

01

Об одном „парадоксе“ в теории рассеяния

© Л.А. Апресян

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: leon_apresyan@mail.ru

Поступило в Редакцию 25 ноября 2022 г.

В окончательной редакции 20 января 2023 г.

Принято к публикации 27 января 2023 г.

Рассмотрено решение „парадокса“ в теории рассеяния, согласно которому сечение экстинкции выражается через амплитуду рассеяния „вперед“ (так называемая „оптическая теорема“), тогда как для точечного источника, и, как следствие, для любого излучателя, находящегося на конечном расстоянии от рассеивателя, аналогичное соотношение часто записывается через рассеянное поле вблизи излучателя, т.е. определяется рассеянием „назад“. Представлена наглядная картина формирования радиационных потерь при переходе энергии от источника к рассеивателю. Показано, что, хотя обратно рассеянное к источнику поле определяет изменение его радиационных характеристик (эффект Перселла), в оптической теореме фигурирует фактор экстинкции, в общем случае связанный с работой падающей волны над индуцированными в рассеивателе токами. Этот фактор переходит в амплитуду рассеяния „вперед“ в предельном случае плоской падающей волны.

Ключевые слова: оптическая теорема, сохранение энергии, эффект Перселла, радиационные потери, точечный источник излучения.

DOI: 10.21883/JTF.2023.03.54843.254-22

Введение

Большинство физических измерений связано в конечном итоге с переходом энергии из одной формы в другую. В теории рассеяния волн или частиц при описании энергетического баланса фундаментальную роль играет так называемая оптическая теорема (см., например, [1–6], а также историю вопроса в [7]; в зарубежной литературе используются также названия „extinction theorem“, „forward scattering theorem“, „optical cross-section theorem“). Согласно этой теореме, сечение экстинкции, т.е. полное сечение ослабления плоской падающей на рассеиватель волны σ_{ext} , равно сумме сечений рассеяния и поглощения, выражается через мнимую часть амплитуды рассеяния в направлении „вперед“ $\text{Im}A(0)$. Такое соотношение является универсальным, т.е. не зависит от структуры рассеивателя. С соответствующими незначительными изменениями оно выполняется для широкого класса волновых задач в оптике [1–3], электродинамике [4], квантовой механике [5], акустике [8], теории упругости [9], сейсмологии [10] и т.д., охватывая как объемные, так и поверхностные [11] волны. Так, в случае электромагнитного поля для плоской падающей волны с единичным вектором поляризации \mathbf{e}_0 скалярная амплитуда $A(0)$ переходит в проекцию соответствующей векторной амплитуды $\mathbf{A}(0)$ на комплексно сопряженное значение \mathbf{e}_0^* , и оптическая теорема принимает вид $\sigma_{\text{ext}} = (4\pi/k_0) \text{Im} \mathbf{e}_0^* \mathbf{A}(0)$, где k_0 — волновое число.

Оптическая теорема переносится и на случай возбуждения поля точечным излучателем, который для некото-

рых специальных постановок был рассмотрен впервые в работе [12]. Описание точечного источника позволяет перейти от обычной формулировки оптической теоремы для плоской падающей волны к случаю произвольной падающей волны, и рассматривать, в частности, переход энергии к рассеивателю от близких к нему распределенных источников излучения. Среди разнообразных обобщений оптической теоремы, описанных во многих десятках работ, этот случай приобрел особое значение в связи с развитием нанооптики и фотоники, где использование оптической теоремы часто связывают с фактором Перселла, описывающим изменения излучения флуоресцирующей молекулы из-за наличия вблизи нее наночастиц [13]. Недавно автором настоящей работы был предложен операторный подход к получению оптической теоремы [14,15], позволяющий существенно упростить ее вывод в общем случае, включая и случай точечного источника.

В литературе часто встречается мнение, что для точечного источника сечение экстинкции выражается через рассеянное поле вблизи источника, т.е. фактически связано с рассеянием в направлении „назад“. Принятие этого тезиса приводит к очевидному „парадоксу“. Действительно, плоскую падающую волну можно рассматривать как предельный частный случай волны, создаваемой бесконечно удаленным точечным источником. Но если бы для излучения точечного источника экстинкция на рассеивателе определялась обратным рассеянием, то переход к бесконечно удаленному источнику не мог бы дать обычную оптическую теорему, связанную с рассеянием „вперед“, поскольку трудно представить

себе ситуацию, когда при простом предельном переходе понятия „назад“ и „вперед“ меняются местами.

