# Рассеяние квазидвумерных электронов сверхрешетки $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$ на фононах

© С.И. Борисенко¶

Сибирский физико-технический институт им. В.Д. Кузнецова,
634050 Томск, Россия

(Получена 12 марта 2003 г. Принята к печати 19 мая 2003 г.)

Проведен расчет продольной и поперечной подвижности электронов нижней минизоны сверхрешетки $GaAs/Al_{0.35}Ga_{0.65}As$ в случае рассеяния на дальнодействующем потенциале полярных оптических фононов при $T = 300$ K. Проведен анализ парциальных вкладов в подвижность и эффективное время релаксации от различных мод колебаний дальнодействующего потенциала таких фононов. Исследованы зависимости подвижности и эффективного времени релаксации как на полярных оптических, так и на акустических фононах от ширины квантовой ямы сверхрешетки и от температуры. Расчет выполнен с помощью линеаризованного уравнения Больцмана. Скалярный потенциал полярных оптических фононов рассчитывался в модели диэлектрического континуума.

## 1. Введение

Как известно, в сверхрешетках $GaAs/Al_xGa_{1-x}As$, составленных из полупроводников с ионной связью, основным механизмом рассеяния носителей заряда на колебаниях решетки в области комнатных температур должно быть рассеяние на дальнодействующем потенциале полярных оптических фононов (ПОФ). Анализу этого рассеяния и подвижности, связанной с ним, для структур из изолированных квантовых ям (КЯ) посвящено большое число работ, касающихся как проблемы в целом [1–9], так и отдельных ее аспектов [10–14]. Для сверхрешеток (СР) из квантовых ям такие работы практически отсутствуют [15–17]. До настоящего времени анализ подвижности носителей заряда в СР, определяемой рассеянием на ПОФ, представляет значительные трудности, связанные со сложным спектром колебаний дальнодействующего потенциала ПОФ сверхрешетки и неупругим характером данного рассеяния.

В данной работе в рамках единого метода проведен расчет продольной и поперечной подвижностей невырожденного газа электронов нижней минизоны симметричной сверхрешетки $GaAs/Al_{0.35}Ga_{065}As$ с шириной квантовой ямы $a$ и толщиной потенциального барьера $b$, равных 5 нм. Расчет подвижности и эффективного времени релаксации при $T = 300$ K проводился с учетом рассеяния электронов на дальнодействующем потенциале ПОФ. Проведен анализ парциальных вкладов в подвижность и эффективное время релаксации от различных мод колебаний дальнодействующего потенциала ПОФ. Исследована зависимость среднего значения эффективного времени релаксации и подвижности на ПОФ и акустических фононах (АФ) от ширины квантовой ямы СР и температуры. Расчет эффективного времени релаксации проводился с помощью линеаризованного уравнения Больцмана. Скалярный потенциал ПОФ рассчитывался в модели диэлектрического континуума.

¶ E-mail: sib@elefot.tsu.ru

## 2. Методика расчета

Расчет продольной и поперечной, относительно оси симметрии СР, подвижности проводился с помощью линеаризованного уравнения Больцмана. Неравновесная добавка к функции распределения $g(\mathbf{k})$ с учетом неупругого рассеяния на фононах рассчитывалась в виде

$$g(\mathbf{k}) = e\,\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \sum_i \tau_i(\mathbf{k})\, E_i v_i(\mathbf{k}), \tag{1}$$

где $\tau_i(\mathbf{k})$ — искомые функции, зависящие в общем случае от волнового вектора $\mathbf{k}$, которые будем называть эффективным временем релаксации; $f_0(\varepsilon)$ — равновесная функция распределения Ферми–Дирака, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля; $\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \nabla_k \varepsilon/\hbar$ — скорость электрона,

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m_\perp} + \frac{\Delta}{2}\left[1 - \cos(k_z d)\right] \tag{2}$$

— энергия электронов нижней минизоны СР в приближении сильной связи; $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y, 0)$ — волновой вектор, перпендикулярный оси симметрии СР; $m_\perp$ — поперечная эффективная масса, близкая по величине к эффективной массе электронов $m_a$ полупроводника, составляющего КЯ; $\Delta$ — ширина нижней минизоны СР; $d$ — период СР.

