4})$$

где

$$D_{N+2} = 0, \quad Q_{n,p} = \frac{\xi_p \kappa_{n,p}}{\text{sh}(\kappa_{n,p} h_p)},$$

$$T_{n,p} = \begin{cases} \xi_p \kappa_{n,p} \text{cth}(\kappa_{n,p} h_p), & p \neq N+1, \\ \xi_p \kappa_{n,p}, & p = N+1. \end{cases}$$

Полагаем в (П.4) $D_{N+1} = 1$ и находим все D_p . Наконец, находим неизвестный коэффициент X из условия в)

$$U_n^-(0) = X D_1 = 1.$$

Таким образом, все неизвестные коэффициенты в (П.2), (П.3) определены.

Список литературы

- [1] М.И. Мазурицкий, А.М. Лерер, П.В. Махно. ЖЭТФ, **150** (6), 1084 (2016). DOI: 10.7868/S0044451016120038 [M.I. Mazuritskiy, A.M. Lerer, P.V. Makhno. JETP, **123** (6), 942 (2016). DOI: 10.7868/S0044451016120038]
- [2] М.И. Мазурицкий, А.М. Лерер. ПЖЭТФ, **112** (3), 152 (2020). DOI: 10.31857/S1234567820150021 [M.I. Mazuritskiy, A.M. Lerer. JETP Lett., **112** (3), 38 (2020). DOI: 10.1134/S0021364020150072]
- [3] M.I. Mazuritskiy, A.M. Lerer, A. Marcelli, S.B. Dabagov. J. Synchrotron Radiation, **29** (3), 355 (2022). DOI: 10.1107/S1600577521012893
- [4] А.Г. Кюркчан, Д.Б. Демин. ЖТФ, **74** (2), 24 (2004).
- [5] Л.А. Вайнштейн. *Открытые резонаторы и открытые волноводы* (Советское радио, М. 1966)
- [6] Я.Р. Гринберг. Радиотехника и электроника, **26** (12), 2493 (1981).
- [7] Л.А. Вайнштейн. *К электродинамической теории решеток. В сб. „Электроника больших мощностей“* (Наука, М. 1963)
- [8] А.М. Лерер, И.Н. Иванова. Радиотехника и электроника, **61** (5), 435 (2016). DOI: 10.7868/S0033849416050089 [A.M. Lerer, I.N. Ivanova. J. Commun. Technol. Electron., **61** (5), 486 (2016). DOI: 10.7868/S0033849416050089]
- [9] T.L. Zinenko, M. Marciniak, A.I. Nosich, IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron., **19**, 9000108 (2013).
- [10] O.V. Shapoval, R. Sauleau, A.I. Nosich. IEEE Trans. Antennas Propag., **59**, 3339 (2011).
- [11] O.V. Shapoval, A.I. Nosich, AIP Adv., **3**, 042120 (2013).
- [12] А.М. Лерер, Г.С. Макеева. Письма в ЖТФ, **44** (18), 103 (2018). DOI: 10.21883/PJTf.2018.18.46618.17406 [A.M. Lerer, G.S. Makeeva., Tech. Phys. Lett., **44** (9), 852 (2018). DOI: 10.1134/S1063785018090225]
- [13] А.М. Лерер, И.Н. Иванова, Г.С. Макеева, В.В. Черепанов. Опт. и спектр., **129** (3), 342 (2021). DOI: 10.21883/OS.2021.03.50661.217-20 [A.M. Lerer, I.N. Ivanova, G.S. Makeeva, V.V. Cherepanov. Opt. Spectr., **129** (3), 339 (2021). DOI: 10.1134/S0030400X21030097]
- [14] Л.Н. Захарьев, А.А. Лиманский. *Рассеяние волн микроволнами телами* (Советское радио, М., 1972)
- [15] C. Zeng, H. Lu, D. Mao, Y. Du, H. Hua, W. Zhao, J. Zhao. Opto-Electron. Adv., **5** (4), 200098-1 (2022). DOI: 10.29026/oea.2022.200098
- [16] V. Ghai, H. Singh, P.K. Agnihotri, ACS Appl. Nano Mater., **2**, 7951 (2019). DOI: 10.1021/acsanm.9b01950]
- [17] H.M.T. Raza, A.S. Rana. *Third International Conference on Latest trends in Electrical Engineering and Computing Technologies* (INTELLECT), (2022), DOI: 10.1109/INTELLECT55495.2022.9969393
- [18] K.T. Lin, H. Lin, T.S. Yang, B.H. Jia. Nat Commun., **11**, 1389 (2020).
- [19] X. Chen, Z. Tian, Y. Lu, Y. Xu, X. Zhang, C. Ouyang, J. Gu, J. Han, W. Zhang. Adv. Opt. Mater., **8** (3), 1900660 (2020). DOI: 10.1002/adom.201900660
- [20] J. Chen, R. You, X. Bian, L. Zhu, H. Wang. IEEE Sensors, 1–4 (2022). DOI: 10.1109/SENSOR52175.2022.9967319
- [21] M. Rahmanzadeh, H. Rajabalipanah, A. Abdolali. IEEE Trans. Plasma Sci., **45**, 945 (2017).
- [22] S. Barzegar-Parizi, Z. Vafapour, IEEE Transactions Plasma Sci., **50** (12), 5038 (2022). DOI: 10.1109/TPS.2022.3224479
- [23] Я.И. Чижевская, О.Н. Смольникова, С.П. Скобелев. ЖТФ, **91** (2), 326 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.02.50369.191-20