Тем не менее указанное ошибочное мнение имеет достаточно широкое распространение. Так, в русском переводе известной монографии по нанооптике [13] при обсуждении рассеяния излучения, созданного точечным дипольным источником, содержится утверждение: „Согласно оптической теореме, мощность релаксации (сумма рассеянной и поглощенной мощностей) может быть выражена через рассеянное назад поле“ ([13]). Эта формулировка неверна и очевидным образом противоречит обычной форме оптической теоремы, в которой фигурирует амплитуда рассеяния „вперед“. Сравнение с оригиналом показывает, что в английском тексте приведена правильная формулировка оптической теоремы. Однако этот „подправленный“ переводчиком фрагмент вряд ли можно отнести к случайности. Видимо, переводчик имел в виду действительно связанный с обратным рассеянием случай точечного источника, который далее рассматривался в [13] в связи с фактором Перселла, и отождествил этот случай с оптической теоремой, характеризующей рассеиватель.

Если указанный пример еще можно отнести к терминологической путанице, то имеются работы, в которых предпринимались попытки непосредственно „объяснить“ оптическую теорему обратным рассеянием. В случае плоской падающей волны в качестве примера такого рода можно указать работу [16], в которой для рассеяния на идеально проводящей сфере оптическая теорема связывалась с обратным рассеянием. В ней, чтобы подчеркнуть радикальное отличие от обычной трактовки „forward scattering theorem“, был даже введен термин „backward scattering theorem“. Этот вывод подвергся критике в работе [17], где подчеркивались формальный характер рассуждений [16] и обоснованность традиционного подхода.

В случае точечного источника указанный ошибочный тезис об определяющей роли обратного рассеяния развивался также в работе [18]. В ней делалась попытка использовать оптическую теорему для точечного источника для объяснения физики эффекта Перселла в рамках теории Уиллера–Фейнмана [19]. При этом, несмотря на правильное описание балансов энергетических потоков, оптическая теорема для точечного источника формулировалась в [18] как $\sigma_{\text{ext}} = (4\pi/k_0) \text{Im} \mathbf{e}_{sc}^* \mathbf{p}$, где \mathbf{e}_{sc} — вектор поляризации рассеянной назад волны, а \mathbf{p} — дипольный момент источника, т. е. сечение экстинкции σ_{ext} выражалось через рассеянное обратно к источнику поле. Это соотношение неверно и противоречит результатам работ [12,14,15] для поля точечного источника. Отсутствие в литературе объяснения такого противоречия может поставить в тупик недостаточно подготовленного читателя. Целью данных методических заметок является прояснение этого вопроса.

В разд. 1 описаны локальные законы сохранения энергии, связанные с разделением полного поля на поле падающей и рассеянной волн. Здесь в отличие

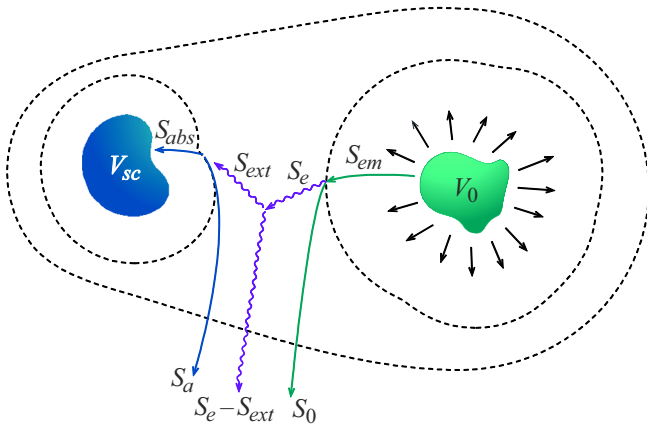
от традиционных подходов акцентируется внимание на разделении источников излучения (токов) на заданные *a priori* и вторичные, т. е. индуцированные в рассеивателе. Изложение ведется на примере простого скалярного волнового уравнения. Это позволяет упростить обозначения и отвлечься от несущественных для рассматриваемой задачи деталей. Окончательные балансовые соотношения сохраняются без изменений и для электромагнитной задачи, включая случай анизотропных, а также бианизотропных рассеивателей (см. замечания и ссылки, приведенные ниже). В разд. 2 рассмотрен переход от локальных к интегральным законам сохранения. Этот раздел расширяет результаты работ [18,20] по энергетическому балансу для электромагнитной задачи, давая наглядное описание потоков мощности и формирования радиационных потерь на более простом примере скалярного поля. В разд. 3 дается сравнение различных подходов к оптической теореме для точечного источника. В Заключении формулируются основные выводы, выявляющие причины возникновения указанного „парадокса“, и позволяющие в дальнейшем избежать подобных ошибок.

1. Локальные законы сохранения энергии в задаче рассеяния

Вышеназванный „парадокс“ связан с некорректной трактовкой условий энергетического баланса в задаче рассеяния. Приведем краткий вывод этих условий, используя модель скалярного волнового поля.

