

09

## Сверхизлучение импульса остановленной поляризации в тонком слое пятиуровневой среды, возбуждаемой субцикловыми аттосекундными импульсами

© Р.М. Архипов<sup>1,2</sup>, А.В. Пахомов<sup>1</sup>, М.В. Архипов<sup>1</sup>, Н.Н. Розанов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
199034 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> ФТИ имени А.Ф. Иоффе,  
194021 Санкт-Петербург, Россия

e-mail: arhipovrostislav@gmail.com, antpakhom@gmail.com, m.arkhipov@spbu.ru, nnrosanov@mail.ru

Поступила в редакцию 27.11.2022 г.

В окончательной редакции 27.11.2022 г.

Принята к публикации 12.12.2022 г.

При возбуждении оптически тонкого слоя резонансной среды парой сверхкоротких электромагнитных импульсов с определенной задержкой между ними в среде формируется импульс поляризации в виде полуволны (импульс остановленной поляризации). Он возникает, когда первый импульс возбуждения создает колебания поляризации среды на частоте резонансного перехода, а второй возбуждающий импульс останавливает их. Такой импульс поляризации может являться источником сверхизлучения — коллективного спонтанного излучения, как оптически тонкой, так и протяженной среды. Ранее особенности такого сверхизлучения изучались, когда среда моделировалась в двух- или трехуровневом приближении, или использовалась модель нелинейного классического гармонического осциллятора. Однако при возбуждении резонансной среды сверхкоротким импульсом с широким спектром происходит возбуждение многих энергетических уровней среды, и малоуровневые модели могут в недостаточно полной степени описывать динамику среды в поле таких импульсов. В данной работе теоретически рассматривается сверхизлучение остановленной поляризации в тонком слое пятиуровневой резонансной среды, параметры которой такие же, как в атоме водорода, с помощью численного решения системы уравнений для амплитуд связанных состояний совместно с волновым уравнением. Среда возбуждается парой полупериодных аттосекундных импульсов. Показано, что в случае многоуровневой среды, при определенных параметрах возбуждающего поля, импульс сверхизлучения вблизи среды также представляет собой одноцикловый импульс, форма которого определяется первой производной по времени от импульса остановленной поляризации, как и в случае, когда для описания отклика среды использовались приближенные малоуровневые и классические модели.

**Ключевые слова:** сверхизлучение, аттосекундные импульсы, импульс остановленной поляризации, униполярные импульсы, субцикловые импульсы.

DOI: 10.21883/OS.2023.01.54541.4375-22

### Введение

Получение сверхкоротких электромагнитных импульсов фемто- и аттосекундной длительности в последние десятилетия занимает важное место в современной оптике [1]. Данной тематике посвящено большое количество обзоров, вышедших в последнее время [2–7]. Интерес к получению сверхкоротких импульсов связан с тем, что импульсы такой малой длительности активно используются для изучения и управления динамикой волновых пакетов в атомах, молекулах, твердых телах и т.д. [7–9].

Например, в последнее время активно изучается возможность использования импульсов аттосекундной длительности для изучения динамики населенностей связанных состояний в твердом теле [10], изучения миграции зарядов в молекулах [11]. С помощью аттосекундных импульсов выявлена возможность управления формой

линии поглощения в молекулах в экстремально ультрафиолетовой области спектра (XUV) [12], измерена относительная задержка в отклике электронов в диэлектрической системе, вызванная сильным полем импульсов длительностью в несколько периодов поля [13,14]. Использование последовательности XUV-аттосекундных импульсов позволяет изучать динамику многофотонной ионизации атомных систем [15].

На сегодняшний день предложены многочисленные схемы по получению аттосекундных импульсов. Все они базируются на методе генерации гармоник высокого порядка (ГГВП), возникающих при облучении различных мишеней фемтосекундным лазерным импульсом [1–9]. Обсуждаются различные схемы стробирования (gating) по выделению одиночного аттосекундного импульса из общей последовательности [16]. Помимо получения аттосекундных импульсов за счет ГГВП стоит упомянуть различные методы получения таких импульсов, основан-

ные на ускорении или торможении электронов в плазме [17–19]. Известны также методы выделения одиночных всплесков поля одоциклового и субциклового формы за счет фурье-синтеза широкополосной накачки [13,14]. Обсуждается возможность получения уже униполярных полупериодных импульсов с ненулевой электрической площадью, которые могут оказывать более быстрое и эффективное возбуждение квантовых систем по сравнению с обычными многоцикловыми импульсами [20–22].