Функции эффективного времени релаксации рассчитывались с помощью численного решения линеаризованного уравнения Больцмана, которое в квазидвумерном приближении для электронного газа ($\Delta < k_0 T$) с учетом (1), (2) имеет следующий вид [17]:

$$\tau_\perp(\varepsilon) = \tau_0(\varepsilon)\Bigg\{\sum_{\mathbf{k}'}\big[w_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} + f_0(\varepsilon)(w_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - w_{\mathbf{k}'\mathbf{k}})\big] \times \frac{f_0'(\varepsilon')\mathbf{k}_\perp\mathbf{k}_\perp'}{f_0'(\varepsilon)k_\perp^2}\,\tau_\perp(\varepsilon') + 1\Bigg\}, \tag{3}$$

$$\tau_{\parallel}(\varepsilon) = \tau_0(\varepsilon)\left\{\sum_{\mathbf{k}'}\left[w_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} + f_0(\varepsilon)(w_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - w_{\mathbf{k}'\mathbf{k}})\right] \times \frac{f_0'(\varepsilon')\sin(k_z'd)}{f_0'(\varepsilon)\sin(k_zd)}\,\tau_{\parallel}(\varepsilon') + 1\right\}, \qquad (4)$$

где

$$\tau_0^{-1}(\varepsilon) = \sum_{\mathbf{k}'}\left\{w_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + f_0(\varepsilon')(w_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} - w_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})\right\}, \qquad (5)$$

$\tau_0$ — полное время жизни электрона в состоянии с волновым вектором $\mathbf{k}$,

$$w_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = w^{\pm}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + w^{\pm}_{\mathbf{k}'\mathbf{k}},$$

$$w^{\pm}_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = w(\mathbf{q})\left(N_\omega + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}\mp\mathbf{q}}\,\delta(\varepsilon' - \varepsilon \pm \hbar\omega) \qquad (6)$$

— вероятность рассеяния на фононах с энергией $\hbar\omega$, $N_\omega$ — число фононов, описываемых функцией Бозе–Эйнштейна, $\tau_\perp(\varepsilon) = \tau_x(\varepsilon) = \tau_y(\varepsilon)$, $\tau_\parallel(\varepsilon) = \tau_z(\varepsilon)$, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k}_\perp) = \frac{\hbar^2k_\perp^2}{2m_a}$. Следует отметить, что в квазидвумерном приближении функции эффективного времени релаксации $\tau_i$ и функция $\tau_0$ становятся зависящими только от энергии поперечного движения электрона.

С учетом неупругого рассеяния на ПОФ, вероятность которого описывается формулой (6), и других механизмов рассеяния, описываемых временами релаксации $\tau_{j\perp}(\varepsilon)$ и $\tau_{j\parallel}(\varepsilon)$, уравнения (3), (4) после интегрирования по волновому вектору $\mathbf{k}'$ приводятся к функциональному виду

$$\tau_i(\varepsilon) = \tau_{0i}(\varepsilon)\left\{G_i^+(\varepsilon)\tau_i(\varepsilon + \hbar\omega) + G_i^-(\varepsilon)\tau_i(\varepsilon - \hbar\omega) + 1\right\}, \qquad (7)$$

где (см. *Приложение* I)

$$\tau_{0i}^{-1}(\varepsilon) = \tau_0^{-1}(\varepsilon) + \sum_j \tau_{ji}^{-1}(\varepsilon). \qquad (8)$$

Как известно, для полупроводников $\mathrm{A^{III}B^{V}}$ в приближении диэлектрического континуума [16] колебания дальнодействующего потенциала ПОФ по характеру зависимости скалярного потенциала от координаты вдоль оси СР можно разделить на два вида. Это так называемые волноводные (guided), или колебания G, и интерфейсные, или колебания I. Бесконечное число волноводных колебаний вырождено по частоте, которая принимает два значения, равные частотам продольных ПОФ исходных полупроводников, входящих в состав квантовой ямы — $\omega_{La}$ и потенциального барьера — $\omega_{Lb}$. Амплитуды колебаний G с частотой $\omega_{La}$ отличны от нуля только в области КЯ, тогда как для колебаний с частотой $\omega_{Lb}$ амплитуды отличны от нуля только в потенциальных барьерах (ПБ). Поэтому можно говорить о G-модах КЯ и ПБ. Интерфейсные колебания имеют четыре моды, частоты которых близки по величине к частотам продольных и поперечных ПОФ исходных полупроводников и имеют дисперсию по волновому вектору. Амплитуды колебаний I в отличие от волноводных определены на всем периоде СР.

Расчет вероятности рассеяния электронов на колебаниях G и I дальнодействующего потенциала проводился с приближенной огибающей волновой функцией $\psi$ в виде суммы Блоха по волновой функции основного состояния бесконечно глубокой КЯ:

$$\psi = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{d}{V}}\,e^{i\mathbf{k}_\perp\mathbf{r}_\perp}\sum_n e^{ik_zdn}\varphi(z - dn), \qquad (9)$$

где

$$\varphi(z) = \begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right) & |z| \le \frac{a}{2},\\ 0 & |z| > \frac{a}{2}.\end{cases} \qquad (10)$$

В этом приближении для суммарной вероятности рассеяния на всех симметричных G-модах КЯ с частотой $\omega_{\mathrm{G}} = \omega_{La}$ функцию $w(\mathbf{q})$, входящую в формулу (6), можно представить в аналитическом виде

$$w_{\mathrm{G}}(\mathbf{q}) = w_{\mathrm{G}}(q_\perp) = \frac{1}{8}C_{\mathrm{PO}}\,\frac{\pi\alpha(4+\alpha^2)(8+3\alpha^2) - 64\,\mathrm{th}(aq_\perp/2)}{\alpha^3(4+\alpha^2)^2}, \qquad (11)$$

где

$$C_{\mathrm{PO}} = \frac{e^2ad\omega_{La}}{\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_a^*V},$$

$\alpha = aq_\perp/\pi$, $a$ — ширина КЯ, $1/\varepsilon^* = 1/\varepsilon_\infty - 1/\varepsilon_s$, $V$ — объем СР. Индекс $a$ указывает на полупроводник, из которого состоит КЯ.