Рассмотрим рассеяние монохроматического поля (множитель $e^{-i\omega t}$, где ω — угловая частота, а t — время, всюду опускается) с комплексной амплитудой $u_t = u_t(\mathbf{r})$ на расположенном в свободном пространстве и ограниченным конечным объемом V_{sc} рассеивателе с эффективным рассеивающим потенциалом $v = v(\mathbf{r})$. В электродинамических задачах при описании рассеяния на неоднородностях диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\mathbf{r})$ в качестве v обычно выступает величина $-k_0^2 \delta\varepsilon(\mathbf{r})$, где $\delta\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}) - 1$ — отличие $\varepsilon(\mathbf{r})$ от диэлектрической проницаемости среды (см., например, [4]).

Будем считать, что поле создается заданным распределенным источниками (токов) $q_0 = q_0(\mathbf{r})$, занимающих конечный объем V_0 и расположенных вне объема рассеивателя V_{sc} , так, что $q_0(\mathbf{r})v(\mathbf{r}) \equiv 0$ (см. рисунок). Случай точечного источника отвечает „стягиванию“ $q_0(\mathbf{r})$ к дельта-функции, локализованной в некоторой точке \mathbf{r}_0 , $q_0(\mathbf{r}) \sim \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Полное поле u_t в рассматриваемом случае выражается в виде суммы $u_t = u_0 + u_s$, поля падающей $u_0 \equiv G_0 q_0$ и рассеянной $u_s \equiv G_0 v u_t$ волн, где $G_0 = (\Delta + k_0^2)^{-1}$ — оператор Грина для свободного распространения, отвечающий скалярному волновому уравнению (явный вид оператора G_0 и соответствующих интегральных выражений для u_0 и u_s приведен, например, в [14]).



Баланс потоков энергии в задаче рассеяния. Сплошные линии изображают „энергетические“, волнистые — „интерференционные“ потоки энергии.

Из определения $u_s = G_0 v u_t$ видно, что рассеянную волну можно рассматривать, как создаваемую индуцированным источником $q_s \equiv v u_t$, т.е. $u_s = G_0 q_s$. При этом полное поле представляется как $u_t = G_0 q_t$, где полный источник отвечает сумме заданного q_0 и индуцированного q_s источников, $q_t = q_0 + q_s$. Каждое из полей u_t, u_0 и u_s удовлетворяет одинаковому волновому уравнению вида $(\Delta + k_0^2)u = q$, но с разными источниками q_t, q_0 и q_s , и, вообще говоря, с разными граничными условиями, обеспечивающими единственность решения задачи.

В соответствии с разбиением полного поля на падающую и рассеянную волны, $u_t = u_0 + u_s$, квадратичный по полю средний по времени вектор плотности потока энергии

$$s_t \equiv \text{Im}(u_t^* \nabla u_t) = \text{Im}[(u_0 + u_s)^* \nabla (u_0 + u_s)]$$

представляется как сумма трех потоков:

$$s_t = s_0 + s_s + s_e. \tag{1}$$

Здесь $s_0 = \text{Im}(u_0^* \nabla u_0)$ и $s_s = \text{Im}(u_s^* \nabla u_s)$ отвечают падающей u_0 и рассеянной u_s волнам в отдельности, а вектор $s_e = \text{Im}(u_0^* \nabla u_s + u_s^* \nabla u_0)$ можно назвать интерференционным потоком. Этот вектор не имеет самостоятельного энергетического смысла и связан с перекрытием падающей u_0 и рассеянной u_s волн. Отметим также, что непосредственно измеряемой величиной в рассматриваемой задаче является лишь поток s_t , связанный с полным наблюдаемым полем u_t , тогда как „парциальные потоки“ s_0, s_s и s_e играют вспомогательную роль.

Каждый из потоков s_t, s_0 и s_s отвечает соответственно полям u_t, u_0 и u_s источникам q_t, q_0 и q_s и удовлетворяет вытекающим из волнового уравнения локальным законам сохранения энергии

$$\nabla s_j = w_j, \tag{2}$$

где $j = t, 0, s$. Стоящие здесь справа величины

$$w_j = \text{Im}(u_j^* q_j) \tag{3}$$

имеют смысл локальных значений мощностей, описывающих обмен энергией между соответствующими полями u_j и источниками q_j . Эти величины могут быть как положительными, так и отрицательными, что отвечает наличию либо источников, либо стоков энергии поля (последнее имеет место в случае поглощающего рассеивателя). Далее все источники q_j рассматриваются как заданные, хотя нахождение явного вида q_s и q_t требует решения задачи рассеяния.

Из (1)–(3) следует, что плотность интерференционного потока $s_e = s_t - s_s - s_0$ также удовлетворяет уравнению (2), но уже с другой формой правой части

$$w_e = \text{Im}(u_0^* q_s + u_s^* q_0). \tag{4}$$

При этом полная мощность w_j в каждой точке пространства представляется в виде суммы

$$w_t = w_0 + w_s + w_e, \tag{5}$$

где каждая из величин w_j отвечает соответствующему потоку s_j из (1). Таким образом, все плотности средних по времени потоков s_j ($j = 0, s, t, e$) удовлетворяют одинаковым по форме законам сохранения (2), но с разными значениями объемных „источников потоков“ w_j . Локальные условия сохранения (2) содержат в себе всю физику энергетического баланса.

