

01

## Развитие и обобщение метода отражений в задачах электростатики и теплопроводности плоскостойких сред

© А.Б. Петрин

Объединенный институт высоких температур РАН,  
125412 Москва, Россия  
e-mail: petrin@ihed.ras.ru, a\_petrin@mail.ru

Поступило в Редакцию 22 ноября 2022 г.  
В окончательной редакции 14 января 2023 г.  
Принято к публикации 16 января 2023 г.

Сформулирован метод зеркальных отражений электростатики для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостойкой средой, состоящей из одной пленки на диэлектрическом полупространстве. Метод обобщен на случай произвольной системы зарядов. Предложенный подход применен к математически аналогичным задачам электростатики и стационарной теплопроводности плоскостойких сред. В частности, рассмотрены задачи нахождения распределений электростатического потенциала вокруг проводящей сферы, эллипсоида вращения и тела каплевидной формы, расположенных вблизи диэлектрической пленки на диэлектрическом полупространстве. Показано, как применить результаты, полученные для электростатических задач, к аналогичным задачам нахождения распределения температур равномерно нагретых тел той же геометрии, расположенных вблизи теплопроводящей пленки на теплопроводящем полупространстве.

**Ключевые слова:** плоскостойкая среда, метод зеркальных отражений, электростатика, теплопроводность.

DOI: 10.21883/JTF.2023.03.54842.251-22

### Введение

Во многих современных технических приложениях возникает необходимость анализа электромагнитных полей и теплообмена в плоскостойких структурах. В задачах теплопроводности в плоскостойких средах используется матричный метод [1–4], который, как правило, применяется для решения двумерных задач. Подобные матричные методы успешно применяются при решении задач, связанных с излучением и распространением электромагнитных волн в плоскостойких средах [5]. В работе [6] был предложен являющийся развитием работ [7,8] оригинальный вариант строгой электромагнитной теории излучения элементарного диполя, расположенного на границе или внутри плоскостойкой структуры. В частности, в [6] был описан метод аналитического упрощения решения, имеющий потенциально важное общетеоретическое значение. Обобщение данного метода для случая произвольного количества пленок в плоскостойкой структуре позволило привести формулы для излучаемых полей к одномерным интегралам, что существенно упростило анализ задачи и ускорило численные расчеты. Так, в [9] развитые математические подходы были применены к нахождению трехмерного фундаментального решения электростатики (квазиэлектростатики) в плоскостойких средах, т. е. к нахождению поля точечного заряда в плоскостойких средах. На основе полученных результатов была предложена формулировка обобщенного метода зеркальных отражений для точечного заряда, расположенного рядом с плоскостойкой структурой, состоящей из одной пленки на полупространстве. Этот результат в работе [9] был обобщен

на случай произвольного распределения зарядов вблизи плоскостойкой структуры и произвольного количества пленок. Однако в развитии в [9] обобщенном методе зеркальных отражений приходится проводить двойное интегрирование, что ограничивает скорость вычислений.

В настоящей работе обобщенный метод зеркальных отражений модифицирован применительно к важной частной задаче — точечный заряд, расположенный рядом с плоскостойкой средой, состоящей из одной пленки на диэлектрическом полупространстве. Новая модифицированная формулировка метода отражений позволяет исключить двойное интегрирование, упростить и ускорить расчеты.

Ниже на основе предложенного метода решены задачи нахождения распределения электростатического потенциала вблизи проводящей сферы, эллипсоида вращения и тела каплевидной формы, расположенных вблизи диэлектрической пленки на диэлектрическом полупространстве. На основе аналогии электростатики и стационарной теплопроводности обсуждаются аналогичные задачи нахождения распределения температурных полей.

### 1. Постановка задачи. Электрическое поле точечного заряда, расположенного в плоскостойкой структуре

Рассмотрим задачу нахождения электростатического поля от точечного заряда  $q$ , расположенного внутри плоскостойкой структуры. Пусть для общности этот заряд расположен внутри плоской стойкой структуры,

состоящей из нескольких пленок и из окружающих слоистую структуру двух полупространств. Для определенности сначала будем считать, что заряд расположен в одной из пленок, а затем обобщим эту задачу на случай, когда заряд расположен на их границе или в одном из полупространств.

Пусть общее число пленок равно  $N_f$ , толщина  $m$ -й пленки равна  $d_m$  и полная толщина слоистой структуры равна  $d_{tot} = \sum_{m=1}^{N_f} d_m$ . Общее число границ между пленками обозначим как  $N = N_f + 1$ . Пронумеруем области пространства  $j = 1, \dots, (N + 1)$ . Предположим, что пленки имеют абсолютные диэлектрические проницаемости, равные  $\epsilon_j$ , а перед и за слоистой структурой находятся однородные полупространства с проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_{N+1}$ . Обозначим также через  $z_j$ -координаты  $N$  границ пленок по оси  $Z$  — следующим образом:  $z_1 = 0$ ,  $z_j = \sum_{m=1}^{j-1} d_m$  при  $j = 2, \dots, N$ .

Уравнения электростатики (или квазиэлектростатики) в области с номером  $j$  можно записать через электрический потенциал  $\phi_j$  в виде  $\Delta\phi_j = -\rho/\epsilon_j$ , где  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\rho$  — объемная плотность заряда,  $\epsilon_j$  — абсолютная диэлектрическая проницаемость  $j$ -й области. Решая уравнения Лапласа в каждой области с учетом граничных условий, найдем электрическое поле во всех областях. Рассмотрим сначала следующую вспомогательную задачу.

## 2. Электрическое поле в слое, свободном от зарядов

Пусть в области с номером  $j$  нет сторонних зарядов между границами  $z_{j-1}$  и  $z_j$ . Диэлектрическая проницаемость среды в этой пленке равна  $\epsilon_j$ .

Электрический потенциал можно представить в виде фурье-разложения:

$$\phi_j(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x + i\eta y} \tilde{\phi}(\xi, \eta, z) d\xi d\eta.$$

Подставим в уравнение Лапласа потенциал в виде фурье-разложения, тогда в рассматриваемой области для  $\tilde{\phi}_j$  получим уравнение

$$d^2\tilde{\phi}_j/dz^2 - \gamma^2\tilde{\phi}_j = 0, \quad (1)$$

где  $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ . Уравнения (1) при фиксированных значениях  $\xi$  и  $\eta$  есть обыкновенные дифференциальные уравнения относительно переменной  $z$ . Общее решение

уравнения (1) в области  $[z_{j-1}, z_j]$  запишем в виде [9]:

$$\begin{aligned} \phi_j(x, y, z) = & (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_j^+ e^{-\gamma(z-z_{j-1})} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \\ & + (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}_j^- e^{\gamma(z-z_j)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\hat{\phi}_j^+$  и  $\hat{\phi}_j^-$  — функции только от  $\xi$  и  $\eta$ . Первое слагаемое (справа от знака равенства) в формуле (2) представляет собой поле от источников, находящихся слева от левой границы слоя. Второе слагаемое справа в формуле (2) представляет собой поле от источников, находящихся справа от правой границы слоя.

Из (2) запишем фурье-образы электрического потенциала и нормальную компоненту индукции электрического поля границах области  $j$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_{j-1}} = \mathbf{L}_j \times \tilde{\mathcal{F}}_j, \quad \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_j \\ \tilde{D}_{j,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_j} = \mathbf{R}_j \times \tilde{\mathcal{F}}_j, \quad (3)$$

где введен вектор-столбец  $\tilde{\mathcal{F}}_j = (\hat{\phi}_j^+; \hat{\phi}_j^-)^T$ . Матрицы  $\mathbf{L}_j$  и  $\mathbf{R}_j$  имеют вид

$$\mathbf{L}_j = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d_{j-1}} \\ \epsilon_j \gamma & -\epsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} e^{-\gamma d_{j-1}} & 1 \\ \epsilon_j \gamma e^{-\gamma d_{j-1}} & -\epsilon_j \gamma \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $d_{j-1} = z_j - z_{j-1}$ .