В случае рассеяния на I-модах с частой $\omega = \omega_\lambda(\mathbf{q})$ формула для функции $w(\mathbf{q})$ имеет следующий вид:

$$w_{\mathrm{I}}(\mathbf{q}) = 16C_{\mathrm{PO}}\,\frac{|1+\vartheta(\mathbf{q})|^2\,\mathrm{sh}(aq_\perp/2)}{\alpha^3(4+\alpha^2)^2}\,\frac{\omega_{La}c_{aL}^2}{\omega c_a^2} \times \left\{\mathrm{sh}(aq_\perp) + \frac{1}{4}e^{dq_\perp}\,\mathrm{sh}(bq_\perp)\,\frac{\rho_{\mu b}c_b^2}{\rho_{\mu a}c_a^2}\left|e^{-aq_\perp}\left(1 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\right) + \vartheta\left(1 + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\right)\right|^2\right\}^{-1}, \qquad (12)$$

где

$$c_i^2 = c_i^2(\omega) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{\infty i}(\omega_{Li}^2 - \omega_{Ti}^2)}{\rho_{\mu i}(\omega^2 - \omega_{Ti}^2)^2},$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(\omega) = \varepsilon_{\infty i}\,\frac{\omega_{Li}^2 - \omega^2}{\omega_{Ti}^2 - \omega^2},$$

$$c_{aL}^2 = c_a^2(\omega_{La}), \qquad \frac{1}{\rho_{\mu i}} = \Omega\left(\frac{1}{m_{\mathrm{A}i}} + \frac{1}{m_{\mathrm{B}i}}\right), \qquad (13)$$

$\Omega$ — объем элементарной ячейки исходных полупроводников $\mathrm{A^{III}B^{V}}$ (считается одинаковым для КЯ и ПБ);

$m_\mathrm{A}$ и $m_\mathrm{B}$ — массы атомов, входящих в элементарную ячейку; $\omega_T, \omega_L$ — частоты поперечных и продольных оптических фононов исходных полупроводников; $\vartheta = \vartheta_\lambda(\mathbf{q})$ — безразмерная комплексная функция (см. *Приложение* II); индекс $i$ принимает два значения: $a$ для КЯ и $b$ для ПБ.

В приближении объемного фононного спектра выражение для функции $w(\mathbf{q})$ с учетом процессов переброса записывается в виде [17]

$$w(\mathbf{q}) = \frac{a}{\pi d} C_{\mathrm{PO}} \sum_n \frac{\sin^2(\pi x_n)}{x_n^2(1-x_n^2)^2} \frac{1}{[\alpha^2 + 4x_n^2]}, \tag{14}$$

где

$$x_n = \frac{a}{2\pi}\left(q_z + \frac{2\pi}{d} n\right), \quad -\frac{N_z}{2} \le n < \frac{N_z}{2},$$

$N_z$ — число периодов СР.

Упругое рассеяние на акустических колебаниях описывалось с помощью изотропного времени релаксации, которое рассчитывалось по формуле [17]

$$\tau_\perp(\varepsilon) = \tau_\parallel(\varepsilon) = \tau = \frac{2}{3} \frac{a c_L \hbar^3}{m_a D_c^2 k_0 T}, \tag{15}$$

где $c_L = c_{11} + \frac{2}{5}(c_{12} + 2c_{44} - c_{11})$ — среднее значение модуля упругости продольных акустических колебаний в приближении фононного спектра объемного полупроводника, $D_c$ — константа деформационного потенциала края зоны проводимости.

Продольная и поперечная подвижности в модели эффективного времени релаксации и в квазидвумерном приближении для электронного газа СР рассчитывались по формулам [17]

$$\mu_\perp = e\langle\tau_\perp\rangle/m_\perp, \quad \mu_\parallel = e\langle\tau_\parallel\rangle/\langle m_\parallel\rangle, \tag{16}$$

где $\langle\tau_\perp\rangle$, $\langle\tau_\parallel\rangle$, $\langle m_\parallel\rangle$ — усредненные по энергии функции эффективного времени поперечной и продольной релаксации, продольной эффективной массы электронов основной минизоны:

$$\langle\tau_\perp\rangle = \frac{\rho_c}{n} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right) \tau_\perp(\varepsilon)\varepsilon\, d\varepsilon,$$

$$\langle\tau_\parallel\rangle = \left[1 - \exp(-n/N_c)\right]^{-1} \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\right) \tau_\parallel(\varepsilon)\varepsilon\, d\varepsilon, \tag{17}$$

$$\frac{1}{\langle m_\parallel\rangle} = \frac{\Delta\rho_c}{4 m_\parallel n}\left[1 - \exp(-n/N_c)\right], \tag{18}$$