Для потоков энергии s_t, s_0 и s_s выполнение локальных законов сохранения (2) представляется физически очевидным, поскольку они отражают порождение (либо сток) дивергенции соответствующих потоков в каждой точке, где совершается работа источников (q_t, q_0 и q_s) над соответствующей выделенной частью поля (u_t, u_0 и u_s). В случае интерференционного потока s_e выполнение (2) выглядит менее тривиальным, так как поток s_e не имеет непосредственно энергетического смысла. Соответствующая ему „интерференционная мощность“ оказывается распределенной между источником q_0 и рассеивателем q_s . При этом, согласно (3), для потока s_0 источник w_0 сосредоточен в области V_0 источника поля q_0 , источник w_s потока s_s — внутри рассеивателя в области V_{sc} , тогда как для s_t и s_e соответствующие источники w_t и w_e , согласно (4) и (5), отличны от нуля как внутри источника (в области V_0), так и внутри рассеивателя (в области V_{sc}).

Локальные законы сохранения вида (1) и (2) сохраняются и для электромагнитной задачи. В этом случае поток энергии выражается вектором Пойнтинга $s = \frac{1}{2} \text{Re} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$, а скалярное поле u переходит в вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} , $u = \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}$ [15,20,21], который для бианизотропного рассеивателя дополняется напряженностью магнитного поля \mathbf{H} , $u = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$ [22]. При этом вместо исходного скалярного волнового уравнения используются уравнения Максвелла. Явный вид источников w_j для электромагнитной задачи (без введения индуцированных токов) приведен в работе [20].

2. Интегральные законы сохранения и оптическая теорема

Интегрируя локальные законы сохранения (2) по произвольному объему V и используя теорему Гаусса–Остроградского, нетрудно получить различные интегральные формы балансовых уравнений. Такие уравнения связывают полные потоки энергии, вытекающие наружу через поверхность ΣV объема V с работой источников W внутри V :

$$S_j \equiv \oint_{\Sigma V} \mathbf{s}_j d\Sigma = \int_V \nabla \mathbf{s}_j dr = \int_V w_j dr \equiv W_j \quad (6)$$

(здесь $j = t, 0, s, e$). При этом отрицательные значения интегральных потоков S_j будут отвечать преобладанию средних по времени локальных значений потоков втекающих внутрь V через поверхность ΣV . Соответствующие отрицательные величины мощностей W_j описывают работу поля, совершаемую над источниками внутри объема V , т. е. потери, энергии поля („стоки“).

Отсюда вытекают очевидные следствия. Если рассматриваемый объем V не содержит источников w_j , то отвечающий мощностям w_j полный поток энергии S_j через поверхность V будет равен нулю, т. е. входящий внутрь V поток равен выходящему. Если объем V полностью охватывает источники w_j , то дальнейшее увеличение V не меняет полного потока S_j через поверхность V до тех пор, пока это увеличение не затронет другие источники или стоки энергии.

Интегрирование обеих частей (2) по произвольному объему V в соответствии с левой частью (6) дает

$$S_t = S_0 + S_s + S_e. \quad (7)$$

Здесь каждый из полных потоков S_j выражается в виде соответствующих правой части (6) мощностей W_j , причем

$$W_t = W_0 + W_s + W_e. \quad (8)$$

Согласно (6), соотношения (7) и (8) формально эквивалентны. Однако они акцентируют внимание на разных физических сторонах задачи. Равенство (7) относится к потокам, распространяющимся в пространстве, тогда как (8) связывает мощности W_j , определяемые локальными плотностями w_j . Последние отвечают взаимодействию поля с заданными или индуцированными источниками в определенных точках пространства.

Выбирая для (7) и (8) разные объемы интегрирования, нетрудно получить результаты работ [18,20], связанные с условиями энергетического баланса. Рассмотрим такой подход более подробно.

2.1. Радиационные потери

Если из произвольного большого объема V , содержащего источники вместе с рассеивателем, вычлечь объемы источников и рассеивателя, т. е. рассмотреть

$V_1 = V/(V_0 \cup V_{sc})$ (внутри V_1 все мощности $w_j = 0$, т. е. отсутствует диссипация или приток энергии поля), то полный поток S_t через поверхность V_1 обращается в нуль, $S_t = 0$. При этом поверхность V_1 состоит из внешней поверхности ΣV объема V и двух внутренних поверхностей V_0 и V_{sc} , нормали к которым противоположны нормальям к поверхностям V_0 и V_{sc} . С учетом этого условие $S_t = 0$ принимает вид

$$S_t = \oint_{\Sigma V} \mathbf{s}_t d\Sigma - \oint_{\Sigma V_0} \mathbf{s}_t d\Sigma - \oint_{\Sigma V_{sc}} \mathbf{s}_t d\Sigma = 0,$$