## 3. Электрическое поле в многослойной структуре без сторонних зарядов

Рассмотрим теперь многослойную структуру, внутри которой нет сторонних зарядов. Рассмотрим границу  $z = z_j$  между областями с номерами  $j$  и  $j + 1$ . Непрерывность тангенциальных компонент напряженностей электрического поля  $E_{j,x}$ ,  $E_{j+1,x}$ ,  $E_{j,y}$ ,  $E_{j+1,y}$  и нормальных компонент электрической индукции  $D_{j,z}$  и  $D_{j+1,z}$  на этой границе можно записать через соответствующие электрические потенциалы  $\phi_j$  и  $\phi_{j+1}$  в виде:

$$\begin{aligned} \phi_j \Big|_{(x,y,z_j)} - \phi_{j+1} \Big|_{(x,y,z_j)} &= 0, \\ \epsilon_j \partial \phi_j / \partial z \Big|_{(x,y,z_j)} - \epsilon_{j+1} \partial \phi_{j+1} / \partial z \Big|_{(x,y,z_j)} &= 0, \end{aligned}$$

где электрический потенциал  $\phi_{j+1}$  в области  $j + 1$  выражается формулой (2), в которой произведена замена индексов  $j \rightarrow j + 1$ . Так как уравнения электростатики (квазистатики) — линейные уравнения, граничные условия должны выполняться для каждого члена фурье-разложения, т.е. граничные условия выполняются для фурье-образов соответствующих величин:

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{\phi}_{j+1} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} &= 0, \\ \tilde{D}_{j,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} - \tilde{D}_{j+1,z} \Big|_{(\xi,\eta,z_j)} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Записывая (5) с помощью (3) и (4), получим матричное уравнение на границе  $z = z_j$ :

$$\mathbf{R}_j \times \tilde{\mathcal{F}}_j = \mathbf{L}_{j+1} \times \tilde{\mathcal{F}}_{j+1}. \quad (6)$$

Уравнение (6) можно записать для  $j = 2, \dots, (N-1)$ , где  $(N+1)$  — общее число областей,  $N$  — число границ, т.е. для всех границ, исключая первую ( $j = 1$ ) и последнюю ( $j = N$ ) границы, т.е. исключая границы  $z_1$  и  $z_N = d_{tot} = \sum_{m=1}^{N-1} d_m$ .

Общее решение для электрического потенциала в области  $j = 1$ , т.е. в интервале  $(-\infty, z_1]$ , запишем в виде

$$\varphi_j(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\varphi}_1^+ e^{-\gamma(z-z_1)} + \hat{\varphi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)}) \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (7)$$

Тогда, вводя вектор  $\tilde{\mathcal{F}}_1 = (\hat{\varphi}_1^+, \hat{\varphi}_1^-)^T$ , запишем граничное условие (5) при  $z = z_1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix} \times \tilde{\mathcal{F}}_1 = \mathbf{L}_2 \times \tilde{\mathcal{F}}_2. \quad (8)$$

Аналогично общее решение для потенциала в области  $j = N+1$ , т.е. в интервале  $[z_N, +\infty)$ , запишем в виде

$$\varphi_{N+1}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\varphi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} + \hat{\varphi}_{N+1}^- e^{\gamma(z-z_N)}) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (9)$$

Тогда, вводя вектор  $\tilde{\mathcal{F}}_{N+1} = (\hat{\varphi}_{N+1}^+, \hat{\varphi}_{N+1}^-)^T$ , запишем граничные условия (5) при  $z = z_N$ :

$$\mathbf{R}_N \times \tilde{\mathcal{F}}_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix} \times \tilde{\mathcal{F}}_{N+1}. \quad (10)$$

Уравнения (6), (8) и (10) позволяют связать вектор-столбцы  $\tilde{\mathcal{F}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{F}}_{N+1}$  в первой и последней областях задачи (т.е. в полупространствах) следующим матричным уравнением:

$$\tilde{\mathcal{F}}_1 = \left( \mathbf{T}_1 \times \prod_{m=2}^N \mathbf{T}_m \times \mathbf{T}_{N+1} \right) \times \tilde{\mathcal{F}}_{N+1},$$

где

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_1 \gamma & -\varepsilon_1 \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \quad \mathbf{T}_m = \mathbf{L}_m \times (\mathbf{R}_m)^{-1},$$

$$\mathbf{T}_{N+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_{N+1} \gamma & -\varepsilon_{N+1} \gamma \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Легко показать, что вектор-столбцы в областях с произвольными номерами  $S$  и  $P$ , где  $1 \leq S < P \leq (N+1)$  и  $S+2 \leq P$ , будут связаны формулой

$$\tilde{\mathcal{F}}_S = \mathbf{R}_S^{-1} \times \left( \prod_{m=S+1}^{P-1} \mathbf{T}_m \right) \times \mathbf{L}_P \times \tilde{\mathcal{F}}_P. \quad (12)$$

#### 4. Электрическое поле в многослойной структуре от точечного заряда, расположенного в одной из пленок

Пусть имеется точечный заряд  $q$ , расположенный в точке  $(0, 0, z_q)$  в области с номером  $s$ . Пусть этот заряд определяется распределением плотности  $\rho(x, y, z) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_q)$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Тогда фурье-образ этого распределения определяется следующим выражением:

$$\tilde{\rho}(\xi, \eta, z) = q \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z-z_q) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy = q\delta(z-z_q).$$

Пусть этот точечный заряд находится в бесконечно тонком слое  $(z_q - \Delta z/2, z_q + \Delta z/2)$ . Тогда из уравнений электростатики  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{D} = \rho$  для фурье-образов полей при  $\Delta z \rightarrow 0$  можно записать

$$i\eta \tilde{E}_{s,z} - \frac{\Delta \tilde{E}_{s,y}}{\Delta z} = 0, \quad \frac{\Delta \tilde{E}_{s,x}}{\Delta z} - i\xi \tilde{E}_{s,z} = 0, \quad i\xi \tilde{E}_{s,y} - i\eta \tilde{E}_{s,x} = 0,$$

$$i\xi \tilde{D}_{s,x} + i\eta \tilde{D}_{s,y} + \frac{\Delta \tilde{D}_{s,z}}{\Delta z} = q\delta(z-z_q).$$

Из полученных уравнений найдем приращения полей в слое

$$\Delta \tilde{E}_{s,y} = i\eta \tilde{E}_{s,z} \Delta z, \quad \Delta \tilde{E}_{s,x} = i\xi \tilde{E}_{s,z} \Delta z,$$

$$\Delta \tilde{D}_{s,z} = -(i\xi \tilde{D}_{s,x} + i\eta \tilde{D}_{s,y}) \Delta z + q\delta(z-z_q) \Delta z.$$

Откуда следует, что в пределе  $\Delta z \rightarrow 0$  скачок тангенциальных компонент напряженностей электрического поля и нормальной компоненты индукции электрического поля при переходе через бесконечно тонкий слой с зарядом равен  $\Delta \tilde{E}_{s,y} \rightarrow 0$ ,  $\Delta \tilde{E}_{s,x} \rightarrow 0$ ,  $\Delta \tilde{D}_{s,z} \rightarrow q$ . В матричном виде эти предельные уравнения можно записать через электрический потенциал в эквивалентном виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q+0} - \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_q-0} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Выразим теперь левую часть граничного условия (13) через вектор-столбцы  $\tilde{\mathcal{F}}_1$  и  $\tilde{\mathcal{F}}_{N+1}$  полупространств снаружи плоскостойкой структуры. Для этого разобьем область с номером  $s$  на две области и обозначим их индексами  $l$  и  $r$  (левая и правая, если смотреть на рис. 3). Введем вектор-столбцы  $\tilde{\mathcal{F}}_l$  и  $\tilde{\mathcal{F}}_r$  в этих областях. Тогда члены слева от знака равенства в (13) можно выразить как

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d-0} = \mathbf{R}_l \times \tilde{\mathcal{F}}_l \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_s \\ \tilde{D}_{s,z} \end{pmatrix} \Big|_{z=z_d+0} = \mathbf{L}_r \times \tilde{\mathcal{F}}_r. \quad (14)$$

Из (6) и (12) следует, что

$$\hat{\mathcal{F}}_l = \left( \prod_{m=1}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \mathbf{L}_l \hat{\mathcal{F}}_1, \text{ и } \hat{\mathcal{F}}_r = (\mathbf{R}_r)^{-1} \left( \prod_{m=s+1}^{N+1} \mathbf{T}_m \right) \hat{\mathcal{F}}_{N+1}, \quad (15)$$

где

$$\mathbf{L}_l = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \\ \varepsilon_s \gamma & -\varepsilon_s \gamma e^{-\gamma(z_q - z_{s-1})} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_r = \begin{pmatrix} e^{-\gamma(z_s - z_q)} & 1 \\ \varepsilon_s \gamma e^{-\gamma(z_s - z_q)} & -\varepsilon_s \gamma \end{pmatrix}.$$

Подставляя (15) в (14) и затем полученные выражения в (13), получаем

$$\mathbf{H}_R \times \hat{\mathcal{F}}_{N+1} = \mathbf{H}_L \times \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{V} = (0, q)^T$  — вектор-столбец, характеризующий возбуждающее воздействие на плоскостойкую систему точечного заряда, а матрицы  $\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  характеризуют отклик на внешнее возбуждение слоистой структуры справа и слева от заряда и выражаются следующим образом:

$$\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_R \left( \prod_{m=s+1}^{N+1} \mathbf{T}_m \right), \quad \mathbf{H}_L = \left( \left( \prod_{m=1}^{s-1} \mathbf{T}_m \right) \mathbf{T}_L \right)^{-1},$$

где матрицы  $\mathbf{T}_m$  определены (11), а матрицы  $\mathbf{T}_L$  и  $\mathbf{T}_R$  — формулами  $\mathbf{T}_L = \mathbf{L}_l (\mathbf{R}_l)^{-1}$ ,  $\mathbf{T}_R = \mathbf{L}_r (\mathbf{R}_r)^{-1}$ .

