05

Аналитический расчёт плотности тока свободных электронов на низших гармониках ионизирующего эллиптически поляризованного лазерного импульса в присутствии постоянного электрического поля

© А.А. Силаев [1,2] А.А. Романов [1,2], Н.В. Введенский [1,2]

[1] Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия
[2] Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: silaev@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 01.12.2022 г.
В окончательной редакции 19.12.2022 г.
Принята к публикации 28.01.2023 г.

Выведено аналитическое выражение для плотности тока свободных электронов, возбуждаемого в процессе туннельной ионизации газа эллиптически поляризованным импульсом в присутствии постоянного электрического поля. Аналитический расчёт спектральных компонент плотности тока на низших чётных и нечётных гармониках лазерного импульса хорошо согласуется с результатами численного моделирования.

Ключевые слова: лазерный импульс, ионизация, плазма, генерация низших гармоник, детектирование терагерцового и среднего ИК излучения.

DOI: 10.21883/OS.2023.02.55001.13-23

В последнее время большой интерес привлекает генерация низших гармоник (ГНГ) (с энергией фотонов порядка и ниже потенциала ионизации) оптического излучения при взаимодействии лазерных импульсов с различными средами [1]. Интерес к ГНГ связан, главным образом, с возможностью генерации коротких импульсов в ультрафиолетовом диапазоне [1–6]. Кроме этого, интерес к ГНГ связан с задачами, в которых имеет место совместное воздействие на вещество оптического и более низкочастотного излучения. К ним относится детектирование терагерцового (ТГц) или среднего ИК излучения за счёт чётных гармоник пробного лазерного импульса [7,8]. Поскольку амплитуда чётных гармоник линейна по напряженности низкочастотного поля в момент прихода лазерного импульса, зависимости их интенсивностей от времени задержки пробного импульса повторяют временной профиль квадрата низкочастотного поля, а добавление внешнего постоянного поля позволяет восстановить также направление поля [7–9]. В настоящее время данный метод, использующий генерацию второй гармоники пробного импульса за счёт кубической нелинейности, используется для измерения ТГц излучения, в частности, в импульсной ТГц спектроскопии [9–14].

Как было показано в нашей недавней работе [8], использование чётных брюнелевских гармоник (низших гармоник, возникающих в результате возбуждения тока свободных электронов в процессе туннельной ионизации атомов и молекул) обеспечивает существенно более высокую временную разрешающую способность детектирования по сравнению с использованием кубичной (керровской) нелинейности. Это обеспечивается существенно более короткой длительностью импульсов брюнелевских гармоник по сравнению с длительностью лазерного импульса [5,6,8]. Было показано, что сильный шумовой сигнал, возникающий при использовании линейно поляризованных лазерных импульсов и связанный с заселением возбуждённых состояний атомов или молекул, который может превышать интенсивность чётных брюнелевских гармоник, устраняется за счёт использования эллиптически поляризованных лазерных импульсов [8].

В данной работе представлен аналитический подход к исследованию чётных и нечётных брюнелевских гармоник, генерируемых при ионизации газа эллиптически поляризованными импульсами в присутствии постоянного поля. Результаты, даваемые этим подходом, сравниваются с результатами численных расчётов.

Мы предполагаем, что действующее на атомы или молекулы газа электрическое поле состоит из статического поля $\mathbf{E}_{\mathrm{S}}$ и эллиптически поляризованного лазерного импульса с частотой ω_0 в оптическом или ИК диапазоне:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_{\mathrm{S}} + \mathbf{E}_{\mathrm{L}}(t), \quad \mathbf{E}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathbf{x}} E_S, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{L}}(t) = A(t)\mathrm{Re}\left[e^{i\omega_0 t}\hat{\mathbf{e}}\right], \quad \hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{x}} + i\varepsilon\hat{\mathbf{y}}, \tag{2}$$