так что

$$\oint_{\Sigma V} \mathbf{s}_t d\Sigma = \oint_{\Sigma V_0} \mathbf{s}_t d\Sigma + \oint_{\Sigma V_{sc}} \mathbf{s}_t d\Sigma. \quad (9a)$$

Это условие приводит к физически очевидному закону сохранения энергии, связывающему полные потоки излучаемой S_{em} и поглощаемой S_{abs} мощностей с потоком радиационных потерь S_{rad} . Запишем это условие для случая поглощающего рассеивателя как:

$$S_{rad} = S_{em} - S_{abs}. \quad (9b)$$

Здесь уходящий на бесконечность поток радиационных потерь S_{rad} , поток излучения источников S_{em} и поглощаемый рассеивателем поток S_{abs} выражаются как

$$S_{rad} = \oint_{\Sigma V} \mathbf{s}_t d\Sigma, \quad S_{em} = \oint_{\Sigma V_0} \mathbf{s}_t d\Sigma, \quad S_{abs} = - \oint_{\Sigma V_{sc}} \mathbf{s}_t d\Sigma. \quad (10)$$

Знак „минус“ в определении S_{abs} соответствует потоку, приходящему к рассеивателю, так что при наличии поглощения $S_{abs} > 0$. Соответствующая S_{abs} поглощаемая рассеивателем мощность есть

$$W_{abs} \equiv - \oint_{V_{sc}} \text{Im}(u_i^* q_s) dr. \quad (11)$$

Соотношение (9) можно рассматривать как условие аддитивности отвечающих \mathbf{s}_t полных потоков, выходящих из объемов V_0 и V_{sc} , которые просто складываются на охватывающей эти объемы поверхности. Оно выполняется также, если заменить в (9a) поток \mathbf{s}_t на любой из парциальных потоков $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_s$ или \mathbf{s}_e , поскольку внутри V_1 отсутствуют также и источники каждого из них. При замене в (9a) \mathbf{s}_t на \mathbf{s}_0 обращается в нуль интеграл по поверхности ΣV_{sc} , внутри которой нет источников w_0 , отвечающих \mathbf{s}_0 , так что (9a) принимает вид

$$\oint_{\Sigma V} \mathbf{s}_0 d\Sigma = \oint_{\Sigma V_0} \mathbf{s}_0 d\Sigma.$$

Это соотношение выражает физически очевидное условие сохранения создаваемого заданными источниками q_0 полного потока при распространении излучения от

поверхности ΣV_0 к любой охватывающей V_0 поверхности ΣV в свободном пространстве. Аналогичное соотношение справедливо и для потока рассеянного излучения s_s .

Подстановка в (9а) s_e дает менее очевидное, чем закон сохранения энергии (9б), условие аддитивности для интерференционных потоков

$$\oint_{\Sigma V} s_e d\Sigma = \oint_{\Sigma V_0} s_e d\Sigma + \oint_{\Sigma V_{sc}} s_e d\Sigma, \quad (12)$$

которое выполняется для любого объема V , содержащего как источники (т.е. объем V_0), так и рассеиватель (объем V_{sc}). В случае поглощающего рассеивателя, играющего роль стока, второе слагаемое в (12) естественно брать со знаком минус, введя втекающий к рассеивателю поток экстинкции (см. разд. 2.2).

Из (12) следует, что вдали от рассеивателя и источника полный интерференционный поток равен простой сумме аналогичных потоков от заданных и индуцированных источников. Этот поток, как и полный поток S_{rad} , остается неизменным при увеличении объема V , т.е. при удалении на произвольные расстояния от рассматриваемой системы. При этом соотношения (9а) и (12) выполняются также и для полей в ближней зоне, когда выбранная поверхность V приближается к поверхности источника V_0 или рассеивателя V_{sc} .

2.2. Рассеиватель и оптическая теорема

Для произвольного объема V , охватывающего только рассеиватель, но не источники ($V_{sc} \subset V$, но $V_0 \not\subset V$, так что $q_0 = 0$ внутри V) в (7) и (8) $W_0 = S_0 = 0$. При таком выборе V в случае поглощающего рассеивателя полный вытекающий поток S_t равен со знаком минус потоку поглощаемой энергии S_{abs} (10). Введем обозначения

$$S_{ext} \equiv -S_e = -\oint_{\Sigma V} s_e d\Sigma, \quad W_{ext} \equiv -W_e = -\int_{V_{sc}} \text{Im}(u_0^* q_s) dr \quad (13)$$

для втекающего в V_{sc} потока экстинкции и соответствующей мощности. В результате из (7) и (8) получаем

$$W_{ext} = W_s + W_{abs}, \quad S_{ext} = S_s + S_{abs}. \quad (14)$$

Здесь мощность и поток рассеянного поля выражаются как

$$W_s = \int_{V_{sc}} \text{Im}(u_s^* q_s) dr, \quad S_s = \oint_{\Sigma V} s_s d\Sigma. \quad (15)$$

Соотношения (14) эквивалентны оптической теореме, выражающей мощность экстинкции в виде суммы мощностей поглощения и рассеяния, которую можно также выразить через потоки. При этом в литературе термин „оптическая теорема“ часто используется непосредственно применительно к балансовым соотношениям (14) без перехода к амплитуде рассеяния.