В рассматриваемой задаче точечный заряд (источник полей) находится исключительно внутри плоскостойкой структуры. Поэтому в столбцах  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$  есть только компоненты, определяющие волны, идущие от плоскостойкой структуры.

Чтобы получить оставшиеся отличные от нуля компоненты  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ , разобьем матрицы  $\mathbf{H}_R$  и  $\mathbf{H}_L$  на элементы  $H_{RA}, H_{RB}, H_{RC}, H_{RD}$  и  $H_{LA}, H_{LB}, H_{LC}, H_{LD}$ , тогда уравнение (16) примет вид

$$\begin{pmatrix} H_{RA} & H_{RB} \\ H_{RC} & H_{RD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{N+1}^+ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{LA} & H_{LB} \\ H_{LC} & H_{LD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{\varphi}_1^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Уравнение (17) можно представить следующей системой из двух матричных уравнений:  $H_{RA} \hat{\varphi}_{N+1}^+ = H_{LB} \hat{\varphi}_1^-$ ,  $H_{RC} \hat{\varphi}_{N+1}^+ = H_{LD} \hat{\varphi}_1^- + q$ . Полученные уравнения можно снова объединить в одно матричное  $2 \times 2$  уравнение:

$$\begin{pmatrix} -H_{LB} & H_{RA} \\ -H_{LD} & H_{RC} \end{pmatrix} \hat{\mathcal{F}}_{out} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где введен вектор-столбец  $\hat{\mathcal{F}}_{out} = (\hat{\varphi}_1^-, \hat{\varphi}_{N+1}^+)^T$ . Решая это уравнение, найдем  $\hat{\varphi}_1^-$  и  $\hat{\varphi}_{N+1}^+$ , а значит, убывающие при удалении от плоскостойкой структуры поля:

$$\hat{\varphi}_1^- = q H_{RA} / (H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD})$$

и

$$\hat{\varphi}_{N+1}^+ = H_{LB} q / (H_{RC} H_{LB} - H_{RA} H_{LD}). \quad (19)$$

Убывающее влево поле в полупространстве  $j = 1$  находим по формуле

$$\varphi_1(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_1^- e^{\gamma(z-z_1)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (20)$$

а убывающее вправо поле в полупространстве  $j = N + 1$  по формуле

$$\varphi_{N+1}(x, y, z) = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}_{N+1}^+ e^{-\gamma(z-z_N)} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (21)$$

Наконец, при необходимости, зная  $\hat{\mathcal{F}}_1$  и  $\hat{\mathcal{F}}_{N+1}$ , можно найти вектор-столбцы потенциалов в любой внутренней области  $\hat{\mathcal{F}}_j$ , так как они однозначно определяются граничными условиями. После этого электрический потенциал в любой из этих областей может быть найден по формуле (2). Таким образом, поля будут определены во всем пространстве.

## 5. Электрическое поле точечного заряда, расположенного на некотором расстоянии от границы пленки

Рассмотрим задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда  $q$ , расположенного в полупространстве с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_f$  (рис. 1). Заряд находится на некотором расстоянии от пленки с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_p$ , нанесенной на полупространство с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_d$ .

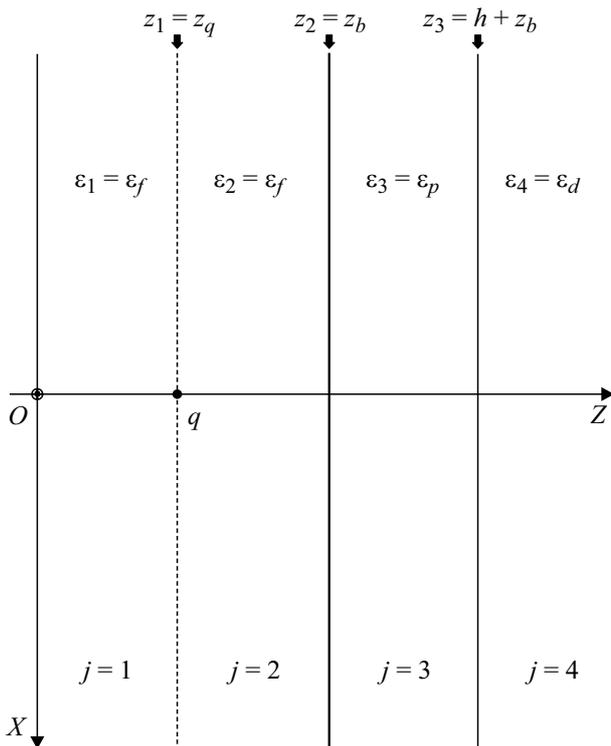
В системе координат рис. 1 заряд находится в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}_q = (0; 0; z_q)$  на расстоянии  $d = (z_b - z_q)$  вдоль оси  $Z$  от пленки толщиной  $h$ .

Эту задачу можно рассмотреть как задачу нахождения электрического потенциала от точечного заряда, расположенного на поверхности вспомогательной пленки толщины  $d = (z_b - z_q)$ , причем диэлектрические постоянные этой вспомогательной пленки и полупространства слева равны  $\varepsilon_f$ .

В такой постановке имеется четыре области. Введем следующую нумерацию областей: индекс  $j = 1$  соответствует полупространству с  $\varepsilon_f$ ,  $j = 2$  — вспомогательной пленке с  $\varepsilon_2 = \varepsilon_f$  и толщиной  $d$ ,  $j = 3$  — реальной пленке с  $\varepsilon_3 = \varepsilon_p$  толщиной  $h$ , а индекс  $j = 4$  соответствует полупространству с  $\varepsilon_4 = \varepsilon_d$  (рис. 1).

Тогда  $N = 3$ ,  $z_1 = z_q$ ,  $z_2 = z_b$ ,  $z_3 = h + z_b$ ,  $\mathbf{H}_R = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4$ ,  $\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1}$  и уравнение (16) примет вид

$$(\mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_3 \times \mathbf{T}_4) \hat{\mathcal{F}}_4 = (\mathbf{T}_1)^{-1} \hat{\mathcal{F}}_1 + \mathbf{V}, \quad (22)$$



**Рис. 1.** Точечный заряд  $q$ , расположенный в свободном пространстве с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_f$  в точке с координатой  $z_q$  на расстоянии  $(z_b - z_q)$  от пленки толщиной  $h$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_p$ , расположенной на границе полупространства с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_d$ .

где матрицы выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{T}_2 &= \mathbf{L}_2(\mathbf{R}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d} \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma e^{-\gamma d} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \epsilon_f \gamma e^{-\gamma d} & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{T}_3 &= \mathbf{L}_3(\mathbf{R}_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h} \\ \epsilon_p \gamma & -\epsilon_p \gamma e^{-\gamma h} \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} e^{-\gamma h} & 1 \\ \epsilon_p \gamma e^{-\gamma h} & -\epsilon_p \gamma \end{pmatrix}^{-1}, \\ \mathbf{T}_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_d \gamma & -\epsilon_d \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

а вектор-столбец точечного заряда равен  $\mathbf{V} = (0; q)^T$ . Тогда

$$\mathbf{H}_L = (\mathbf{T}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_R &= \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma d} \\ \epsilon_f \gamma & -\epsilon_f \gamma e^{-\gamma d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \epsilon_f \gamma e^{-\gamma d} & -\epsilon_f \gamma \end{pmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h} \\ \epsilon_p \gamma & -\epsilon_p \gamma e^{-\gamma h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\gamma h} & 1 \\ \epsilon_p \gamma e^{-\gamma h} & -\epsilon_p \gamma \end{pmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon_d \gamma & -\epsilon_d \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Введем вектор-столбец  $\hat{\mathcal{F}}_{out} = (\hat{\varphi}_1^-, \hat{\varphi}_4^+)^T$  тогда уравнение (18) для данной задачи примет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & H_{RA} \\ \epsilon_f \gamma & H_{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_1^- \\ \hat{\varphi}_4^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Из (23) следует

$$\hat{\varphi}_1^- = q H_{RA} / (H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}) \text{ и } \hat{\varphi}_4^+ = q / (H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}). \quad (24)$$