Во всех предложенных способах получения фемто- и аттосекундных импульсов их источником является кратковременный импульс поляризации среды или импульс тока свободных электронов, созданный внешним ультракоротким импульсом накачки [1–9]. Недавно были предложены альтернативные методы получения сверхкоротких импульсов в резонансной среде за счет сверхизлучения импульса остановленной поляризации в резонансной среде, возбуждаемой парой ультракоротких импульсов накачки [22–29]. В этом случае первый импульс создает в среде колебания нелинейной поляризации на частоте резонансного перехода, а второй импульс, действующий спустя интервал времени, равный половине периода колебаний резонансного перехода  $T_0/2$ , останавливает эти колебания. При этом импульс поляризации имеет форму полуволны и условно называется импульсом остановленной поляризации (stopped polarization pulse) (ИОП). Данный ИОП может являться источником сверхизлучения системы возбуждаемых центров [29].

Отметим, что сверхизлучение — это коллективное спонтанное излучение сосредоточенной системы сфазированных осцилляторов (диполей). Оно было впервые предсказано Дике в 1954 г. [30]. В настоящее время данный термин „сверхизлучение“ используется для описания разнообразного класса задач в различных системах [31]. Неизменным во всех контекстах остается лишь значение термина „сверхизлучение“, которое характеризует наличие сфазированности излучения излучающих центров — атомов, молекул, спинов, квантовых точек и т.д. [31]. Такого рода явления сверхизлучения в указанном выше смысле, при котором проявляется именно коллективный характер излучения сфазированного ансамбля активных частиц, на сегодняшний день изучены для широкого класса систем, см., например, [31–36] и цитируемую литературу.

В нашем случае длительность возбуждаемых импульсов и интервал между ними предполагаются короче времени релаксации поляризации среды  $T_2$ , поэтому излучающие центры будут излучать сфазированно на рассматриваемых временных интервалах. Также излучение поля за счет ИОП формируется между парой внешних импульсов излучения, т.е. фактически в отсутствие внешнего поля. В этом смысле излучение среды может считаться спонтанным [37]. Таким образом, ниже для рассматриваемого нами процесса ИОП среды мы будем использовать термин „сверхизлучение“ в указанном выше широком смысле — коллективное спонтанное излучение сфазированной системы диполей.

В протяженной среде данный ИОП может быть использован для получения униполярных импульсов необычной негармонической формы — прямоугольных и треугольных — в ТГц диапазоне [23,24]. Также при возбуждении тонкого слоя среды парой импульсов накачки в отраженном поле возможно получение одноциклового импульса ТГц излучения [25] или одноциклового импульса аттосекундной длительности в XUV-диапазоне за счет сверхизлучения ИОП [26,27]. Результаты этих работ резюмированы в обзоре [29].

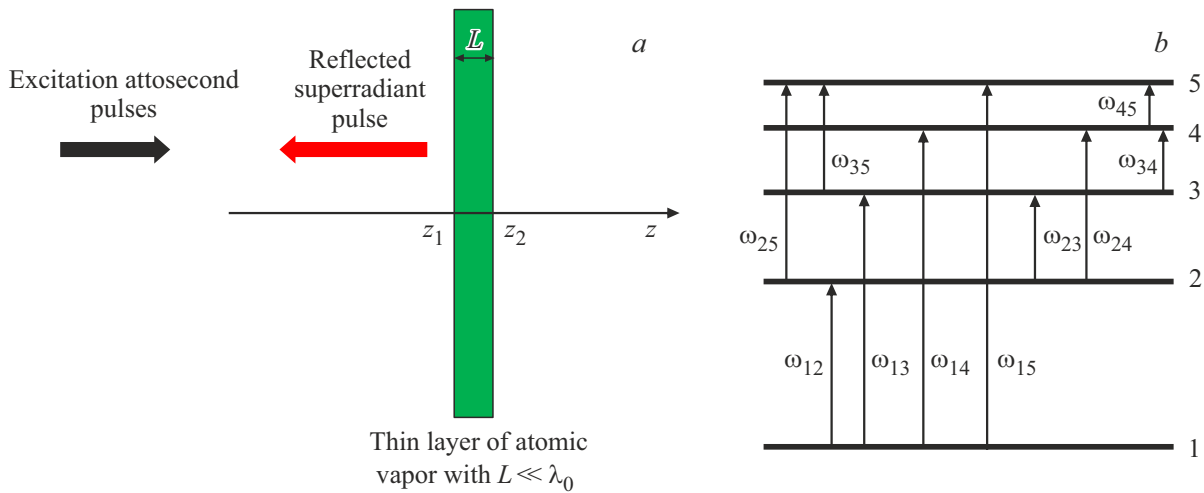
В работе [38] изучены особенности сверхизлучения ИОП, распространяющегося в протяженной резонансной среде и создаваемого парой полупериодных аттосекундных импульсов. Это может приводить к получению униполярных импульсов ТГц излучения прямоугольной или треугольной формы в неоднородной среде [39].