где $\rho_c = m_\perp/\pi d\hbar^2$ — двумерная плотность состояний в нижней минизоне проводимости, $N_c = k_0 T \rho_c$ — эффективная плотность состояний, $m_\parallel = 2\hbar^2/\Delta^2 d^2$ — продольная эффективная масса на дне минизоны. В случае невырожденного электронного газа ($n \ll N_c$) выражение для усредненной по энергии продольной эффективной массы принимает простой вид

$$\frac{1}{\langle m_\parallel\rangle} = \frac{\Delta}{k_0 T m_\parallel}. \tag{19}$$

## 3. Анализ результатов численного расчета

Расчет продольного и поперечного эффективного времени релаксации и подвижности квазидвумерных электронов невырожденного электронного газа нижней минизоны сверхрешетки GaAs/Al$_{0.35}$Ga$_{0.65}$As проводился при следующих значениях параметров: $a = 5$ нм, $b = 5$ нм; $m_\perp = m_a = 0.066 m_0$; $\hbar\omega_{La} = 36.23$ мэВ, $\hbar\omega_{Ta} = 33.27$ мэВ; $\varepsilon_{sa} = 13.18$, $\varepsilon_{\infty a} = 10.82$; $\hbar\omega_{Lb} = 34.11$ мэВ, $\hbar\omega_{Tb} = 32.89$ мэВ; $\varepsilon_{sb} = 12.06$, $\varepsilon_{\infty b} = 9.82$ [18]. Согласно расчетам энергетического спектра зоны проводимости с учетом непараболичности Кейна [19], данная СР при $T = 300$ K имеет в КЯ одну минизону. Вторая минизона располагается на высоте потенциального барьера с энергией 260 мэВ и отделена от первой минизоны интервалом энергии 150 мэВ. С такими параметрами СР может быть использована в качестве фотодетектора инфракрасного излучения с длиной волны $\sim 7$ мкм. Значение ширины нижней минизоны $\Delta$ при рассматриваемой температуре равно 9.4 мэВ. Для СР с легированными КЯ при концентрации электронов $10^{14}$ см$^{-3}$ приведенный уровень Ферми равняется $-8.9 k_0 T$, среднее значение продольной эффективной массы, рассчитанное по формуле (19), принимает значение $1.8 m_0$.

Расчет эффективного времени продольной и поперечной релаксации на скалярном потенциале ПОФ проводился с помощью численного решения уравнений (7) методом прогонки с учетом всех I-мод и четных G-мод КЯ. Закон сохранения энергии при рассеянии учитывался в приближении $\omega_\lambda(\mathbf{q}) \approx \omega_{La}$, так как, согласно расчетам, дисперсия I-частот и разница между частотами интерфейсных мод много меньше $k_0 T$. В таблице приведены парциальные значения усредненного по энергии эффективного времени релаксации и подвижности, определяемые рассеянием на всех четных G-модах КЯ и четырех I-модах, рассчитанные при $T = 300$ K. Из таблицы следует, что рассеяние электронов на ПОФ для данной СР при комнатной температуре носит смешанный характер за счет рассеяния на интерфейсных модах I$_3$, I$_4$ и симметричных волноводных G-модах квантовой ямы. Полное время релаксации ($\Sigma$) за счет смешанного рассеяния на всех модах скалярного потенциала ПОФ почти в 2 раза превышает значение,

Парциальные значения усредненного по энергии времени релаксации невырожденных электронов на модах G и I скалярного потенциала полярных оптических фононов при $T = 300$ K

| Время релаксации | G | I$_1$ | I$_2$ | I$_3$ | I$_4$ | $\Sigma$ | V |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\langle\tau_\perp\rangle$, пс | 1.8 | 920 | 170 | 1.2 | 3.3 | 0.58 | 0.30 |
| $\langle\tau_\parallel\rangle$, пс | 2.4 | 1500 | 95 | 0.95 | 3.0 | 0.53 | 0.30 |

*Примечание.* $\Sigma$ — полное время релаксации на всех модах полярных оптических фононов, V — время релаксации на фононах объемного спектра.

полученное в приближении объемного (V) фононного спектра [17], а также превышает значение эффективного времени релаксации на ПОФ в объемном GaAs [20], равное 0.39 пс. На рис. 1 приведены температурные зависимости подвижности, определяемые рассеянием на ПОФ и АФ, рассчитанные по формулам (16)–(19). При расчете подвижности учитывалась температурная зависимость ширины минизоны, которая по формулам (18), (19) связана с температурной зависимостью продольной эффективной массы (см. рис. 2). Согласно зависимостям, представленным на рис. 1, основным механизмом рассеяния электронов СР на колебаниях решетки во всей области температур от комнатных и ниже является рассеяние на акустических фононах, тогда как в чистом GaAs при комнатной температуре рассеяние на ПОФ (кривая *3*) является более существенным, чем на АФ (кривая *3'*).