В явном виде можно выразить  $H_{RA}$  и  $H_{RC}$  через гиперболические синусы и косинусы

$$\begin{aligned} H_{RA} &= \text{ch}(\gamma d) \text{ch}(\gamma h) + \frac{\epsilon_p}{\epsilon_f} \text{sh}(\gamma d) \text{sh}(\gamma h) \\ &\quad + \frac{\epsilon_d}{\epsilon_p} \text{ch}(\gamma d) \text{sh}(\gamma h) + \frac{\epsilon_d}{\epsilon_f} \text{sh}(\gamma d) \text{ch}(\gamma h), \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{RC} &= \gamma \epsilon_f \left[ \text{sh}(\gamma d) \text{ch}(\gamma h) + \frac{\epsilon_p}{\epsilon_f} \text{ch}(\gamma d) \text{sh}(\gamma h) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon_d}{\epsilon_p} \text{sh}(\gamma d) \text{sh}(\gamma h) + \frac{\epsilon_d}{\epsilon_f} \text{ch}(\gamma d) \text{ch}(\gamma h) \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

Найдем потенциал  $\varphi_1$  в полупространстве ( $j = 1$ ) при  $z \leq z_q$ . Подставляя выражения (25) и (26) для  $H_{RA}$  и  $H_{RC}$  в (24) для  $\hat{\varphi}_1^-$ , после несложных преобразований получаем выражение

$$\hat{\varphi}_1^- = q H_{RA} / (H_{RC} + \epsilon_f \gamma H_{RA}) = \frac{q}{2\gamma \epsilon_f} + \frac{q}{2\gamma \epsilon_f} e^{-2\gamma d} \mathcal{R}(\gamma, h), \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\gamma, h) &= \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} + \frac{4\epsilon_p \epsilon_f}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \\ &\quad \times \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]}. \quad (28) \end{aligned}$$

Из выражения для потенциала (20) получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{q}{2\gamma \epsilon_f} e^{\gamma(z-z_q)} + \frac{q}{2\gamma \epsilon_f} \right. \\ &\quad \left. \times e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))} \mathcal{R}(\gamma, h) \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (29) \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\gamma = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , воспользуемся математическим тождеством

$$\frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma|z-z_q|}}{2\varepsilon_f \gamma} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))} d\xi d\eta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x-x_q)^2 + (y-y_q)^2 + (z-z_q)^2}}. \quad (30)$$

Тогда (29) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z_q)^2}} \\ &+ \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{\varepsilon_p + \varepsilon_f} \frac{q}{4\pi\varepsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} \\ &+ \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\varepsilon_p}{\gamma(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \right. \\ &\times \left. \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))}}{[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} \right) \\ &\times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (31)$$

Найдем потенциал  $\varphi_4$  в полупространстве ( $j = 4$ ) при  $z \geq h + z_b$ . Подставляя выражения (25) и (26) для  $H_{RA}$  и  $H_{RC}$  в выражение для  $\hat{\varphi}_4^+$ , получаем

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_4^+ &= \frac{q}{H_{RC} + \varepsilon_f \gamma H_{RA}} \\ &= \frac{2q\varepsilon_q e^{-\gamma d} e^{\gamma h}}{\gamma [(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]}. \end{aligned} \quad (32)$$

Из выражения (21), подставляя (32), получим

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) &= \frac{q}{(2\pi)^2} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varepsilon_p e^{2\gamma h}}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)} \\ &\times \frac{e^{-\gamma(z-z_q)}}{\gamma} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (33)$$

Найдем теперь потенциал при  $z_b \leq z \leq (h + z_b)$ , т.е. в слое  $j + 3$  (в пленке). Граничные условия (6) на плоскости  $z = z_3 = h + z_b$  можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma h} & 1 \\ \varepsilon_p \gamma e^{-\gamma h} & -\varepsilon_p \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_3^+ \\ \hat{\varphi}_3^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon_d \gamma & -\varepsilon_d \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_4^+ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, решая это уравнение, используя (32), получаем решение

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_3^+ &= \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_d}{2\varepsilon_p} e^{\gamma h} \hat{\varphi}_4^+ = \frac{\varepsilon_p + \varepsilon_d}{2\varepsilon_p} \\ &\times \frac{2q\varepsilon_p e^{-\gamma(d-2h)}}{\gamma [(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_3^- &= \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_d}{2\varepsilon_p} \hat{\varphi}_4^+ = \frac{\varepsilon_p - \varepsilon_d}{2\varepsilon_p} \\ &\times \frac{2q\varepsilon_p e^{-\gamma(d-h)}}{\gamma [(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]}. \end{aligned}$$

Полный потенциал поля внутри слоя  $j = 3$  выражается формулой (2):

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{\varphi}_3^+ e^{-\gamma(z-z_b)} + \hat{\varphi}_3^- e^{\gamma(z-(z_b+h))}) \\ &\times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Подставляя сюда полученные выражения для  $\hat{\varphi}_3^+$  и  $\hat{\varphi}_3^-$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) &= \frac{q(\varepsilon_p + \varepsilon_d)}{(2\pi)^2} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\gamma(z-(z_q+2h))}}{\gamma [(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} \\ &\times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta + \frac{q(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(2\pi)^2} \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))}}{\gamma [(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} \\ &\times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (34)$$

Найдем теперь потенциал при  $z_q \leq z \leq z_b$ , т.е. в слое  $j = 2$ . Граничные условия (6) на плоскости  $z = z_2 = z_b$  можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} e^{-\gamma d} & 1 \\ \varepsilon_f \gamma e^{-\gamma d} & -\varepsilon_f \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_2^+ \\ \hat{\varphi}_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & e^{-\gamma h} \\ \varepsilon_p \gamma & -\varepsilon_p \gamma e^{-\gamma h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_3^+ \\ \hat{\varphi}_3^- \end{pmatrix}.$$

Тогда после несложных вычислений получаем

$$\hat{\varphi}_2^+ = \frac{\varepsilon_f + \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} e^{\gamma d} \hat{\varphi}_3^+ + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} e^{\gamma(d-h)} \hat{\varphi}_3^- = \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f}, \quad (35)$$

$$\hat{\varphi}_2^- = \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} \hat{\varphi}_3^+ + \frac{\varepsilon_f + \varepsilon_p}{2\varepsilon_f} e^{-\gamma h} \hat{\varphi}_3^- = \mathcal{R}(\gamma, h) \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma d}, \quad (36)$$

где  $\mathcal{R}(\gamma, h)$ , как и ранее, выражается формулой (28).

Тогда получим полный потенциал поля внутри слоя  $j = 2$  (см. (2)):

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) &= (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{-\gamma(z-z_q)} + \mathcal{R}(\gamma, h) \right. \\ &\times \left. \frac{q}{2\gamma\varepsilon_f} e^{\gamma(z-(2z_b-z_q))} \right) e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражение для  $\mathcal{R}(\gamma, h)$  и используя тождество (30), получим

$$\begin{aligned} \varphi_2(x, y, z) = & \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_q)^2}} \\ & + \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} \\ & + \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{2\epsilon_p}{\gamma(\epsilon_p + \epsilon_f)} \right. \\ & \times \left. \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))}}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} \right) \\ & \times e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (37)$$

Заметим, что это то же самое выражение (31), что и для  $\varphi_1(x, y, z)$  в полупространстве  $j = 1$ . Первый член этого выражения представляет собой потенциал точечного заряда  $q$ , расположенного в точке  $\mathbf{r}_q = (0, 0, z_q)$ . Второй член — это потенциал точечного заряда величины  $q(\epsilon_f - \epsilon_p)/(\epsilon_p + \epsilon_f)$  в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_f$ , расположенного зеркально относительно плоскости  $z = z_b$  в точке  $\mathbf{r}_{ref} = (0, 0, 2z_b - z_q)$ . Третий член — это потенциал заряда, распределенного по плоскости  $z = z_b$  с некоторой поверхностной плотностью (ниже она будет вычислена в явном виде).

Для нахождения  $\varphi_{ind}$  — потенциала индуцированных в рассматриваемой плоскостистой структуре зарядов, надо в области  $z < z_b$  вычесть из полного потенциала в этой области потенциал исходного заряда. Тогда, обозначая  $z_{ref} = 2z_b - z_q$ , из (37) получим

$$\begin{aligned} \varphi_{ind}(x, y, z) = & \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{ref})^2}} \\ & + \frac{q\epsilon_p(\epsilon_p - \epsilon_d)}{2\pi^2(\epsilon_p + \epsilon_f)} \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z - z_{ref})} e^{i(\xi x + \eta y)}}{\gamma[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (38)$$

Из (38) сразу видно, что при  $h \rightarrow +\infty$  интеграл исчезает, и мы получаем известную формулу для заряда у границы двух полупространств при соответствующей замене символов диэлектрических проницаемостей [10].