где ε — эллиптичность, $A(t) = E_0 f(t) \geq 0$ — медленная колоколообразная огибающая с максимумом E_0. Приближение электрического поля детектируемого низкочастотного импульса статическим полем $\mathbf{E}_{\mathrm{S}}$ возможно при достаточно большом периоде детектируемого поля, много большем характерной длительности генерируемых гармоник лазерного импульса. В то же время длительность детектируемого импульса (порядка и менее пикосекунды) гораздо меньше масштаба времени, на котором возможен лавинообразный рост концентрации ионов в результате столкновительной ионизации при давлениях газа порядка одной атмосферы и меньше [15]. Это делает возможным рассматривать большие напряжённости поля $\mathbf{E}_{\rm S}$ вплоть до нескольких MV/cm и выше (но в то же время недостаточные для туннельной ионизации атомов полем $\mathbf{E}_{\rm S}$). Интенсивность лазерного поля $\mathbf{E}_{\rm L}(t)$ предполагается порядка и выше порогового для ионизации газа значения, которое составляет порядка $10^{14}-10^{15}$ W/cm^2 в зависимости от сорта газа и длительности импульса и может быть достигнута как при острой, так и при пологой фокусировке лазерного импульса.

Плотность тока свободных электронов $\mathbf{j}(t)$ находится из решения классических уравнений гидродинамики холодной плазмы с переменным числом частиц:

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}=\frac{e^2N}{m}\mathbf{E},\quad \frac{\partial N}{\partial t}=(N_{\rm g}-N)w(E), \tag{3}$$

с нулевыми начальными условиями при $t\to-\infty$ [16]. Здесь N — плотность свободных электронов, $N_{\rm g}$ — начальная плотность газа, e и m — заряд и масса электрона соответственно, $w(E)$ — вероятность туннельной ионизации в единицу времени в электрическом поле $E=|\mathbf{E}|$.

Для расчёта гармоник плотности тока разложим вероятность ионизации в единицу времени в ряд Тейлора по малой напряженности поля $E_{\rm S}$, предполагая, что эллиптичность ε достаточно мала:

$$w(E)\approx w(|E_{\rm L\mathit{x}}|)+E_{\rm S}w'(|E_{\rm L\mathit{x}}|)\operatorname{sign}[E_{\rm L\mathit{x}}], \tag{4}$$

где $E_{\rm L\mathit{x}}=A\cos\omega_0 t$ — проекция напряженности лазерного поля на ось x, штрих означает производную по аргументу, и предполагается, что $E_{\rm S}\ll 2A/n_1(A)$, где $n_1(A)=w''(A)A/w'(A)$. В силу периодичности лазерного поля $w(E)$ представляется в виде бесконечной суммы квазигармонических составляющих на частотах, кратных частоте лазерного импульса, $w(E)\approx\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}w_k(t)e^{ik\omega_0 t}$. Медленные амплитуды гармоник могут быть определены через $w(E)$ как

$$w_k(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}w[E(t')]e^{-ik\omega_0 t'}dt', \tag{5}$$

где $T=2\pi/\omega_0$ — период поля. Для аналитической оценки $w_k(t)$ будем исходить из того, что w есть резкая функция своего аргумента, и вблизи моментов максимумов/минимумов поля $t=kT/2$, где k – целое, аппроксимируется:

$$w(|E_{\rm L\mathit{x}}|)\approx w(A)e^{n_0(A)[(-1)^k\cos(\omega_0 t)-1]}, \tag{6}$$

$$w'(|E_{\rm L\mathit{x}}|)\approx w'(A)e^{n_1(A)[(-1)^k\cos(\omega_0 t)-1]}, \tag{7}$$