В последнее время оптическая теорема в виде интегральных соотношений (14) нашла широкие применения при получении фундаментальных физических границ поглощения и рассеяния (см., например, [22–24], а также цитированную там литературу).

Заметим, что оптическая теорема (14) для мощностей непосредственно вытекает также из представлений W_{abs} , W_{ext} и W_s в виде (11), (13) и (15) и представления поля в виде суммы падающей и рассеянной волн: $u_t = u_0 + u_s$. Такая обобщенная форма оптической теоремы справедлива и для случая ближних полей, когда рассматриваемый объем V приближается к рассеивающему объему V_{sc} .

2.3. Излучение источника и фактор усиления

Другой выбор V , также рассмотренный в [18,20], связан с описанием эффекта Перселла, описывающего влияние наличия рассеивающего объекта на мощность излучения заданных токов q_0 . В качестве V при этом выбирается объем, охватывающий лишь область V_0 источника q_0 , но не охватывающий рассеиватель. Тогда $q_s = 0$ внутри V и в (7) и (8) обращаются в нуль слагаемые, соответствующие рассеивателю, $W_s = S_s = 0$. При этом (7) и (8) принимают вид

$$W_{em} \equiv \int_{V_0} \text{Im}(u_t^* q_0) dr = W_0 + W_e, \quad S_{em} \equiv \oint_{\Sigma V} s_t d\Sigma = S_0 + S_e. \quad (16)$$

Здесь введено обозначение W_{em} для мощности излучения источника, уходящей от него через поверхность V_0 . При этом в (16) величины

$$W_0 = \int_{V_0} w_0 dr = \int_{V_0} \text{Im}(u_0^* q_0) dr, \quad S_0 = \oint_{\Sigma V} s_0 d\Sigma \quad (17)$$

соответствуют излучению источника q_0 в отсутствие рассеивателя. Последние слагаемые в (16) описывают интерференцию и равны

$$W_e = \int_{V_0} w_e dr = \int_{V_0} \text{Im}(u_s^* q_0) dr, \quad S_e = \oint_{\Sigma V} s_e d\Sigma. \quad (18)$$

Интерференционная мощность W_e описывает изменение мощности излучения заданного источника W_{em} из-за наличия рассеивателя, т.е. представляет эффект Перселла. Выражение W_e (18) обычно связывают с фактором усиления, хотя наличие рассеивателя может приводить и к уменьшению мощности радиационных потерь за счет поглощения энергии рассеивателем. В выражении (16) для излучаемого потока S_{em} потоки S_0 и S_e сохраняются, т.е. не зависят от выбора объема V , охватывающего источник, но не затрагивающего рассеиватель. Заметим, что в соответствии с введенными определениями

уходящий на бесконечность интерференционный поток, стоящий в правой части (12), записывается как $S_e - S_{\text{ext}}$.

На рисунке проиллюстрирована общая картина баланса потоков энергии в задаче рассеяния. Этот рисунок аналогичен приведенным в работах [18,20], где рассматривались мощности W_j для электромагнитной задачи. В отличие от них рисунок дает более детальную картину формирования потоков S_j и позволяет лучше представить динамику процесса рассеяния.

Показанный на рисунке баланс потоков можно описать следующим образом. Источник q_0 в среднем по времени создает полный поток мощности S_{em} , уходящей от него через произвольную охватывающую источник (но не рассеиватель) поверхность. Этот поток делится на радиационный поток S_0 , который „не замечает“ рассеивателя и уходит на бесконечность, и связанный с рассеянным полем интерференционный поток S_e , так как, согласно (16), $S_{em} = S_0 + S_e$. Часть интерференционного потока S_e , равная потоку экстинкции S_{ext} , взаимодействует с рассеивателем, частично поглощаясь в нем в виде мощности поглощенного потока S_{abs} и частично уходя на бесконечность в виде рассеянного частицей поля S_s , причем в соответствии с оптической теоремой (14), $S_{\text{ext}} = S_s + S_{abs}$. Наконец, оставшаяся часть $S_e - S_{\text{ext}}$ интерференционного потока в соответствии с (12) уходит на бесконечность, так что полные радиационные потери (9а) есть $S_{\text{rad}} = S_{em} - S_{abs} = S_0 + S_s + S_e - S_{\text{ext}}$.