Однако в упомянутых исследованиях использовались простейшие модели среды в виде классического нелинейного осциллятора, или среда моделировалась в малоуровневом приближении, см. обзор [29]. Но реальные среды являются многоуровневыми — при возбуждении такой среды сверхкоротким импульсом с широким спектром возбуждается большое число уровней. Это может приводить к тому, что ИОП, который с легкостью может быть создан в среде из классических осцилляторов (двухуровневой среды), имеющих одну частоту перехода, может не возникать в реальной многоуровневой среде. Поэтому вопрос сверхизлучения ИОП в реальной среде с большим числом уровней требует отдельного исследования.

В данной работе на основании численного решения уравнений для амплитуд связанных состояний (вытекающих из временного уравнения Шредингера) изучено сверхизлучение ИОП для пятиуровневой среды, возбуждаемой парой аттосекундных импульсов, следующих с периодом, равным половине периода резонансного перехода из основного в первое возбужденное состояние. Параметры среды выбираются (частоты переходов и дипольные моменты), как в атоме водорода. Показано, что при определенных параметрах внешних импульсов в отраженном поле также возникает одноциклового импульс сверхизлучения ИОП среды, как и в случае, когда использовались приближенные малоуровневые или классические модели среды.

## Рассматриваемая система и модель

Рассматриваемая схема возбуждения импульса сверхизлучения представлена на рис. 1. Оптически тонкий слой среды толщины  $L$  располагается перпендикулярно оси  $z$ , между точками  $z_1$  и  $z_2$ . Среда моделируется в пятиуровневом приближении со сбегающей схемой уровней, как в атомных системах (рис. 1, *b*). В качестве модельной среды был взят атомарный водород, соответствующие значения частот и дипольных моментов переходов приведены ниже в таблице. Стоит отметить,



**Рис. 1.** Схема, в которой возникает сверхизлучение ИОП в пятиуровневой резонансной среде (а), возбуждаемой парой субцикловых аттосекундных импульсов; (b) схема рабочих уровней пятиуровневой среды. Указаны номера уровней и частоты резонансных переходов.

что были использованы значения для первых 5 уровней атома водорода со значениями главного квантового числа от 1 до 5, т.е. мы не учитывали наличие S-, P- и D-подуровней, а подразумевали их все в составе соответствующих вырожденных уровней [40].

Слой возбуждается парой униполярных аттосекундных импульсов, которые рассматриваются в одномерном приближении в виде плоских волн, распространяющихся вдоль оси  $z$ . Одномерное распространение униполярных импульсов может быть реализовано в коаксиальных волноводах [41].

Интервал следования импульсов равен половине периода  $T_0/2$  резонансного перехода в среде из основного состояния в первое возбужденное. Форма импульсов берется в виде

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} + E_0 e^{-\frac{(t-T_d)^2}{\tau^2}}, \quad (1)$$

$T_d = T_0/2$  — задержка между импульсами,  $E_0$  — амплитуда импульсов,  $\tau$  — их длительность.

Отклик пятиуровневой среды на внешнее поле описывается с помощью уравнений для амплитуд связанных состояний, которые имеют вид [42]:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{n=1}^5 \psi_n(\mathbf{r}) a_n(t) e^{-iE_n t/\hbar}, \\ \omega_{nl} &= \frac{E_n - E_l}{\hbar}, \\ a_n(t) &= \frac{i}{\hbar} \sum_{m=1}^5 d_{nm} a_m(t) E(t) e^{i\omega_{nm} t}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a_n(t)$  — амплитуды разложения волновой функции атома по собственным волновым функциям  $\psi(\mathbf{r})$ ,  $d_{nm}$  — дипольные моменты переходов между уровнями  $n$  и  $m$ ,

а  $\omega_{nm}$  — соответствующие частоты переходов. Отметим, что мы пренебрегаем релаксационными членами в уравнениях (2), так как времена жизни возбужденных уровней лежат, как правило, в наносекундном диапазоне, в то время как периоды резонансных переходов в рассматриваемой системе, как видно из таблицы, составляют лишь несколько фемтосекунд.