где $n_0(A)=w'(A)A/w(A)$. Используя эти выражения, получаем

$$w_k\approx 2E_{\rm S}w'(A)e^{-n_1}I_k(n_1),\quad \text{нечётное } k, \tag{8}$$

$$w_k\approx 2w(A)e^{-n_0}I_k(n_0),\quad \text{чётное } k. \tag{9}$$

Здесь $I_k(\xi)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, и значения $n_{0,1}$ берутся при аргументе A. В силу резкой зависимости вероятности ионизации от напряженности поля $n_{0,1}\gg 1$, в результате чего можно воспользоваться асимптотикой модифицированной функции Бесселя $I_k(\xi)\approx e^{\xi-k^2/2\xi}/\sqrt{2\pi\xi}$ при $\xi\gg 1$. Таким образом, помимо чётных гармоник, возникающих даже при $E_{\rm S}=0$, в присутствии постоянного поля вероятность ионизации содержит также нечётные гармоники, линейные по $E_{\rm S}$. Концентрация свободных электронов $N(t)$ также представляется в виде квазигармонического ряда, $N(t)\approx\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}N_k(t)e^{ik\omega_0 t}$, где комплексные амплитуды гармоник с номерами $k\geq 1$ равны

$$N_{k\geq 1}\approx -i(N_{\rm g}-N_0)\frac{w_k}{k\omega_0}. \tag{10}$$

Усреднённая по периоду поля концентрация свободных электронов $N_0(t)$ подчиняется уравнению

$$\frac{\partial N_0}{\partial t}=(N_{\rm g}-N_0)w_0(t). \tag{11}$$

При записи (10), (11) предполагается, что период поля T много меньше длительности ионизации τ_i (характерного времени роста N_0), определяемой как $\tau_i=[-N_0'(t_0)/N_0'''(t_0)]^{1/2}$, где t_0 — момент времени, при котором $\partial N_0/\partial t$ достигает максимального значения. В случае, когда финальная степень ионизации мала, $|t_0|\ll\tau$ и $\tau_i\approx\tau/\sqrt{n_0(E_0)}$, где $\tau=[-f(0)/f''(0)]^{1/2}$ — длительность импульса [5,17–19]. Таким образом, длительность ионизации, определяющая длительность брюнелевских гармоник, много меньше длительности лазерного импульса. При больших интенсивностях лазерного импульса, когда степень ионизации большая, $|t_0|$ увеличивается, а длительность ионизации (в случае гауссовой огибающей лазерного импульса) уменьшается [19–21].

Смешение электрического поля с квазигармоническими составляющими концентрации приводит к возникновению квазигармонических составляющих в производной плотности тока:

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\approx\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{F}_k e^{ik\omega_0 t}, \tag{12}$$

$$\mathbf{F}_{k\geq 2}(t)=(e^2/m)[(N_{k-1}\hat{\mathbf{e}}+N_{k+1}\hat{\mathbf{e}}^*)A/2+N_k\mathbf{E}_{\rm S}]. \tag{13}$$

Для чётных k отношение второго слагаемого ($N_k\mathbf{E}_{\rm S}$) в формуле (13) к первому порядка $1/n_0(A)\ll 1$, т.е. пренебрежимо мало. Для нечётных k второе слагаемое в формуле (13) квадратично по E_S, и им также можно пренебречь. В результате получаем

$$\mathbf{F}_{k\geq 2}(t) = (e^2A/m)(C_+\hat{\mathbf{x}} + i\varepsilon C_-\hat{\mathbf{y}}), \tag{14}$$

$$C_\pm = N_{k-1} \pm N_{k+1} = -i\frac{\alpha_k D_\pm}{\omega_0}\frac{\partial N_0}{\partial t}, \tag{15}$$

$$D_\pm = \frac{e^{-(k-1)^2/2n_0}}{k-1} \pm \frac{e^{-(k+1)^2/2-n_0}}{k+1}, \tag{16}$$

$$\alpha_k = \begin{cases} 1, & \text{нечётное } k, \\ n_0(A)E_S/A, & \text{чётное } k. \end{cases} \tag{17}$$

При записи последнего выражения принималось $n_1 \approx n_0$ [5]. При $k \ll 2n_0$,

$$D_+ \approx \frac{2ke^{-k^2/2n_0}}{k^2-1}, \quad D_- \approx \frac{2(k^2/n_0+1)e^{-k^2/2n_0}}{k^2-1}.$$