Изображенная на рисунке картина довольно условна, поскольку речь здесь идет не о локальных, а о полных потоках, усредненных по времени и проинтегрированных по поверхностям. Кроме того, поскольку интерференционные потоки не имеют самостоятельного энергетического смысла, величина S_{ext} может превышать S_e , так что отвечающий (12) поток $S_e - S_{\text{ext}}$ может быть отрицательным.

В описанной картине баланса энергий имеется новый элемент, на который не обращалось внимания ранее в литературе. А именно, в ней в качестве потока энергии, возбуждающего рассеиватель, фигурирует не полный средний поток, падающий на частицу (который, согласно (10), равен поглощенному потоку S_{abs}), как можно было ожидать *a priori*, а поток экстинкции, как часть интерференционного потока. При этом источник экстинкции W_{ext} , в соответствии с (13), обусловлен работой падающей волны u_0 над наведенными ей в рассеивателе токами q_s . В этом состоит физический смысл оптической теоремы, описывающей полные потери энергии падающей волны из-за рассеяния и поглощения в рассеивателе.

Выражения, эквивалентные соотношению (16) для мощности W_{em} с W_e (18), использовались в монографии [13], как и во множестве других работ, при описании эффекта Перселла. В выражении (18) для фактора усиления W_e фигурирует величина $u_s^* q_0$, содержащая рассеянное поле u_s в точках источника q_0 , т.е. определяемая рассеянием „назад“ к источнику. Однако если

оптическая теорема (14) относится к свойствам рассеивателя, то балансовое соотношение (16) относится к источникам q_0 и не зависит непосредственно от оптической теоремы.

3. Оптическая теорема и фактор усиления

Указанная во Введении ошибочная трактовка оптической теоремы для случая точечного источника [18] вызвана неверным отождествлением оптической теоремы с условием баланса (16), относящимся не к рассеивателю, а к источнику излучения. Остановимся на этом случае более подробно, поскольку специфичность оптической теоремы для точечного источника может приводить к трудностям при использовании.

Обобщение оптической теоремы на случай точечного источника, как отмечалось выше, впервые было получено для частного случая и в довольно громоздком виде в работе [12]. Оно вытекает также из общей операторной формы обобщенной оптической теоремы, предложенной в [14,15]. Сравним результаты операторного подхода [14,15] с результатами [12], при этом, следуя [14], рассмотрим случай произвольной формы падающей волны u_0 , которая, в частности, может отвечать точечному источнику излучения.

Чтобы упростить такое сравнение, воспользуемся сокращенными операторными обозначениями, более подробно описанными в [14,15] (см. также Приложение Е из работы [21]). Эти обозначения вполне аналогичны используемым в квантовой механике сокращениям: для вектора, отвечающего полю $u \equiv |u\rangle$ эрмитово сопряженный вектор $u^+ = \langle u|$, так что скалярное произведение векторов $|a\rangle$ и $|b\rangle$ записывается как $\langle a|b\rangle = a^+ b$, для операторов A и B эрмитово сопряжение дает $(AB)^+ = B^+ A^+$, причем $(Au)^+ = u^+ A^+$.

В этих обозначениях входящая в оптическую теорему мощность экстинкции (13) выражается как

$$W_{\text{ext}} = -\text{Im} \int (u_0^* q_s) dr \equiv -\text{Im} u_0^+ q_s \equiv -\text{Im} q_0^+ G_0^+ q_s. \quad (19)$$

Здесь учтено соотношение $u_0 = G_0 q_0$, так что $u_0^+ = q_0^+ G_0^+$, причем формально неограниченное интегрирование фактически выполняется по объему рассеивателя V_{sc} , где отличен от нуля источник q_s .

В правую часть (19) входит величина $G_0^+ q_s$, которая отличается от рассеянного поля $u_s = G_0 q_s$ наличием знака эрмитового сопряжения у G_0 . Вместе с тем в работе [12] приведенное аналогичное выражение для мощности экстинкции содержало рассеянное поле u_s . Для сравнения с результатами [15] выделим в (13) часть, содержащую рассеянное поле. С этой целью запишем W_{ext} (13) в виде

$$W_{\text{ext}} = -\text{Im} q_0^+ (u_s + (G_0^+ - G_0) q_s). \quad (20)$$

Это выражение помимо рассеянного поля u_s , отвечающего обратному рассеянию к источнику q_0 , содержит также интегральное слагаемое, связанное с индуцированным источником q_s . Эквивалентное слагаемое ввело в [12] при описании поля точечного источника с помощью некоторой вспомогательной функции (так называемый „spherical far-field pattern generator“ [12]). Наличие в (20) дополнительного интегрального члена усложняет физическую трактовку и использование оптической теоремы для точечного источника. Фактически допущенная в [18] ошибка при формулировке оптической теоремы для точечного источника эквивалентна отбрасыванию в (20) слагаемого, содержащего q_s . Такое отбрасывание эквивалентно отождествлению фактора экстинкции W_{ext} (20) с фактором усиления W_e (18).