### 6. Обобщение метода зеркальных отражений на случай точечного заряда, расположенного вблизи плоскостистой среды

Впервые метод зеркальных отражений на случай точечного заряда, расположенного вблизи плоскостистой

среды, применительно к частному случаю одной пленки был предложен в [11]. Дальнейшее обобщение метода, в том числе на многослойную структуру, было дано в [9]. Ниже рассмотрена новая формулировка метода отражений.

Если ввести функцию

$$U(x, y, z) = q/4\pi\epsilon_f \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (39)$$

определяющую потенциал точечного заряда  $q$ , расположенного в начале координат в пространстве с проницаемостью  $\epsilon_f$ , то выражение (38) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{ind}(x, y, z) = & \frac{\epsilon_f - \epsilon_p}{\epsilon_p + \epsilon_f} U(x, y, z - z_{ref}) + \frac{q}{(2\pi)^2} \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma, h) \frac{e^{\gamma(z - z_{ref})} e^{i(\xi x + \eta y)}}{2\epsilon_f \gamma} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $z_{ref} = 2z_b - z_q$ , а функция

$$\chi(\gamma, h) = \mathcal{R}(\gamma, h) - (\epsilon_f - \epsilon_p)/(\epsilon_p + \epsilon_f)$$

определяется формулой

$$\begin{aligned} \chi(\gamma, h) = & \frac{4\epsilon_p\epsilon_f}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \\ & \times \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)}{[(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)e^{2\gamma h} + (\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)]}. \end{aligned} \quad (41)$$

Для дальнейших обобщений нетрудно получить формулы вида (31), (33), (34), (37) и (38) для потенциала поля точечного заряда  $q$  в произвольной точке  $\mathbf{r}_q = (x_q, y_q, z_q)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = & \varphi_2(x, y, z) \\ = & \frac{q}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2}} \\ & + \frac{q(\epsilon_f - \epsilon_p)/(\epsilon_p + \epsilon_f)}{4\pi\epsilon_f \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - (2z_b - z_q))^2}} + \frac{q}{(2\pi)^2} \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\gamma, h)}{2\gamma\epsilon_f} e^{\gamma(z - (2z_b - z_q))} e^{i(\xi(x - x_q) + \eta(y - y_q))} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (42)$$

где  $z_{ref} = 2z_b - z_q$ , а  $\chi(\gamma, h)$  выражается формулой (41).

В области пленки ( $j = 3$ ) потенциал можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) = & \frac{2\varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} U(x - x_q, y - y_q, z - z_q) \\ & - \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p} \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma, h) \\ & \times \frac{e^{-\gamma(z-z_q)} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))}}{2\gamma\varepsilon_f} d\xi d\eta + \frac{2\varepsilon_f(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \\ & \times U(x - x_q, y - y_q, z - [2(z_b + h) - z_q]) \\ & - \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \frac{q}{(2\pi)^2} \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\gamma, h) \frac{e^{\gamma(z-[2(z_b+h)-z_q])} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))}}{2\gamma\varepsilon_f} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (43)$$

И далее в полупространстве за пленкой ( $j = 4$ ) для  $\varphi_4(x, y, z)$  получается выражение

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) = & \frac{4\varepsilon_f\varepsilon_p U(x - x_q, y - y_q, z - z_q)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \\ & - \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\gamma, h)}{2\gamma\varepsilon_f} \exp(-\gamma(z - z_q)) \\ & \times \exp(i(\xi(x - x_q) + (\eta(y - y_q)))) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (44)$$

Представим выражение для  $\chi(\gamma, h)$  в (41) сходящимся рядом по степеням  $e^{-2\gamma h}$ :

$$\begin{aligned} \chi(\gamma, h) = & \frac{4\varepsilon_p + \varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \\ & \times \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{[(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)e^{2\gamma h} + (\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)]} \\ = & \frac{ae^{-2\gamma h}}{1 + be^{-2\gamma h}} = a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} b^{m-1} e^{-2\gamma mh}, \end{aligned} \quad (45)$$

где введены обозначения

$$a = \frac{4\varepsilon_p\varepsilon_f(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_d)(\varepsilon_p + \varepsilon_f)^2}, \quad b = \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)}. \quad (46)$$

Отметим, что ряд (45) сходится при  $|b| < 1$ , т.е. при

$$-1 < \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} < 1.$$

Дальнейшее изложение будет предполагать, что диэлектрические проницаемости задачи удовлетворяют этому условию сходимости. Очевидно, что для положительных значений диэлектрических проницаемостей условие сходимости всегда выполняется.

Тогда выражение (42) примет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = & U(x - x_q, y - y_q, z - z_q) + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{\varepsilon_p + \varepsilon_f} \\ & \times U(x - x_q, y - y_q, z - z_{ref}) + \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \\ & \times \frac{q}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\gamma(z-z_{ref}-2mh)} e^{i(\xi(x-x_q)+\eta(y-y_q))}}{2\varepsilon_f\gamma} d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая математическое тождество (30), получим

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y, z) = & U(x - x_q, y - y_q, z - z_q) + \frac{\varepsilon_f - \varepsilon_p}{\varepsilon_p + \varepsilon_f} \\ & \times U(x - x_q, y - y_q, z - z_{ref}) + \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \\ & \times U(x - x_q, y - y_q, z - z_{ref} - 2mh). \end{aligned} \quad (47)$$

Таким образом, обобщенный метод зеркальных отражений может быть сформулирован следующим образом: если точечный заряд  $q$  расположен в полупространстве рядом с пленкой толщины  $h$ , расположенной на границе другого полупространства, то потенциал в полупространстве, в котором расположен заряд, есть бесконечная сумма потенциалов следующих зарядов:

— первый член суммы — это потенциал исходного точечного заряда  $q$  (источника поля), расположенного в точке  $z_q$ ,

— второй член суммы — это потенциал виртуального заряда величины  $q(\varepsilon_f - \varepsilon_p)/(\varepsilon_p + \varepsilon_f)$ , расположенного в точке  $z_{ref}$ , зеркально относительно ближайшей границы пленки  $z = z_b$ , а оставшиеся члены суммы — это бесконечная сумма потенциалов виртуальных зарядов, расположенных в точках  $z = z_{ref} + 2mh$  и величиной  $qa(-1)^{m-1}b^{m-1}$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ , а величины  $a$  и  $b$  выражаются через диэлектрические проницаемости сред задачи по формулам (46).

Таким образом, в выражениях для потенциала  $\varphi_1(x, y, z)$  можно избавиться от двойного интегрирования, как в работе [9], и заменить его суммированием достаточно быстро сходящегося ряда по виртуальным зарядам.

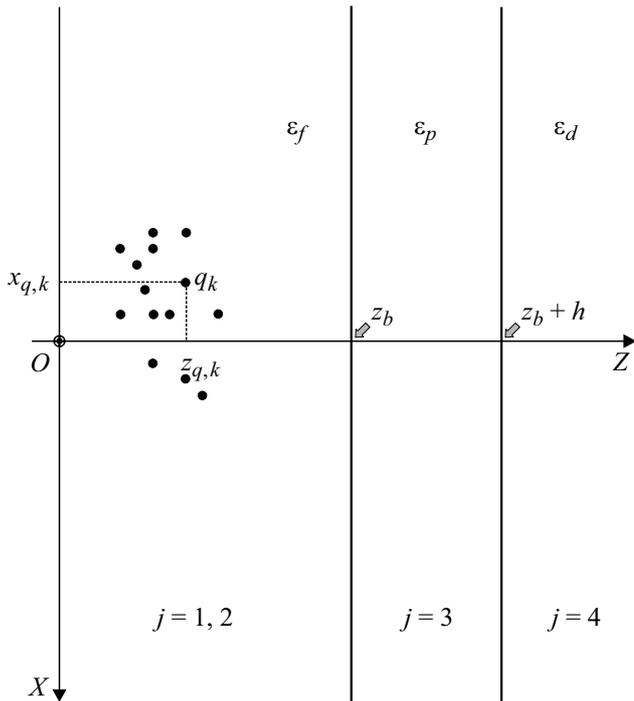


Рис. 2. Система точечных зарядов  $q_k$  у пленки, расположенной на границе полупространства.