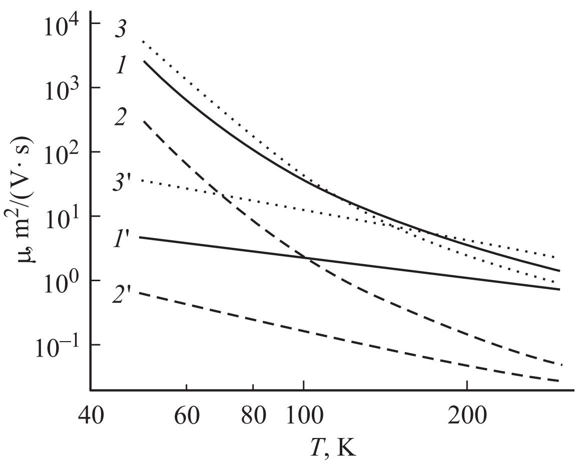


**Рис. 1.** Зависимости подвижности электронов $\mu$ от температуры при рассеянии: *1–3* — на полярных оптических фононах, *1'–3'* — на акустических фононах. *1*, *1'* — поперечная подвижность; *2*, *2'* — продольная; *3*, *3'* — в GaAs.

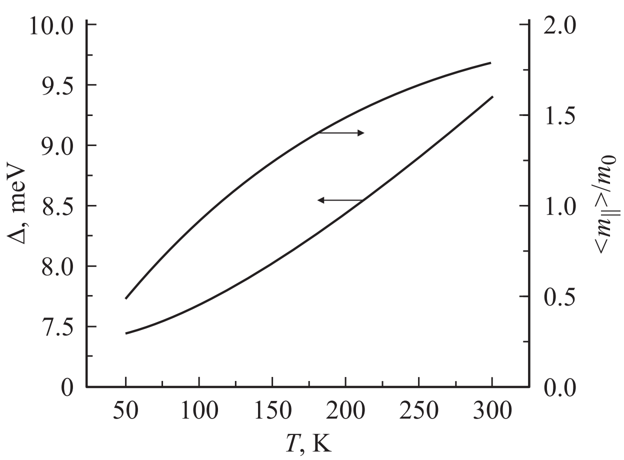


**Рис. 2.** Зависимости ширины минизоны $\Delta$ и среднего значения продольной эффективной массы электронов $\langle m_\parallel \rangle$ от температуры.

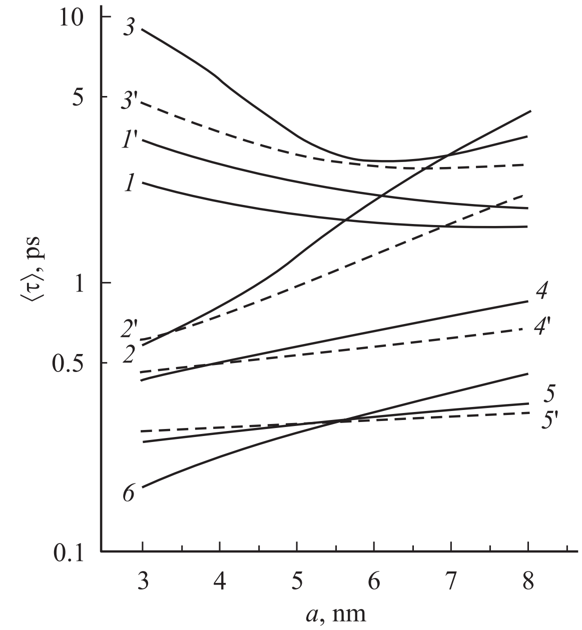


**Рис. 3.** Среднее значение эффективного времени релаксации электронов $\langle \tau \rangle$ при рассеянии на фононах в зависимости от ширины квантовой ямы при $T = 300$ K и рассеянии на модах полярных оптических фононов (ПОФ): *1*, *1'* — G; *2*, *2'* — $I_3$; *3*, *3'* — $I_4$; *4*, *4'* — время при рассеянии на всех модах ПОФ ($\Sigma$); *5*, *5'* — на фононах объемного спектра (V); *6* — на акустических фононах. *1–5* — поперечное время, *1'–5'* — продольное.

На рис. 3 представлены зависимости среднего значения эффективного времени релаксации $\langle \tau \rangle$ для электронов на ПОФ от ширины квантовой ямы. Зависимости рассчитаны при $T = 300$ K и толщине потенциального барьера $b = 5$ нм. Из рисунка следует, что с ростом ширины КЯ среднее эффективное время поперечной $\langle \tau_\perp \rangle$ и продольной $\langle \tau_\parallel \rangle$ релаксации, с учетом суммарного рассеяния на ПОФ, растет (кривые *4*, *4'*). Скорость роста $\langle \tau_\perp \rangle$ выше, чем у $\langle \tau_\parallel \rangle$, что приводит к росту анизотропии эффективного времени релаксации. При малых значениях ширины КЯ основное рассеяние происходит на интерфейсных модах $I_3$ (кривые *2*, *2'*). С ростом ширины КЯ основная роль в рассеянии на ПОФ переходит к симметричным G-модам КЯ.