Выражение (20) с выделенным полем обратного рассеяния выглядит как некоторое усложнение формулы (19). Такое выделение представляется излишним, поскольку оно одновременно затрудняет правильную физическую трактовку оптической теоремы. Действительно, соотношение (19) можно трактовать как работу падающей волны u_0 над индуцированными источниками q_s . Эта работа не совпадает с работой обратного рассеянного поля u_s над заданным источником q_0 , отвечающей выражению для фактора усиления W_e (18).

Заключение

В работе прослежены причины и дано наглядное опровержение распространенного заблуждения о том, что полное ослабление (экстинкция) падающего на рассеиватель излучения в случае точечного источника определяется обратным рассеянием, т. е. полем, рассеянным к источнику. Показано, что причиной экстинкции является не обратное рассеяние, а взаимодействие падающей волны с вторичными токами, возбуждаемыми ею в рассеивателе. В соответствии с разделением поля на падающую и рассеянную волну построена интуитивно понятная схема балансов средних потоков мощности, описывающая обмен энергией между источниками поля и рассеивателем с учетом радиационных потерь. Эта схема детализирует известные из литературы результаты по энергетическому балансу [18,20], акцентируя внимание на интерференционном характере возбуждения рассеивателя и позволяя тем самым избежать ошибок при использовании оптической теоремы и других аналогичных соотношений, связанных с описанием обмена энергией между полем и материей в задачах теории рассеяния.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] C.F. Bohren, D.R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles* (Wiley, NY, 1998)
- [2] M. Born, E. Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light* (7th expanded ed., Cambridge, 1999)
- [3] H.C. Van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles* (Wiley, NY, 1957)
- [4] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics* (3rd edition, Wiley, NY, 1999)
- [5] J.R. Taylor. *Scattering Theory: The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions* (Wiley, NY, 1972)
- [6] K. Wapenaar, H. Douma. *J. Ac. Soc. Am.*, **131** (5), 3611 (2012). DOI: 10.1121/1.3701880
- [7] R.G. Newton. *Am. J. Phys.*, **44**, 639 (1976). DOI: 10.1119/1.10324
- [8] L. Zhang. *J. Ac. Soc. Am.*, **145** (3), EL185 (2019). DOI: 10.1121/1.5092581
- [9] J. Leao-Neto, J.H. Lopes, G.T. Silva. *J. Appl. Phys.*, **121** (14), 144902 (2017). DOI: 10.1063/1.4980040
- [10] R. Snieder, K. van Wijk, M. Haney, R. Calvert. *Phys. Rev. E*, **78** (3), 036606 (2008). DOI: 10.1103/physreve.78.036606
- [11] D. Halliday, A. Curtis. *Phys. Rev. E*, **79** (5), 056603 (2009). DOI: 10.1103/physreve.79.056603
- [12] C. Athanasiadis, P.A. Martin, A. Spyropoulos, I.G. Stratis. *J. Math. Phys.*, **43** (11), 5683 (2002). DOI: 10.1063/1.1509089
- [13] Л. Новотный, Б. Хехт. *Основы нанооптики* (Физматлит, М., 2009)
- [14] Л.А. Апресян. *J. Ac. Soc. Am.*, **150**, 2024 (2021). DOI: 10.1121/10.0005915
- [15] Л.А. Апресян. *ЖТФ*, **92** (10), 1497 (2022). DOI: 10.21883/JTF.2022.10.53241.89-22
- [16] C.-T. Tai. *J. Electromagn. Waves Appl.*, **16** (5), 597 (2002). DOI: 10.1163/156939302x01056
- [17] J.A. Grzesik. *Progr. Electromagn. Res.*, **40**, 255 (2003). DOI: 10.2528/pier02120601
- [18] M. Venkatapathi. *J.Q.S.R.T.*, **113** (13), 1705 (2012). DOI: 10.1016/j.jqsrt.2012.04.019
- [19] J.A. Wheeler, R.P. Feynman. *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 157 (1945). DOI: 10.1103/RevModPhys.17.157
- [20] A.E. Moskalensky, M.A. Yurkin. *Phys. Rev. A*, **99**, 053824 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.99.053824
- [21] A.E. Moskalensky, M.A. Yurkin. *Rev. Phys.*, **6**, 100047 (2021). DOI: 10.1016/j.revip.2020.100047
- [22] Y. Ivanenko, M. Gustafsson, S. Nordebo. *Opt. Express*, **27**, 34323 (2019). DOI: 10.1364/OE.27.0347323
- [23] S. Molesky, P. Chao, W. Jin, A.W. Rodriguez. *Phys. Rev. Res.*, **2**, 033172 (2020). DOI: 10.1103/physrevresearch.2.033172
- [24] P. Chao, B. Strekha, R. Kuate Defo, S. Molesky, A.W. Rodriguez. *Nature Rev. Phys.*, **4**, 543 (2022). DOI: 10.1038/NATURE.398715