Аналогично, подставляя выражение (45) в (43) и (44), получим

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y, z) &= \frac{2\varepsilon_f}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} U(x-x_q, y-y_q, z-z_q) - \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p} \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} U(x-x_q, y-y_q, z-(z_q - 2mh)) \\ &\times \frac{2\varepsilon_f(\varepsilon_p - \varepsilon_d)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} U(x-x_q, y-y_q, z-[2(z_b+h) - z_q]) \\ &- \frac{(\varepsilon_p - \varepsilon_d)(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{2\varepsilon_p(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \\ &\times U(x-x_q, y-y_q, z-[2(z_b + (m+1)h) - z_q]), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \varphi_4(x, y, z) &= \frac{4\varepsilon_f \varepsilon_p U(x-x_q, y-y_q, z-z_q)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} - \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_d)} \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} U(x-x_q, y-y_q, z-(z_q - 2mh)). \end{aligned} \quad (49)$$

### 7. Обобщение метода зеркальных отражений на случай системы зарядов

Обобщим теперь полученный метод зеркальных отражений на потенциал полного поля  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  в области  $z < z_b$  перед пленкой (рис. 2) произвольной компактной

системы  $N_q$  зарядов-источников  $q_k$ , расположенных в точках с радиус-векторами  $\mathbf{r}_{q,k} = (x_{q,k}, y_{q,k}, z_{q,k})$ , где  $k = 1, 2, \dots, N_q$ .

Если бы не было плоскостной структуры, то потенциал этой системы зарядов-источников представлялся бы формулой

$$\begin{aligned} \Phi_s(x, y, z) &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \\ &\times \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-z_{q,k})^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Суммируя выражения (47) для каждого заряда  $q_k$  по всем  $N_q$  зарядам системы и замечая, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \\ &\times \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-(2z_b + 2mh - z_{q,k}))^2} \\ &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \\ &\times \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + ((2z_b + 2mh - z) - z_{q,k})^2} \\ &= \Phi_s(x, y, 2z_b + 2mh - z), \end{aligned}$$

получим обобщение метода зеркальных отражений в электростатике для произвольных распределений зарядов для полного потенциала системы зарядов в полупространстве перед пленкой в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{tot}(x, y, z) &= \Phi_s(x, y, z) + \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \Phi_s(x, y, 2z_b + 2mh - z). \end{aligned} \quad (51)$$

Из вывода формулы (51) следует, что потенциал индуцированных зарядов  $\Phi_{ind}$ , который порождается потенциалом  $\Phi_s$  распределений зарядов-источников поля, представляется формулой

$$\begin{aligned} \Phi_{ind}(x, y, z) &= \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_p + \varepsilon_f)} \Phi_s(x, y, 2z_b - z) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \Phi_s(x, y, 2z_b + 2mh - z). \end{aligned} \quad (52)$$

Аналогично, учитывая, что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z-(z_{q,k} - 2mh))^2} \\ &= \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\varepsilon_f \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + ((z+2mh) - z_{q,k})^2} \\ &= \Phi_s(x, y, z + 2mh), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \\ & \times \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + (z - [2(z_b + (m+1)h) - z_{q,k}])^2} \\ & = \sum_{k=1}^{N_q} q_k / 4\pi\epsilon_f \\ & \times \sqrt{(x-x_{q,k})^2 + (y-y_{q,k})^2 + ([2(z_b + (m+1)h) - z] - z_{q,k})^2} \\ & = \Phi_s(x, y, 2(z_b + (m+1)h) - z), \end{aligned}$$

получим с учетом (48) для потенциала  $\Phi_3$  системы зарядов в пленке при  $z_b \leq z \leq (z_b + h)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, y, z) &= \frac{2\epsilon_f \Phi_s(x, y, z)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} - \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p} \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \\ & \times \Phi_s(x, y, z + 2mh) + \frac{2\epsilon_f(\epsilon_p - \epsilon_d)\Phi_s(x, y, 2(z_b + h) - z)}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \\ & - \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p(\epsilon_p + \epsilon_d)} \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \\ & \times \Phi_s(x, y, 2(z_b + (m+1)h) - z). \end{aligned} \quad (53)$$

С учетом (49) потенциал  $\Phi_4$  зарядов в полупространстве при  $z \geq (z_b + h)$  ( $j = 4$ ) равен

$$\begin{aligned} \Phi_4(x, y, z) &= \frac{4\epsilon_f \epsilon_p}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \Phi_s(x, y, z) \\ & - \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_d)} \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \Phi_s(x, y, z + 2mh). \end{aligned} \quad (54)$$

Отметим, что обобщение метода зеркальных отражений было получено ранее в работе [9] в другой формулировке, которое было успешно применено к задаче о нанофокусировке поверхностной плазмонной волны на вершине металлического острия. Предложенный метод настоящей работы позволяет избежать двойного интегрирования и имеет преимущество при численной реализации.

### 8. Распределение потенциала вокруг металлического тела, расположенного вблизи плоской границы пленки на диэлектрическом полупространстве

Рассмотрим металлическое тело, для определенности пусть сначала это будет сфера с радиусом  $R$ . Поверхность сферы представим формулой

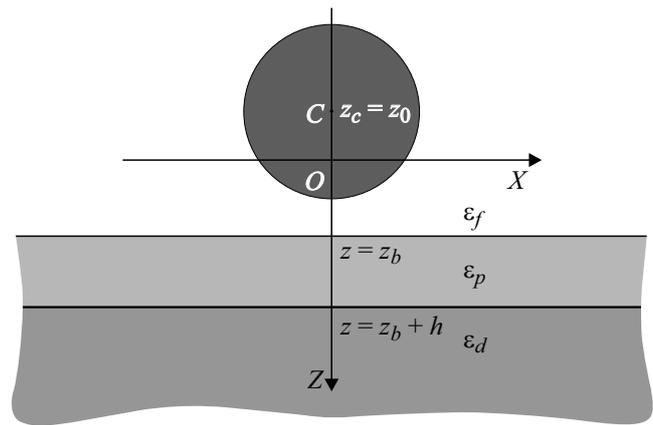


Рис. 3. Металлическая сфера у пленки, расположенной на границе полупространства. Геометрия задачи.

$x^2 + y^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ , где  $R$  — радиус сферы, а координаты центра  $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$  и  $z_c = z_0$  (рис. 3). Пусть вблизи сферы находится пленка толщиной  $h$ , причем ее границы  $z = z_b$  и  $z = (z_b + h)$ . Диэлектрические проницаемости внешней однородной среды, пленки и полубесконечной среды за пленкой обозначим  $\epsilon_f$ ,  $\epsilon_p$  и  $\epsilon_d$  (в общем случае квазистатики — это комплексные величины).

Рассмотрим распределение электрического потенциала, которое установится в пространстве. Как известно, потенциал электростатического поля  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta\Phi = 0$ . Кроме того, на границе металлической сферы потенциал  $U_s$  будет постоянным. Тогда граничные условия задачи можно записать в виде:

$$\text{на поверхности сферы: } \Phi = U_s, \quad (55)$$

$$\text{на границе пленки } z=z_b: \epsilon_p E_{3,n} = \epsilon_f E_{f,n} \text{ и } E_{3,\tau} = E_{f,\tau}, \quad (56)$$

$$\text{на границе пленки } z=z_b+h: \epsilon_d E_{4,n} = \epsilon_p E_{3,n} \text{ и } E_{4,\tau} = E_{3,\tau}. \quad (57)$$

Рассматриваемая задача имеет осевую симметрию относительно оси  $Z$ . Поэтому и решение уравнения Лапласа будет иметь такую же симметрию. Пусть потенциал зарядов, находящихся на эквипотенциальной металлической сфере в пространстве с проницаемостью  $\epsilon_f$ , описывается функцией  $\Phi_s(x, y, z)$ . Тогда полный потенциал  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  в области, заполненной диэлектриком с  $\epsilon_f$ , можно выразить через  $\Phi_s(x, y, z)$  формулой (51), а в пленке и в диэлектрическом пространстве за ней — формулами (53) и (54). При этом граничные условия (56) и (57) будут выполнены автоматически. Таким образом, задача определения потенциала во всем пространстве состоит в том, чтобы найти потенциал  $\Phi_s(x, y, z)$ , такой, чтобы полный потенциал  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  удовлетворял граничному условию (55). Это можно сделать, разложив потенциал  $\Phi_s(x, y, z)$  по подходящим гармоническим функциям, а коэффициенты разложения

определить из условия (55) для  $\Phi_{tot}(x, y, z)$  на эквипотенциальной границе металла.

Имея в виду общность дальнейшего изложения, перейдем к безразмерным координатам:  $\tilde{x} = x/R$ ,  $\tilde{y} = y/R$ ,  $\tilde{z} = z/R$ , где  $R$  — радиус сферы. Уравнение Лапласа в безразмерных координатах не изменится. Кроме того, нормируем потенциал на его значение  $U_s$  на поверхности сферы, тогда можно перейти от размерного к безразмерному потенциалу  $\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \Phi/U_s$  в безразмерных координатах. Тогда граничное условие (55) на сфере можно записать в виде  $\tilde{\Phi}_{tot} = 1$ .