Из полученных аналитических выражений видно, что генерируемые низшие гармоники обладают эллиптичной поляризацией с запаздыванием по фазе на $\pi/2$ относительно лазерного поля и с эллиптичностью $\varepsilon_{k\geq 2} \approx \varepsilon D_-/D_+$. Заметим, что последнее выражение справедливо при любых (в том числе при сравнимых с единицей) степенях ионизации газа. Таким образом, эллиптичность брюнелевских гармоник (а) меньше эллиптичности лазерных импульсов и (б) монотонно уменьшается с увеличением номера гармоники до $k \approx \sqrt{n_0(E_0)}$ и далее возрастает, асимптотически стремясь к $\varepsilon k/n_0(E_0)$. Амплитуды чётных/нечётных гармоник $\partial\mathbf{j}/\partial t$ при достаточно малых k спадают обратно пропорционально номеру гармоники. При фиксированной пиковой интенсивности лазерного импульса $I = (c/8\pi)(1+\varepsilon^2)E_0^2$ (где c — скорость света в вакууме) амплитуды гармоник максимальны при нулевой эллиптичности и уменьшаются при увеличении ε пропорционально фактору $w(E_0) \approx w(E_{\max})(1 - n_0(E_{\max})\varepsilon^2/2)$, где $E_{\max} = (8\pi I/c)^{1/2}$. Данный фактор определяет максимальную величину скорости роста концентрации $\partial N_0/\partial t$ в формуле (14) для комплексных амплитуд брюнелевских гармоник. Таким образом, характерный масштаб спадания амплитуд гармоник при увеличении эллиптичности есть $\varepsilon \sim 1/\sqrt{n_0(E_{\max})}$.

Для того, чтобы удостовериться в точности полученных аналитических формул, мы проводим их сопоставление с результатами численных расчётов, основанных на решении уравнений (3) для атома гелия. Мы задаём вероятность ионизации атома гелия в единицу времени как

$$w(E) = \alpha\omega_a\,(E_a/E)^\delta \exp\left(-\beta_1 E_a/E - \beta_2 E/E_a\right), \tag{18}$$

где $\omega_a = 4.13\cdot 10^{16}$ s^{-1} и $E_a = 5.14\cdot 10^9$ V/cm - атомные единицы частоты и поля соответственно, $\alpha = 9.2$, $\beta_1 = 1.6$, $\beta_2 = 3.2$, и $\delta = 0.49$ [8,22]. Во всех расчётах $E_S = 500$ kV/cm, длина волны $\lambda = 2\pi c/\omega_0 = 800$ nm, огибающая $f(t) = e^{-t^2/2\tau^2}$ с полной длительностью по

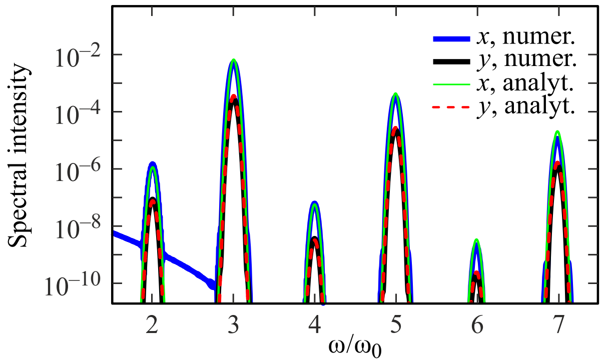

Рис. 1. Квадрат спектра x- и y-компонент $\partial\mathbf{j}/\partial t$, нормированный на N_g^2 (в атомных единицах) при ионизации гелия лазерным импульсом длительностью 50 fs с длиной волны 800 nm, пиковой интенсивностью 10^{15} W/cm^2 и эллиптичностью $\varepsilon = 0.4$ в присутствии статического электрического поля $E_S = 500$ kV/cm. Толстые сплошные линии — численное решение уравнений (3), тонкие сплошная и штриховая линии — аналитическая формула (19) для x- и y-компонент соответственно.