На основании численного решения системы уравнений (2) вычислялась поляризация среды, которая даётся выражением [42]:

$$P(t) = N_0 \sum_{n=1}^5 d_{nm} a_n(t) a_m^*(t) e^{i\omega_{nm} t} + c.c., \quad (3)$$

где  $N_0$  — объемная концентрация атомов. Эволюция электрического поля описывается одномерным волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P(z, t)}{\partial t^2}, \quad (4)$$

в котором  $E$  — напряженность электрического поля с фиксированной линейной поляризацией,  $c$  — скорость света в вакууме.

В рассматриваемом случае рис. 1 аналитическое решение волнового уравнения (4) для поля, отраженного от слоя среды (импульса сверхизлучения), генерируемого ИОП  $P(z, t)$ , имеет вид [43]:

$$E_s(z, t) = -\frac{2\pi}{c} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial}{\partial t} P \left( z', t - \frac{|z - z'|}{c} \right) dz'. \quad (5)$$

В нашем случае среда представляет собой оптически тонкий слой атомных паров, показанный на рис.1, толщина которого предполагается много меньше длины

Частоты переходов и дипольные моменты для первых 5 уровней атомарного водорода, а также параметры возбуждающих импульсов и слоя среды

Длительность импульсов возбуждения	$\tau = 30 \text{ as}$
Частота перехода 12 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{12} = 1.55 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{12} = 121.6 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 12	$d_{12} = 3.27 \text{ D}$
Частота перехода 13 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{13} = 1.84 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{13} = 102.6 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 13	$d_{13} = 1.31 \text{ D}$
Частота перехода 14 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{14} = 1.94 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{14} = 97.3 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 14	$d_{14} = 0.77 \text{ D}$
Частота перехода 15 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{15} = 1.98 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{15} = 95.0 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 15	$d_{15} = 0.53 \text{ D}$
Частота перехода 23 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{23} = 2.87 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{23} = 656.6 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 23	$d_{23} = 12.63 \text{ D}$
Частота перехода 24 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{24} = 3.88 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{24} = 486.1 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 24	$d_{24} = 4.85$
Частота перехода 25 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{25} = 4.34 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{25} = 434.1 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 25	$d_{25} = 2.83 \text{ D}$
Частота перехода 34 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{34} = 1.01 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{34} = 1875.1 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 34	$d_{34} = 29.33 \text{ D}$
Частота перехода 35 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{35} = 1.47 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{35} = 1281.8 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 35	$d_{35} = 10.76 \text{ D}$
Частота перехода 45 в атоме водорода (длина волны перехода)	$\omega_{45} = 4.63 \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$ ( $\lambda_{45} = 4067.2 \text{ nm}$ )
Дипольный момент перехода 45	$d_{45} = 29.93 \text{ D}$
Концентрация частиц в слое	$N_0 = 2.7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$
Толщина слоя среды	$L = 20 \text{ nm}$

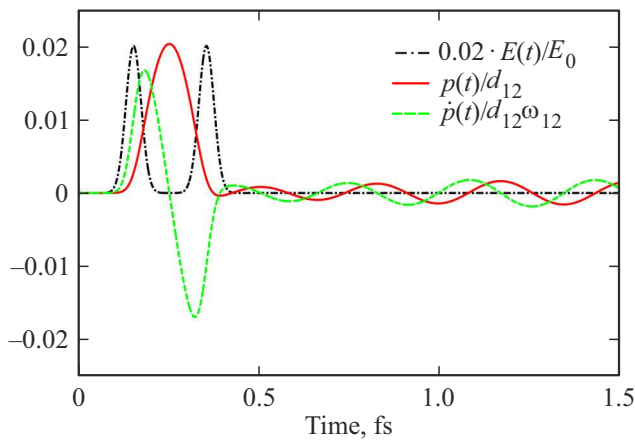
волны,  $L \ll \lambda_0$ , тогда выражение (5) для поля импульса сверхизлучения существенно упрощается и имеет вид [26–28]:

$$E_s(t) = -\frac{2\pi}{c}LN_0\frac{\partial}{\partial t}p(t), \quad (6)$$

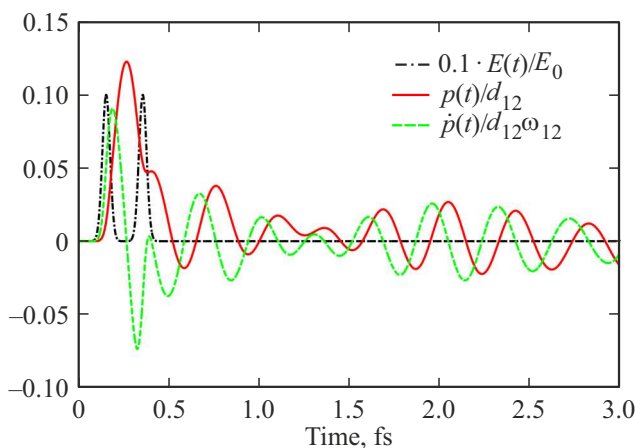
т.е. отклик такого тонкого слоя определяется временной зависимостью первой производной по времени от поляризации среды. Здесь  $p$  — поляризация единичного атома,  $P = N_0p$ ,  $N_0$  — концентрация атомов в слое.