В рассматриваемом осесимметричном случае для выполнения граничного условия на поверхности сферы достаточно удовлетворить его на линии пересечения поверхности острия с любой плоскостью симметрии, проходящей через ось  $Z$ . В качестве такой плоскости мы выберем плоскость  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  при  $\tilde{y} = 0$ . Более конкретно, достаточно удовлетворить граничному условию  $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, 0, \tilde{z}) = 1$  только на границе пересечения полуплоскости  $\tilde{y} = 0$  при  $\tilde{x} \geq 0$  и поверхности сферы. В безразмерных координатах это будет кривая  $\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0) = 1$  при  $\tilde{y} = 0$  и  $\tilde{x} \geq 0$ .

Будем искать решение, предполагая, что потенциал снаружи сферы  $\tilde{\Phi}_s$  имеет вид

$$\tilde{\Phi}_s = \sum_{j=1}^N A_j P_{j-1}(\cos \theta) / \tilde{r}^j, \quad (58)$$

где  $A_j$  — постоянные коэффициенты разложения,  $P_j(\cos \theta)$  — полиномы Лежандра степени  $j$ , угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $Z$  из центра сферы,  $\tilde{r}$  — безразмерный радиус-вектор точки наблюдения, проведенный из центра сферы. В координатах  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  выражение (58) можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}_s(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (59)$$

где

$$\mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = P_{j-1} \left( \frac{(\tilde{z} - \tilde{z}_0)}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2}} \right) / \left( \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2} \right)^j.$$

Отметим, что выбор функциональных зависимостей (58) из общего решения уравнения Лапласа обусловлен тем, что снаружи сферы потенциал поля должен стремиться к нулю при удалении от ее поверхности и быть конечным. Тогда, потенциал индуцированных зарядов  $\tilde{\Phi}_{ind}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  можно представить, учитывая (52), в виде

$$\tilde{\Phi}_{ind}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{j=1}^N A_j \mathcal{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad (60)$$

где

$$\mathcal{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = ((\epsilon_f - \epsilon_p) / (\epsilon_p + \epsilon_f)) \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2\tilde{z}_b - \tilde{z}) + \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2\tilde{z}_b + 2m\tilde{h} - \tilde{z}).$$

Тогда получим полный потенциал в среде с  $\epsilon_f$  (между сферой и пленкой):

$$\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{m=1}^{\infty} A_j (\mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \mathcal{P}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})). \quad (61)$$

Граничное условие на сфере  $\tilde{\Phi}_{tot}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 1$  в настоящей работе удовлетворялось приближенно, методом коллокаций [12]. Указанные уравнения записывались в равномерно распределенных  $N$  точках полукруга  $\tilde{x}^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_0)^2 = 1$  при  $\tilde{y} = 0$  и  $\tilde{x} > 0$  на поверхности сферы, и были получены  $N$  линейных алгебраических уравнений с  $N$  неизвестными коэффициентами  $A_j$ . В результате решения полученной системы находились  $A_j$  и по формулам (61) распределения потенциала в области между сферой и передней поверхностью пленки.

С учетом (59) распределение потенциала в пленке и за ней с учетом (53) и (54) определялось по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_3(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \sum_{j=1}^N A_j \left( \frac{2\epsilon_f}{(\epsilon_p + \epsilon_f)} \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p} \right) \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + 2m\tilde{h}) \\ &\times \frac{2\epsilon_f(\epsilon_p - \epsilon_d) \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2(\tilde{z}_b + \tilde{h}) - \tilde{z})}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} - \frac{(\epsilon_p - \epsilon_d)(\epsilon_f - \epsilon_p)}{2\epsilon_p(\epsilon_p + \epsilon_d)} \\ &\times \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, 2(\tilde{z}_b + (m+1)\tilde{h}) - \tilde{z}), \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_4(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= \sum_{j=1}^N A_j \left( \frac{4\epsilon_f \epsilon_p}{(\epsilon_p + \epsilon_f)(\epsilon_p + \epsilon_d)} \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \right. \\ &\left. - \frac{(\epsilon_f - \epsilon_p)}{(\epsilon_p + \epsilon_d)} \sum_{m=1}^{\infty} a(-1)^{m-1} b^{m-1} \mathcal{F}_j(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} + 2m\tilde{h}) \right). \end{aligned} \quad (63)$$

В итоге формулы (61), (62) и (63) решают задачу нахождения нормированного потенциала в нормированных координатах снаружи сферы и во всей слоистой структуре по известным значениям  $A_j$ .

Полученные решения для нормированного потенциала обладают важным свойством: они зависят от отношений диэлектрических проницаемостей, т.е. если увеличить все диэлектрические проницаемости в  $k$  раз, то распределение нормированного потенциала не изменится.

## 9. Распределение потенциала вокруг некоторых тел, расположенных вблизи пленки на полупространстве

Сначала в качестве примера применения изложенной выше теории были проведены численные расчеты распределения нормированного потенциала металлической заряженной сферы вблизи плоской слоистой структуры из одной пленки. Сфера с центром в точке  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (0, 0, -0.5)$  находилась в вакууме с  $\epsilon_f = 1$  рядом с пленкой толщины, равной  $\tilde{h} = 1$  (в нормированных на радиус кривизны сферы единицах) с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_p = 2$ . Полупространство за пленкой имело диэлектрическую проницаемость  $\epsilon_d = 4$ . Границы пленки определялись уравнениями  $\tilde{z} = \tilde{z}_b = 1$  и  $\tilde{z} = \tilde{z}_b + \tilde{h} = 2$  (рис. 3). Кратчайшее расстояние от сферы до пленки было равно  $\Delta\tilde{z} = 0.5$ .

На рис. 4, *a* показано нормированное распределение потенциала в плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  при указанных параметрах. Видно увеличение расстояния между эквипотенциалами при переходе из свободного пространства в диэлектрическую пленку и далее в диэлектрическое полупространство. Это связано с естественной экранировкой электрического поля в диэлектрике, возникающее за счет индуцированных зарядов. Чем больше диэлектрическая проницаемость, тем сильнее экранировка. Важное свойство полученного распределения — его характерный размер приблизительно равен размеру сферы.

Возникает вопрос: можно ли использовать полученный метод для решения других заряженных металлических тел? Оказалось, что можно. Так, была рассмотрена задача нахождения нормированного потенциала металлического заряженного эллипсоида вблизи той же плоской слоистой структуры из одной пленки, что и в предыдущем примере. Рассматривался вытянутый эллипсоид с осью симметрии вдоль оси  $Z$ . Нормирование координат проводилось по отношению к малой полуоси в перпендикулярной оси плоскости. Нормированная длина большой полуоси была равна 1.25. Центр эллипса находился в точке  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (0, 0, -0.75)$ . Кратчайшее расстояние от эллипса до пленки было равно  $\Delta\tilde{z} = 0.5$ . Нормированное распределение потенциала в плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  показано на рис. 4, *b*. Разложение  $\tilde{\Phi}_s$  производилось по тем же функциям, что и в предыдущем случае (59).

Аналогично была рассмотрена задача нахождения нормированного потенциала металлического заряженного тела каплевидной формы, которая представляет собой полуэллипсоид, наложенный на полусферу. Тело располагалось вблизи той же плоской слоистой структуры из одной пленки, что и в предыдущем примере. Нормирование координат проводилось по отношению к радиусу полусферы. Нормированная длина большой полуоси полуэллипса была равна 1.3. Центр кривизны полусферы находился в точке  $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \tilde{z}_0) = (0, 0, -0.8)$ .

Кратчайшее расстояние от тела до пленки было равно  $\Delta\tilde{z} = 0.5$ . Нормированное распределение потенциала в плоскости  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  показано на рис. 4, *c*. Разложение  $\tilde{\Phi}_s$  производилось по тем же функциям, что и в предыдущем случае (59).