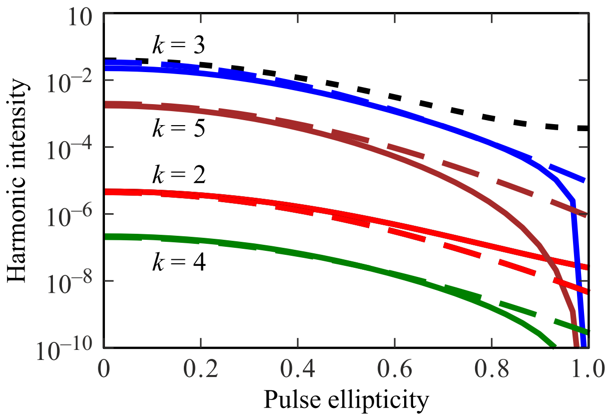

Рис. 2. Спектральная интенсивность $k = 2$ — 5 гармоник $\partial\mathbf{j}/\partial t$, нормированная на N_g^2 (в атомных единицах) от эллиптичности ε лазерного импульса. Сплошные линии — численный расчёт, штриховые линии - аналитическая формула (19). Пунктирной линией показан найденный численно квадрат финальной степени ионизации газа.

уровню интенсивности 1/2 равной $\tau_p = \tau/2\sqrt{\ln 2} = 50$ fs и с пиковой интенсивностью $I = 10^{15}$ W/cm^2.

На рис. 1 показан найденный численно квадрат фурье-спектра x- и y-компонент производной плотности тока, $S_{x,y}(\omega) = |\int(\partial j_{x,y}/\partial t)e^{-i\omega t}dt|^2$ для эллиптичности лазерного импульса $\varepsilon = 0.4$. Полученный результат сравнивается с аналитическим результатом для случая малой степени ионизации:

$$S_{x,y}(\omega > 0) = \frac{j_{\text{osc}}^2 w^2(E_0)\tau^2}{n_0^2}\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_k^2 G_{x,y}e^{-\frac{(\omega-k\omega_0)^2\tau^2}{n_0}}, \tag{19}$$

где $j_{\text{osc}} = e^2N_gE_0/m\omega_0$, $G_x = D_+^2$, $G_y = D_-^2$; $D_\pm$ задаются с использованием (16). Как видно из рис. 1, при данных параметрах аналитическая формула с высокой точностью согласуется с результатами прямого численного расчёта.