## 4. Заключение

На основе численного анализа полученных результатов для рассматриваемых сверхрешеток (СР) можно сделать следующие выводы.

1) Учет перестройки скалярного потенциала полярных оптических фононов (ПОФ) в СР в модели диэлектрического континуума приводит к более слабому рассеянию, чем в приближении объемного фононного спектра.

2) Роль рассеяния на акустических фононах в СР в области комнатных температур выше, чем на ПОФ по сравнению с объемным GaAs.

3) Рассеяние на ПОФ в общем случае носит смешанный характер за счет рассеяния на симметричных G-модах квантовой ямы и интерфейсных модах с частотами, близкими к частотам продольных ПОФ объемных полупроводников, формирующих квантовые ямы и потенциальные барьеры.

## *Приложение* I

Функции поперечной энергии, входящие в функциональное уравнение (7), имеют следующий вид:

$$G_i^{\pm}(\varepsilon)=\left\{N_\omega+\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\pm f_0(\varepsilon\pm\hbar\omega)\right\}\frac{f_0'(\varepsilon\pm\hbar\omega)}{f_0'(\varepsilon)}\,S_i^{\pm}(\varepsilon), \tag{П.I.1}$$

где

$$S_\perp^{\pm}(\varepsilon)=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}'w(\mathbf{q})\,\frac{\mathbf{k}'_\perp\mathbf{k}_\perp}{k_\perp^2}\,\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}\pm\mathbf{q}}\,\delta(\varepsilon'-\varepsilon\mp\hbar\omega), \tag{П.I.2}$$

$$S_\parallel^{\pm}(\varepsilon)=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}'w(\mathbf{q})\,\frac{\sin(k_z'd)}{\sin(k_zd)}\,\delta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}\pm\mathbf{q}}\,\delta(\varepsilon'-\varepsilon\mp\hbar\omega). \tag{П.I.3}$$

В квазидвумерном приближении с учетом четной и периодической зависимости функции $w(\mathbf{q})$ по $q_z$

$$w\left(\mathbf{q}_\perp,q_z\pm\frac{2\pi}{d}\,n\right)=w(\mathbf{q}_\perp,q_z), \tag{П.I.4}$$

формулы для функций $S(\varepsilon)$ принимают следующий вид:

$$S_\perp^{\pm}(\varepsilon)=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}'_\perp w_\perp(\mathbf{q}_\perp)\,\frac{\mathbf{k}'_\perp\mathbf{k}_\perp}{k_\perp^2}\,\delta_{\mathbf{k}'_\perp,\mathbf{k}_\perp\pm\mathbf{q}_\perp}\,\delta(\varepsilon'-\varepsilon\mp\hbar\omega), \tag{П.I.5}$$

$$S_\parallel^{\pm}(\varepsilon)=\frac{V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}'_\perp w_\parallel(\mathbf{q}_\perp)\delta_{\mathbf{k}'_\perp,\mathbf{k}_\perp\pm\mathbf{q}_\perp}\,\delta(\varepsilon'-\varepsilon\mp\hbar\omega), \tag{П.I.6}$$

где

$$w_\perp(\mathbf{q}_\perp)=2\int_0^{\pi/2}w(\mathbf{q})\,dq_z,$$

$$w_\parallel(\mathbf{q}_\perp)=2\int_0^{\pi/d}w(\mathbf{q})\cos(q_zd)\,dq_z. \tag{П.I.7}$$

## *Приложение* II

Согласно модели диэлектрического континуума [16], скалярный потенциал полярных оптических фононов СР для мод G и I в нормальных координатах имеет вид

$$V(\mathbf{r})=\sum_{\lambda\mathbf{q}}\left(\frac{\hbar}{2\omega_{\lambda\mathbf{q}}\rho_\mu(z)}\right)^{1/2}\left[a_\lambda^+(-\mathbf{q})+a_\lambda(\mathbf{q})\right]f_{\lambda\mathbf{q}}(z)\,e^{i\mathbf{q}_\perp\mathbf{r}_\perp}, \tag{П.II.1}$$

где $\rho_\mu(z)$ — удельная приведенная масса атомов элементарной ячейки, $\lambda$ — номер колебательной моды. Функция $f(z)$, удовлетворяющая теореме Блоха с периодом СР $d$, является решением уравнения Пуассона:

$$\nabla\varepsilon(z)\nabla\,\frac{1}{\sqrt{\rho_\mu(z)}}\,f(z)\,e^{i\mathbf{q}_\perp\mathbf{r}_\perp}=0, \tag{П.II.2}$$