## Результаты численного моделирования и обсуждение результатов

Рассмотрим для начала возбуждение единичного атома водорода последовательностью из двух аттосекундных униполярных импульсов (1), причём задержка между импульсами равна половине периода для перехода между уровнями 1 и 2. На рис. 2 показаны соответствующие значения поляризации единичного атома и её



**Рис. 2.** Оптический отклик единичного атома водорода в 5-уровневом приближении при возбуждении парой субцикловых униполярных импульсов длительности  $\tau = 30$  as и амплитудой  $E_0 = 10^5$  ESU (показаны черной штрихпунктирной линией); все величины отображены в безразмерных единицах.



**Рис. 3.** Оптический отклик единичного атома водорода в 5-уровневом приближении при возбуждении парой субцикловых униполярных импульсов длительности  $\tau = 30$  as и амплитудой  $E_0 = 5 \cdot 10^5$  ESU (показаны черной штрих-пунктирной линией); все величины отображены в безразмерных единицах.

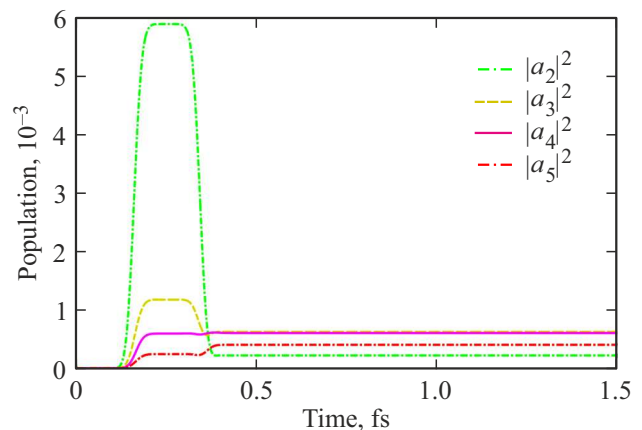
производной по времени при длительности возбуждающих импульсов  $\tau = 30$  as и амплитуде  $E_0 = 10^5$  ESU. Видно, что второй из импульсов (1) почти полностью останавливает осцилляции поляризации, вызванные воздействием первого импульса. В результате временная зависимость поляризации хорошо аппроксимируется полуволной на частоте перехода 1–2. Вклад вышележащих уровней, однако, приводит к наличию заметных хвостов, так как осцилляции поляризации на частотах всех других переходов не будут полностью остановлены вторым импульсом, а могут даже наоборот быть лишь усилены. Следовательно, относительный вклад остаточных хвостов поляризации зависит от того, насколько сильно будут населяться уровни выше второго по сравнению

с заселенностью второго уровня. Проведенные расчеты показывают, что вкладом более высоких уровней допустимо пренебречь, и соответственно описывать поляризацию среды полуволной на частоте перехода 1–2 для амплитуд возбуждающих импульсов вплоть до значений порядка  $10^5$  ESU.

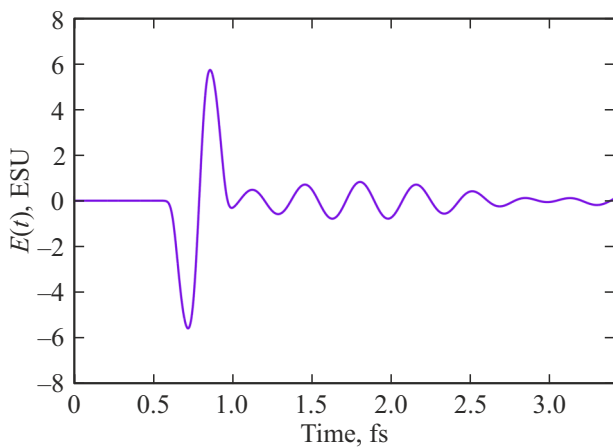
На рис. 3 показан рассчитанный отклик среды при увеличении амплитуды импульсов до величины  $E_0 = 5 \cdot 10^5$  ESU. Хорошо видно, что второй возбуждающий импульс уже не может эффективно остановить осцилляции поляризации среды из-за существенного вклада верхних уровней. В результате остаточные хвосты поляризации имеют амплитуду, сопоставимую с амплитудой основной полуволны поляризации.