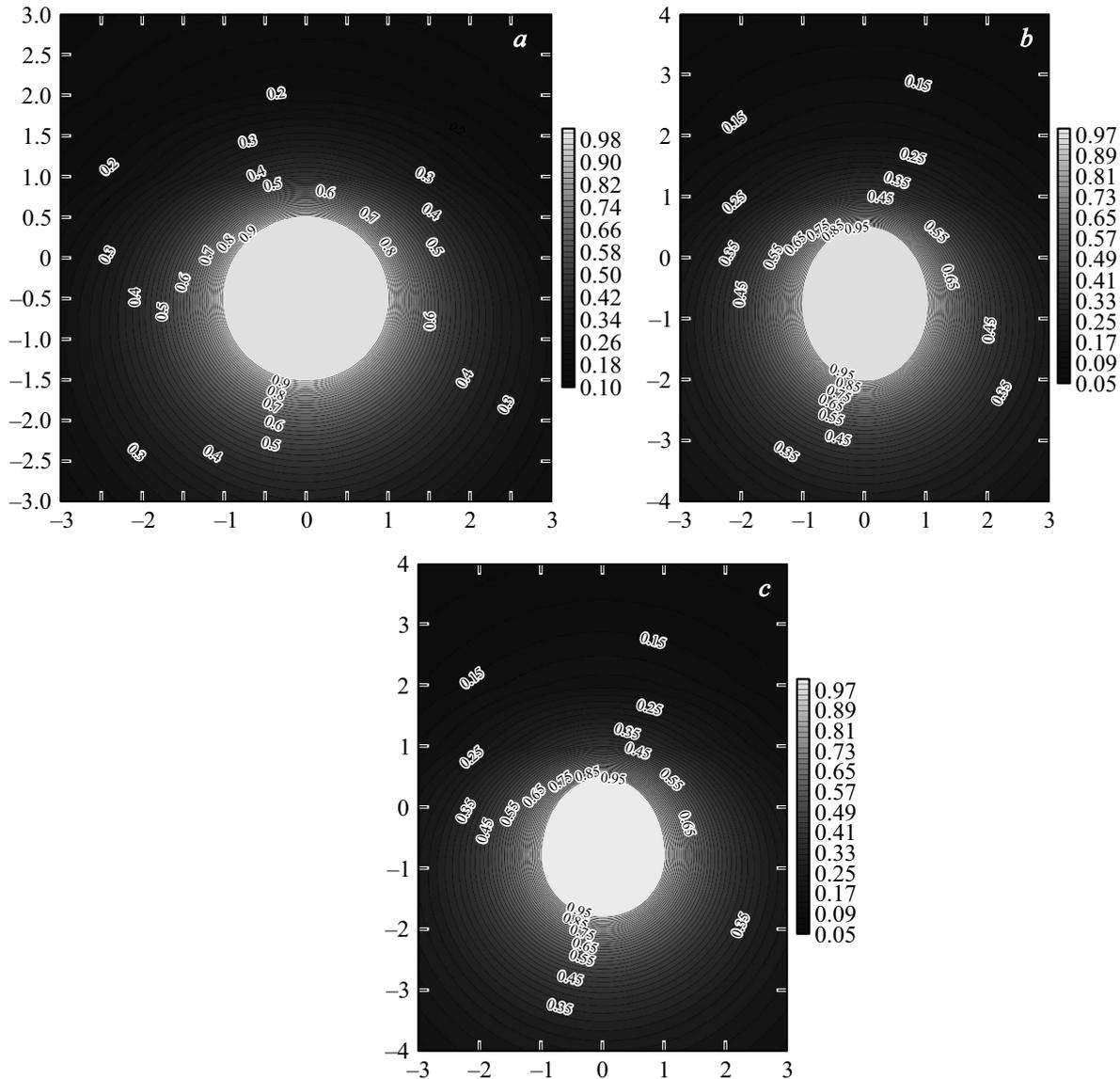
Следует отметить, что с увеличением эксцентриситета эллипсоида сходимость численного метода падает, для больших эксцентриситетов следует разлагать потенциал в ряд по решениям уравнения Лапласа в эллиптической системе координат вращения [13]. Проблема наилучшей аппроксимации  $\tilde{\Phi}_s$  требует дополнительного исследования.

## 10. Применение полученных результатов к задачам теплопроводности плоскостойких сред

Как известно, существует аналогия между задачами электростатики и стационарными задачами теплопроводности [14]. Аналогичны не только соответствующие уравнения, но и граничные условия [15,16]. Если, в задачах, рассмотренных в предыдущих разделах, заменить одновременно: 1) потенциал  $\varphi$  — на температуру  $(T - T_0)$ , где  $T_0$  — температура на бесконечности; 2) диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$  — на коэффициент теплопроводности  $K$ ; 3) вектор электрической индукции  $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = -\epsilon\nabla\varphi$  — на плотность потока тепла  $\mathbf{h} = -K\nabla T$ ; 4) точечный заряд  $q$  — на мощность теплового выделения точечного источника  $Q_h$ , то можно решить аналогичные задачи тем же методом.

Например, чтобы решить задачу распределения температуры вокруг тела, нагретого до постоянной температуры  $T_m$ , можно сначала решить соответствующую электростатическую задачу распределения потенциала в окрестности тела с постоянным потенциалом поверхности. Нормированное решение электростатической задачи будет также решением аналогичной нормированной задачи теплопроводности в нормированных координатах (при указанной замене величин и обозначений). Результат расчетов распределения температуры (точнее превышения температуры над внешней температурой  $T_0$ , выраженные в единицах  $(T_m - T_0)$ ) в задачах о нагретых сфере, эллипсоиде и каплевидном теле будет идентичен распределениям, показанным на рис. 4.

Нормированное температурное распределение так же, как и в случае распределения нормированных электростатических потенциалов, обладает следующим свойством. Распределение зависит от отношений коэффициентов теплопроводности областей. То есть если увеличить все коэффициенты в  $k$  раз, то нормированное распределение температуры не изменится в нормированных координатах. Таким образом, на рис. 4 показаны температурные распределения при значениях коэффициентов теплопроводности  $K_f = k$ ,  $K_p = 2k$ ,  $K_d = 4k$ , где  $k$  — произвольное число.



**Рис. 4.** Распределения нормированного потенциала вокруг металлических заряженных тел: сферы (а), вытянутого вдоль  $Z$  эллипсоида вращения (b) и каплевидного тела вращения (с) в нормированных координатах. Диэлектрические проницаемости:  $\epsilon_f = 1$ ,  $\epsilon_p = 2$ ,  $\epsilon_d = 4$ . Толщина пленки  $\tilde{h} = 1$ , ее границы  $\tilde{z} = 1$  и  $\tilde{z} = 2$ . Между телами и пленкой расстояние  $\Delta\tilde{z} = 0.5$ .

Особо отметим, что аналогия между электростатической и теплопроводной задачами не означает, что распределение электрического потенциала в вакууме аналогично распределению температуры в вакууме. В рассмотренном случае аналог вакуума — среда с некоторым конечным коэффициентом теплопроводности  $K_f$ , а коэффициенты  $K_p$  и  $K_d$  соотносятся с  $K_f$  так же, как диэлектрические проницаемости аналогичной электростатической задачи.

## Заключение

В работе предложена новая формулировка обобщенного метода зеркальных отражений для одной пленки, расположенной на полупространстве, которая исключает

двойное интегрирование, использованное в предыдущей формулировке метода [9].

Продемонстрировано применение метода для нахождения электростатических полей от симметричных тел вращения, расположенных рядом с одной пленкой. Показана применимость предложенного теоретического метода к аналогичным задачам стационарной теплопроводности. Это сделано на примере решения задачи нахождения температурного поля вокруг равномерно нагретого тела, расположенного вблизи теплопроводящей пленки и полупространства.

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] H.N. Pollack. *J. Geophys. Research*, **70** (22), 5645 (1965). DOI: 10.1029/JZ070i022p05645
- [2] J.G. Negi, R.N. Singh. *Pure Appl. Geophys.*, **73** (1), 143 (1969). DOI: 10.1007/BF00875132
- [3] J.G. Negi, R.N. Singh. *Pure Appl. Geophys.*, **69** (1), 110 (1968). DOI: 10.1007/BF00874909
- [4] S.J. Matysiak, D.M. Perkowski. *Heat Mass Transfer*, **50** (1), 75 (2014). DOI: 10.1007/s00231-013-1225-9
- [5] W.C. Chew. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* (IEEE Press, NY., 1995)
- [6] А.Б. Петрин. *ЖЭТФ*, **159** (1), 35 (2021). DOI: 10.31857/S004445102101003X
- [7] Р. Кинг, Г. Смит. *Антенны в материальных средах: В 2-х кн. Пер. с англ.* (Мир, М., 1984)
- [8] R.W.P. King. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **36** (6), 1080 (1988). DOI: 10.1109/22.3635
- [9] А.Б. Петрин. *Опт. и спектр.*, **130** (9), 1436 (2022). DOI: 10.21883/OS.2022.09.53308.3636-22
- [10] Д.В. Сивухин. *Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество* (Физматлит, Изд-во МФТИ, М., 2004), 4-е изд., стереотип.
- [11] А.Б. Петрин. *Успехи прикладной физики*, **4** (4), 326 (2016).
- [12] *Численные методы теории дифракции (Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 29): Сб. статей. Пер. с англ.* (Мир, М., 1982)
- [13] А. Анго. *Математика для электро- и радиоинженеров* (Наука, М., 1967)
- [14] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. *Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм* (Мир, М., 1965)
- [15] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика* (Наука, М., 1986)
- [16] Э.М. Каргашов. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел* (Высшая школа, М., 2001)