где

$$\varepsilon(z)=\varepsilon(z+dm)=\varepsilon_\infty\,\frac{\omega_L^2-\omega^2}{\omega_T^2-\omega^2}$$

— функция высокочастотной диэлектрической проницаемости в полупроводниках $\mathrm{A^{III}B^{V}}$. Для интерфейсных колебаний, частоты которых не совпадают с частотой продольных оптических фононов объемного спектра полупроводников КЯ и ПБ, функция $f(z)$ является решением уравнения

$$\frac{d}{dz}\,f(z)=q_\perp^2\,f(z), \tag{П.II.3}$$

и на периоде СР с началом координат в центре КЯ имеет следующий вид:

$$f(z)=\begin{cases}A_1e^{q_\perp z}+B_1e^{-q_\perp z}, & -a/2\le z<a/2;\\ A_2e^{q_\perp z}+B_2e^{-q_\perp z}, & -d/2\le z<-a/2;\\ A_3e^{q_\perp z}+B_3e^{-q_\perp z}, & a/2\le z<d/2.\end{cases} \tag{П.II.4}$$

Неизвестные амплитуды, входящие в (П.II.4), удовлетворяют системе линейных уравнений, вытекающих из граничных условий для скалярного потенциала и нормальной составляющей напряженности электрического поля на гетерограницах. Из условия нетривиального решения этой системы следует секулярное уравнение для частот интерфейсных колебаний

$$\mathrm{ch}(aq_\perp)\,\mathrm{ch}(bq_\perp)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{sh}(aq_\perp)\,\mathrm{sh}(bq_\perp)=\cos(dq_z), \tag{П.II.5}$$

где

$$x=x(\omega)=\varepsilon_a(\omega)/\varepsilon_b(\omega). \tag{П.II.6}$$

Уравнение (П.II.5) относительно $x$ является алгебраическим уравнением 2-го порядка, корни которого можно представить в аналитическом виде:

$$x_{1,2}=w\pm\sqrt{w^2-1}, \tag{П.II.7}$$

где

$$w=\frac{\cos(dq_z)-\mathrm{ch}(aq_\perp)\,\mathrm{ch}(bq_\perp)}{\mathrm{sh}(aq_\perp)\,\mathrm{sh}(bq_\perp)}.$$

Каждому из корней $x$, согласно уравнению (П.II.6), соответствуют две частоты:

$$\omega_{1,2}^2=u\pm\sqrt{u^2-\frac{\varepsilon_{\infty a}\omega_{La}^2\omega_{Tb}^2-\varepsilon_{\infty b}\omega_{Lb}^2\omega_{Ta}^2\,x}{\varepsilon_{\infty a}-\varepsilon_{\infty b}\,x}}, \tag{П.II.8}$$

где

$$u=\frac{\varepsilon_{\infty a}(\omega_{La}^2+\omega_{Tb}^2)-\varepsilon_{\infty b}(\omega_{Lb}^2+\omega_{Ta}^2)x}{2(\varepsilon_{\infty a}-\varepsilon_{\infty b}\,x)}.$$

Функцию $\vartheta = \vartheta_\lambda(\mathbf{q})$, входящую в (10), с учетом (П.II.4) и (П.II.6) можно представить в виде

$$\vartheta = \vartheta_\lambda(\mathbf{q}) = \frac{B_1}{A_1}$$
$$= \frac{(e^{idq_z} + e^{aq_\perp})(e^{bq_\perp} - 1)x - (e^{idq_z} - e^{aq_\perp})(e^{bq_\perp} + 1)}{(e^{idq_z}e^{aq_\perp} + 1)(e^{bq_\perp} - 1)x + (e^{idq_z}e^{aq_\perp} - 1)(e^{bq_\perp} + 1)}. \tag{П.II.9}$$

Из решения системы линейных уравнений для амплитуд в ПБ имеем

$$B_2 = B_3\, e^{-(q_\perp + iq_z)d}, \quad A_2 = A_3\, e^{(q_\perp - iq_z)d}; \tag{П.II.10}$$

$$A_3 = \sqrt{\frac{\rho_{\mu b}}{\rho_{\mu a}}}\left\{\frac{1+x}{2}\, A_1 + \frac{1-x}{2}\, B_1 e^{-aq_\perp}\right\},$$
$$B_3 = \sqrt{\frac{\rho_{\mu b}}{\rho_{\mu a}}}\left\{\frac{1-x}{2}\, A_1 e^{aq_\perp} + \frac{1+x}{2}\, B_1\right\}. \tag{П.II.11}$$

Выражение для нормированной амплитуды $A_1$, связанное с переходом к нормальным координатам, можно представить в виде аналитической функции

$$A_1 = \sqrt{\frac{d}{q_\perp V}}\Bigg\{4c_a^2\,\mathrm{sh}(aq_\perp) + c_b^2 e^{dq_\perp}\,\mathrm{sh}(bq_\perp)\,\frac{\rho_{\mu b}}{\rho_{\mu a}}$$
$$\times\left|e^{-aq_\perp}\left(1 - \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\right) + \vartheta\left(1 + \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\right)\right|^2\Bigg\}^{-1/2}. \tag{П.II.12}$$