Рассмотрим теперь вид временной производной от поляризации среды, которая в соответствии с уравнением (6) будет определять вид излучаемого поля. Данная временная производная для единичного атома показана зелеными штриховыми линиями на рис. 2–3. Видно, что при амплитуде возбуждающих импульсов вплоть до значений порядка  $10^5$  ESU данная производная по времени может быть достаточно точно описана как один цикл гармонических колебаний на частоте перехода 1–2, т.е. один период синусоиды. Заметим, что точная форма полученного импульса существенно зависит от длительности возбуждающих импульсов  $\tau$ , а точнее от соотношения между ней и временной задержкой между импульсами  $T_d = T_0/2$ . В случае уменьшения значения  $\tau$  по сравнению со значением из рис. 2 вместо одного периода синусоиды мы получим более резкий рост поля во время действия первого импульса и более резкое уменьшение во время действия второго импульса, между которыми будет, однако, гармоническая полуволна длительности  $T_d = T_0/2$  на частоте перехода 1–2.

Остаточные хвосты в излучаемом поле возникают вследствие вклада в поляризацию от других возможных переходов, как видно из уравнения (3). При больших же амплитудах импульсов, как на рис. 3, приближение вре-



**Рис. 4.** Населённости уровней атома водорода в 5-уровневом приближении при возбуждении парой субцикловых униполярных импульсов для параметров из рис. 3.



**Рис. 5.** Отраженное поле от слоя атомарного водорода толщиной 20 nm и давлением в 1 atm при возбуждении парой субцикловых униполярных импульсов длительности  $\tau = 30$  as и амплитудой  $E_0 = 10^3$  ESU.

менной производной поляризации периодом синусоиды уже непременно, так как возникающие хвосты имеют почти такую же амплитуду, как и начальная одноцикловая синусоида. Причиной этого является возбуждение более высоких уровней, что показано на рис. 4. Как хорошо видно, населенности уровней 3, 4 и 5 после прохождения второго возбуждающего импульса остаются существенно выше, чем населенность уровня 2, что означает наличие остаточных осцилляций поляризации на соответствующих переходах.

## Сверхизлучение оптически тонкого слоя атомов водорода

Наконец, обратимся к излучению не от единичного атома, а от целого тонкого слоя, параметры которого приведены в таблице. Для этого численно решалось волновое уравнение (1) методом FDTD (finite-difference time-domain), в то время как для отклика среды численно решались уравнения (2) методом Рунге–Кутты высокого порядка. Временная зависимость рассчитанного в отражении от слоя электрического поля показана на рис. 5.

Видно, что поле на рис. 5 хорошо согласуется с временной производной поляризации единичного атома на рис. 2, что обеспечивается выбором малой толщины слоя. В результате излучаемое поле представляет собой один цикл синусоиды на частоте перехода 1–2, за которым следует остаточный хвост от вклада других переходов в рассматриваемой многоуровневой среде.

## Заключение

Таким образом, в данной работе было теоретически изучено сверхизлучение тонкого слоя пятиуровневой

среды, имеющей параметры, как в атоме водорода. Среда возбуждалась парой униполярных субцикловых аттосекундных импульсов, следующих с периодом, равным половине периода резонансного перехода из основного состояния атома в первое возбужденное состояние. На основании численного решения уравнений для амплитуд связанных состояний показано, что при длительности импульсов возбуждения в несколько десятков аттосекунд, в многоуровневой среде может получаться полуволна остановленной поляризации. При этом в отраженном поле возникает импульс сверхизлучения среды, форма которого вблизи слоя среды определяется первой производной по времени от наведенной поляризации. Следует отметить, что этот результат согласуется с полученными ранее, когда использовались приближенные модели среды, для амплитуд возбуждающих импульсов вплоть до значений порядка  $10^5$  ESU. При более высокой напряженности поля возбуждения начинают заселяться верхние уровни среды, в результате чего форма поляризации может заметно отличаться от идеальной полуволны.

Исследованный эффект сверхизлучения, по нашему мнению, может наблюдаться в тонких пленках (струях) атомарных и молекулярных газовых сред. Возможно, его следует ожидать при использовании в качестве среды тонкой пленки из наночастиц (квантовых ям). В квантовых ямах (например, одномерных) структура уровней уже не такая, как в атомах, показанная на рис. 1. Расстояние между энергетическими уровнями увеличивается при приближении к потолку ямы, в то время как в атомных системах расстояние между уровнями уменьшается. Поэтому задача о возникновении ИОП в квантовых ямах требует отдельного исследования, основанного на численном решении временного уравнения Шредингера и выходит за рамки данной статьи.