На рис. 2 показаны зависимости полных интенсивностей гармоник $S_x(\omega) + S_y(\omega)$ от эллиптичности лазерного импульса ε. Интенсивности гармоник максимальны при нулевой эллиптичности и снижаются при её увеличении приблизительно по такому же закону, как и квадрат финальной степени ионизации $N(\infty)/N_g$ (отмеченный на рисунке пунктирной линией). Найденные численно интенсивности гармоник резко обращаются в ноль при приближении эллиптичности к единице, за исключением интенсивности второй гармоники, которая при $\varepsilon = 1$ примерно на два порядка меньше, чем при $\varepsilon = 0$ (приблизительно такое же отношение наблюдается и для квадрата финальной степени ионизации). Значения интенсивностей гармоник, найденные аналитически с использованием формулы (19), с высокой точностью согласуются с численным расчётом для очень широкого диапазона эллиптичностей. При этом существенные отклонения наблюдаются только при приближении ε к единице. Например, в случае третьей гармоники аналитический и численный расчёты практически точно совпадают при эллиптичности $\varepsilon < 0.9$. Такое же хорошее согласие достигается для второй и пятой гармоник при $\varepsilon < 0.6$ и для четвёртой гармоники при $\varepsilon < 0.8$. Таким образом, разработанная аналитическая модель обладает высокой точностью и может быть использована как для оценки вклада тока свободных электронов в механизмы ГНГ и определения оптимальных режимов ГНГ, так и для разработки и оптимизации методов детектирования ТГц или среднего ИК излучения.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-72-10133).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] W.-H. Xiong, L.-Y. Peng, Q. Gong. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **50** (3), 032001 (2017). DOI: 10.1088/1361-6455/50/3/032001
[2] A. V. F. Zuffi, N. D. V. Junior, R. E. Samad. Phys. Rev. A, **105** (2), 023112 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevA.105.023112
[3] U. Sapaev, A. Husakou, J. Herrmann. Opt. Expr., **21** (21), 25582–25591 (2013). DOI: 10.1364/OE.21.025582
[4] E. E. Serebryannikov, A. M. Zheltikov. Phys. Rev. Lett., **113** (4), 043901 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.113.043901
[5] V. A. Kostin, N. V. Vvedenskii. Phys. Rev. Lett., **120**, 065002 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.065002
[6] В.А. Костин, Н.В. Введенский. Письма в ЖЭТФ, **110** (7), 449–455 (2019). DOI: 10.1134/S0370274X19190044 [V.A. Kostin, N.V. Vvedenskii. JETP Letters, **110** (7), 457–463 (2019). DOI: 10.1134/S0021364019190081].
[7] N. Karpowicz, J. Dai, X. Lu, Y. Chen, M. Yamaguchi, H. Zhao, X.-C. Zhang, L. Zhang, C. Zhang, M. Price-Gallagher et al. Appl. Phys. Lett., **92** (1), 011131 (2008). DOI: 10.1063/1.2828709
[8] A.A. Silaev, A.A. Romanov, N.V. Vvedenskii. Opt. Lett., **47** (18), 4664–4667 (2022). DOI: 10.1364/OL.462916
[9] Y. Tan, H. Zhao, W.-M. Wang, R. Zhang, Y.-J. Zhao, C.-L. Zhang, X.-C. Zhang, L.-L. Zhang. Phys. Rev. Lett., **128** (9), 093902 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevLett.128.093902
[10] E. Matsubara, M. Nagai, M. Ashida. J. Opt. Soc. Am. B, **30** (6), 1627–1630 (2013). DOI: 10.1364/JOSAB.30.001627
[11] F. D.Angelo, Z. Mics, M. Bonn, D. Turchinovich. Opt. Expr., **22** (10), 12475–12485 (2014). DOI: 10.1364/OE.22.012475
[12] V.A. Andreeva, O.G. Kosareva, N.A. Panov, D.E. Shipilo, P.M. Solyankin, M.N. Esaulkov, P. G. de Alaiza Martínez, A.P. Shkurinov, V.A. Makarov, L. Bergé, S. L. Chin. Phys. Rev. Lett., **116** (6), 063902 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.063902
[13] J. Buldt, H. Stark, M. Müller, C. Grebing, C. Jauregui, J. Limpert. Opt. Lett., **46**(20), 5256–5259 (2021). DOI: 10.1364/OL.442374
[14] Z. Fan, C. Lu, Y. Liu. Opt. Commun., **505**, 127532 (2022). DOI: 10.1016/j.optcom.2021.127532
[15] Ю. П. Райзер. *Физика газового разряда* (ИД Интеллект, 2009).
[16] F Brunel. J. Opt. Soc. Am. B, **7** (4), 521–526 (1990). DOI: 10.1364/JOSAB.7.000521
[17] N. V. Vvedenskii, A. I. Korytin, V. A. Kostin, A. A. Murzanev, A. A. Silaev, A. N. Stepanov. Phys. Rev. Lett., **112**(5), 055004 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.055004
[18] V. A. Kostin, I. D. Laryushin, A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii. Phys. Rev. Lett., **117**, 035003 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.035003
[19] А. А. Силаев, В. А. Костин, И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский. Письма в ЖЭТФ, **107** (3), 160–165 (2018). DOI: 10.7868/S0370274X18030037 [A. A. Silaev, V. A. Kostin, I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii. JETP Letters, **107** (3), 151–156 (2018). DOI: 10.1134/S002136401803013X].
[20] A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii. Physics of Plasmas, **22** (5), 053103 (2015). DOI:10.1063/1.4918333
[21] В. А. Костин, И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский. Письма в ЖЭТФ, **112** (2), 81–87 (2020). DOI: 10.31857/S1234567820140037 [V. A. Kostin, I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii. JETP Letters, **112** (2), 77–83 (2020). DOI: 10.1134/S002136402014012X].
[22] X. M. Tong, C. D. Lin. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., **38** (15), 2593 (2005). DOI: 10.1088/0953-4075/38/15/001