Для симметричных волноводных G-мод КЯ с частотой $\omega_{La}$ и номером $m = 2n + 1$ нормированная функция $f_{m\mathbf{q}}(z)$, входящая в формулу для скалярного потенциала (П.II.1), на периоде СР имеет вид

$$f_{m\mathbf{q}}(z) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2ad}{c_{aL}^2 V}}\cos\left(\dfrac{\pi}{a}\, mz\right) / \left[(aq_\perp)^2 + (m\pi)^2\right]^{1/2}, & |z| \le \dfrac{a}{2}; \\ 0, & \dfrac{a}{2} < |z| < \dfrac{d}{2}. \end{cases} \tag{П.II.13}$$

Следует отметить, что в случае волноводных мод функция $f_{m\mathbf{q}}(z)$ не зависит от продольной компоненты волнового вектора и с ростом $m$ быстро убывает.

В приближении спектра объемных ПОФ функция $f(z)$ имеет одну ветвь и с учетом формулы (П.II.1) может быть представлена в виде

$$f_{\mathbf{q}}(z) = -i\sqrt{\frac{\rho_\mu(z)}{\varepsilon_0\varepsilon^*(z)V}}\,\frac{\omega_L(z)}{q}\,\exp(iq_z z). \tag{П.II.14}$$

## Список литературы


[1] B.K. Ridley. Phys. Rev. B, **39**, 5282 (1989).
[2] G.Q. Hai, F.M. Peeters, J.T. Devreese. Phys. Rev. B, **48**, 4666 (1993).
[3] G.Q. Hai, F.M. Peeters, J.T. Devreese. Phys. Rev. B: Third Series, **62**, 10 572 (2000).
[4] V.V. Bondarenko, F.F. Sizov. Phys. Low-Dim. Structure, N 8–9, 123 (1995).
[5] Д.Н. Мирлин, А.В. Родина. ФТТ, **38**, 3201 (1996).
[6] X. Zianni, C.D. Simserides, G.P. Triberis. Phys. Rev. B, **55**, 16 324 (1997).
[7] C.R. Bennett, M.A. Amato, N.A. Zakhleniuk, B.K. Ridley, M. Babiker. J. Appl. Phys., **83**, 1499 (1998).
[8] B.A.S. Camacho. Phys. St. Sol. B, **220**, 53 (2000).
[9] J. Pozela, A. Namajunas, K. Pozela, V. Juciene. Physica E, **5**, 108 (1999).
[10] Z. Yisong, Lu Tianquan, Liu Jiang, Su Wenhui. Semicond. Sci. Technol., **12**, 1235 (1997).
[11] M. Alcalde Augusto, Weber Gerald. Phys. Rev. B, **56**, 9619 (1997).
[12] Duan Wenhui, Zhu Jia-Lin, Gu Bing-Lin, Wu Jian. Sol. St. Commun., **114**, 101 (2000).
[13] K. Pozela, ФТП, **35**, 1361 (2001).
[14] D.R. Anderson, N.A. Zakhleniuk, M. Babiker, B.K. Ridley, C.R. Bennett. Phys. Rev. B: Third Series, **63**, 245 313 (2001).
[15] G.J. Warren, P.N. Butcher. Semicond. Sci. Technol., **1**, 133 (1986).
[16] I. Dharssi, P.N. Butcher. J. Phys.: Condens. Matter., **2**, 119 (1990).
[17] С.И. Борисенко. ФТП, **36**, 861 (2002).
[18] Landolt-Börnstein. *Numerical Date and Functional Relationships in Science and Technology*, ed. by O. Madelung (Springer Verlag, Berlin, 1987) New Series III, v. 22a.
[19] С.И. Борисенко, Г.Ф. Караваев. ФТП, **32**, 607 (1998).
[20] С.И. Борисенко. ФТП, **35**, 313 (2001).


*Редактор Т.А. Полянская*

## Scattering of quasi–$2D$ electrons by phonons in superlattice GaAs/$Al_xGa_{1-x}$As

*S.I. Borisenko*

Siberian Physical and Technical Institute,
634050 Tomsk, Russia

**Abstract** Calculations of longitudinal and transversal electron mobility for the lowest miniband of GaAs/$Al_{0.35}Ga_{0.65}$As superlattice (SL) is carried out in the case of scattering by long-range potential polar optical phonons (POP) at $T = 300$ K. The analysis of the partial contributions for different modes of POP long-range potential vibrations in to mobility and the effective relaxation time is carried out. Dependence of the mobility and effective relaxation time due to POP and acoustic phonons from of a SL quantum well width and temperature was investigated. The calculation was carried out using a linearized Boltzmann equation. POP scalar potential was calculated in approximation dielectric continuum.