Проведенное исследование показывает возможность применения полупериодных униполярных аттосекундных импульсов для сверхбыстрого управления излучением и свойствами различных материалов и открывает новые направления в исследовании взаимодействия униполярных субцикловых импульсов света с веществом в рамках нового направления в современной оптике — „Оптика униполярного и субциклового света“, возникшего недавно и активно развивающегося в последнее время, см. обзор [21].

## Благодарности

Авторы выражают благодарность Вл.В. Кочаровскому и Е.Р. Кочаровской за полезные обсуждения задачи о сверхизлучении остановленной поляризации в резонансной среде.

## Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФНФ в рамках научного проекта 21-72-10028.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] F. Krausz, M. Ivanov. *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 163 (2009).
- [2] G. Mourou. *Rev. Mod. Phys.*, **91**, 030501 (2019).
- [3] J.A. Fülöp, S. Tzortzakis, T. Kampfrath. *Advanced Optical Materials*, **8**, 1900681 (2020).
- [4] J. Biegert, F. Calegari, N. Dudovich, F. Quéré, M. Vrakking. *J. Phys. B*, **54**, 070201 (2021).
- [5] K. Midorikawa. *Nat. Photon.*, **16**, 267 (2022).
- [6] E.A. Хазанов. *Квант. электрон.*, **52**, 208 (2022). [E.A. Khazanov. *Quant. Electron.*, **52**, 208 (2022)].
- [7] F. Calegari, G. Sansone, S. Stagira, C. Vozzi, M. Nisoli. *J. Phys. B*, **49**, 062001 (2016).
- [8] K. Ramasesha, S.R. Leone, D.M. Neumark. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, **67**, 41 (2016).
- [9] T. Witting, M. Osolodkov, F. Schell, F. Morales, S. Patchkovskii, P. Šušnjar, F.H.M. Cavalcante, C.S. Menoni, C.P. Schulz, F.J. Furch, M.J.J. Vrakking. *Optica*, **9**, 145–151 (2022).
- [10] R.E.F. Silva, J. Álvaro. *Phys. Rev. A*, **106**, 053103 (2022).
- [11] H. Yong, S. Sun, B. Gu, S. Mukamel. *J. American Chemical Soc.*, (2022).
- [12] P. Peng, Y. Mi, M. Lytova, M. Britton, X. Ding, A.Yu. Naumov, P.B. Corkum, D.M. Villeneuve. *Nature Photon.*, **16**, 45 (2022)].
- [13] M.T. Hassan, T.T. Luu, A. Moulet, O. Raskazovskaya, P. Zhokhov, M. Garg, N. Karpowicz, A.M. Zheltikov, V. Pervak, F. Krausz, E. Goulielmakis. *Nature (London, U.K.)*, **530**, 66 (2016).
- [14] D. Hui, H. Alqattan, S. Yamada, V. Pervak, K. Yabana, M.T. Hassan. *Nat. Photon.*, **16**, 33 (2022).
- [15] M. Kretschmar, A. Hadjipittas, B. Major, J. Tümmeler, I. Will, T. Nagy, M.J.J. Vrakking, A. Emmanouilidou, B. Schütte. *Optica*, **9**, 639 (2022).
- [16] J.P. Kennedy, B. Dromey, M. Yeung. *New J. Physics*, **24**(11), 113004 (2022).
- [17] Y. Shou, R. Hu, Z. Gong, J. Yu, J.-e. Chen, G. Mourou, X. Yan, W. Ma. *New J. Physics*, **23**, 053003 (2021).
- [18] H.-C. Wu, J. Meyer-ter Vehn. *Nature Photon.*, **6**, 304 (2012).
- [19] J. Xu, B. Shen, X. Zhang, Y. Shi, L. Ji, L. Zhang, T. Xu, W. Wang, X. Zhao, Z. Xu. *Sci. Rep.*, **8**, 2669 (2018).
- [20] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, Н.Н. Розанов. *Квант. электрон.*, **50**, 801 (2020). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, N.N. Rosanov. *Quant. Electron.*, **50**, 801 (2020)].
- [21] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, А.В. Пахомов, П.А. Образцов, Н.Н. Розанов. *Письма в ЖЭТФ*, **116**(1), 10 (2023). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, A.V. Pakhomov, P.A. Obraztsov, N.N. Rosanov, *JETP Lett.*, **116**(1), 1 (2023)].
- [22] R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, P.A. Belov, Y.A. Tolmachev, I. Babushkin. *Laser Physics Lett.*, **13**, 046001 (2016).
- [23] A.V. Pakhomov, R.M. Arkhipov, I.V. Babushkin, M.V. Arkhipov, Yu.A. Tolmachev, N.N. Rosanov. *Phys. Rev. A*, **95**, 013804 (2017).
- [24] A.V. Pakhomov, R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov. *Sci. Rep.*, **9**, 7444 (2019).
- [25] R.M. Arkhipov, A.V. Pakhomov, M.V. Arkhipov, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov, I. Babushkin. *Phys. Rev. A*, **101**, 043838 (2020).
- [26] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, И. Бабушкин, А.В. Пахомов, Н.Н. Розанов. *Опт. и спектр.*, **128**, 541 (2020). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, A.V. Pakhomov, N.N. Rosanov. *Opt. Spectrosc.*, **128**, 529 (2020)].
- [27] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, И. Бабушкин, А.В. Пахомов, Н.Н. Розанов. *Опт. и спектр.*, **128**, 1723 (2020). [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, A.V. Pakhomov, N.N. Rosanov. *Opt. Spectrosc.*, **128**, 1857 (2020)].
- [28] Р.М. Архипов, Н.Н. Розанов. *Опт. и спектр.*, **129**, 319 (2021). [R.M. Arkhipov, N.N. Rosanov. *Opt. Spectrosc.*, **129**, 289 (2021)].
- [29] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, А.В. Пахомов, М.О. Жукова, А.Н. Цыпкин, Н.Н. Розанов. *Письма в ЖЭТФ*, **113**, 237 (2021). [A.V. Pakhomov, M.O. Zhukova, A.N. Tsypkin, N.N. Rosanov. *JETP Lett.*, **113**(4), 242 (2021)].
- [30] R.H. Dicke. *Phys. Rev.*, **93**, 99 (1954).
- [31] В.В. Кочаровский, В.В. Железняков, Е.Р. Кочаровская, В.В. Кочаровский. *УФН*, **187**, 367 (2017). [V.V. Kocharovskiy, V.V. Zheleznyakov, E.R. Kocharovskaya, V.V. Kocharovskiy. *Phys. Usp.*, **60**, 345 (2017)].
- [32] А.В. Андреев, В.И. Емельянов, Ю.А. Ильинский. *Коллективные явления в оптике: Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы* (Наука, М., 1988). [A.V. Andreev, V.I. Emel'yanov, Yu.A. Il'inskiy. *Collective Effects in Optics: Superradiance and Phase Transitions* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1993)].
- [33] M.G. Benedict, A.M. Ermolaev, V.A. Malyshev, I.V. Sokolov, E.D. Trifonov. *Super-radiance Multiatomic Coherent Emission* (CRC Press, 1996).
- [34] W. Zhang, E.R. Brown, A. Mingardi, R.P. Mirin, N. Jahed, D. Saeedkia. *Applied Sciences*, **9**(15), 3014 (2019).
- [35] Н.Н. Jen. *Collective Light Emission* (IOP Publishing, 2020).
- [36] J. Han, J. Kim, S. Oh, G. Son, J. Ha, K. An. *Scientific Reports*, **11**, 11256 (2021).
- [37] В.Л. Гинзбург. *УФН*, **140**, 687 (1983). [V.L. Ginzburg. *Sov. Phys. Usp.*, **26**, 713 (1983)].
- [38] А.В. Пахомов, М.В. Архипов, Н.Н. Розанов, Р.М. Архипов. *Письма в ЖЭТФ*, **116**(3), 151 (2022). [A.V. Pakhomov, M.V. Arkhipov, N.N. Rosanov, R.M. Arkhipov. *JETP Lett.*, **116**, 149 (2022)].
- [39] A. Pakhomov, M. Arkhipov, N. Rosanov, R. Arkhipov. *Phys. Rev. A*, **106** (5), 053506 (2022).
- [40] С.Э. Фриш. *Оптические спектры атомов* (Государственное издательство физико-математической литературы, М.-Л., 1963).
- [41] Н.Н. Розанов. *Опт. и спектр.*, **127**, 960 (2019). [N.N. Rosanov. *Opt. Spectrosc.*, **127**, 1050 (2019)].
- [42] А. Яриш. *Квантовая электроника* (Сов. Радио, М., 1980). [A. Yariv. *Quantum electronics* (Wiley, 1989)].
- [43] M.V. Arkhipov, R.M. Arkhipov, A.V. Pakhomov, I.V. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov. *Opt. Lett.*, **42**(11), 2189 (2017).