

01;11

Динамика связанных квазипериодического генератора и системы Ресслера

© А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Саратов, Россия
E-mail: sedovayv@yandex.ru

Поступило в Редакцию 24 июня 2022 г.
В окончательной редакции 24 октября 2022 г.
Принято к публикации 10 ноября 2022 г.

Рассматривается взаимодействие системы с квазипериодической автономной динамикой и хаотической системы Ресслера. Изучается поведение показателей Ляпунова, позволяющих выявить возможные типы динамики системы: хаос с дополнительными нулевыми показателями Ляпунова, трехчастотный и двухчастотный квазипериодические режимы, периодические колебания и режим гибели колебаний.

Ключевые слова: квазипериодические колебания, динамический хаос, система Ресслера, показатели Ляпунова.

DOI: 10.21883/PJTF.2023.02.54280.19289

Взаимодействие нелинейных колебательных систем имеет большое значение в науке и технике. Сейчас уже хорошо изучена синхронизация периодических и хаотических колебаний [1,2]. С другой стороны, в серии работ [3–6] и последующих публикациях были инициированы исследования, касающиеся новых физических особенностей синхронизации квазипериодических колебаний. Существенное значение имело построение автономных низкоразмерных радиофизических систем с квазипериодической динамикой (квазипериодических генераторов). Затем были рассмотрены задачи о вынужденной синхронизации квазипериодических генераторов, взаимной синхронизации таких генераторов и др. [3–10]. Эта тематика также связана с продолжающей привлекать интерес проблемой бифуркаций инвариантных торов [11–13]. Обычно в теории синхронизации рассматривают связь однотипных систем, например генераторов ван дер Поля друг с другом, систем Ресслера друг с другом и т.д. Интересен, однако, и случай связи разнотипных систем. В этом плане возникает задача о взаимодействии подсистемы с автономной квазипериодичностью с хаотическим осциллятором. Соответствующие вопросы и рассматриваются в настоящей работе. В качестве первой подсистемы используется квазипериодическая система [7,9]. В качестве второй подсистемы выбран хаотический осциллятор Ресслера [1,2].

Запишем уравнения связанных генератора [7,9] и системы Ресслера

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1, \\
 \dot{y}_1 &= (\lambda + z_1 + x_1^2 - \beta x_1^4)y_1 - \omega_0^2 x_1 - \mu(x_1 - \dot{x}_2), \\
 \dot{z}_1 &= b(\varepsilon - z_1) - k y_1^2, \\
 \dot{x}_2 &= -y_2 - z_2, \\
 \dot{y}_2 &= x_2 + p y_2 + \mu(y_1 - y_2), \\
 \dot{z}_2 &= q + (x_2 - r)z_2.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Здесь x_1, y_1, z_1 — переменные квазипериодического генератора, x_2, y_2, z_2 — переменные осциллятора Ресслера, ω_0 — собственная частота генератора, μ — параметр связи. Связь введена так, что она является диссипативной и для первой подсистемы, построенной как обобщение осциллятора ван дер Поля, и для второй подсистемы. Параметры выбираем в соответствии с [7,9] ($\varepsilon = 4, b = 1, k = 0.02, \beta = 1/18, \lambda = -1$) и [1] ($p = 0.15, q = 0.4, r = 8.5$). Для первой подсистемы в данном случае возможны квазипериодические колебания в некотором диапазоне значений параметра ω_0 , а для осциллятора Ресслера такой набор параметров отвечает хаотической динамике.

Обсудим динамику системы (1). На рис. 1 показаны графики ее показателей Ляпунова для связи $0 \leq \mu \leq 0.25$. Значение параметра ω_0 выбрано равным 2π , что отвечает квазипериодической динамике в индивидуальной первой подсистеме. Отметим, что при нулевой связи один из показателей положителен ($\Lambda_1 > 0$),

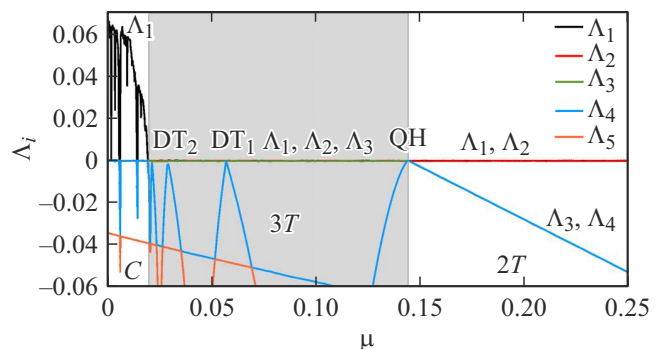


Рис. 1. Графики показателей Ляпунова связанных систем в зависимости от величины связи при значении параметра $\omega_0 = 2\pi$. Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

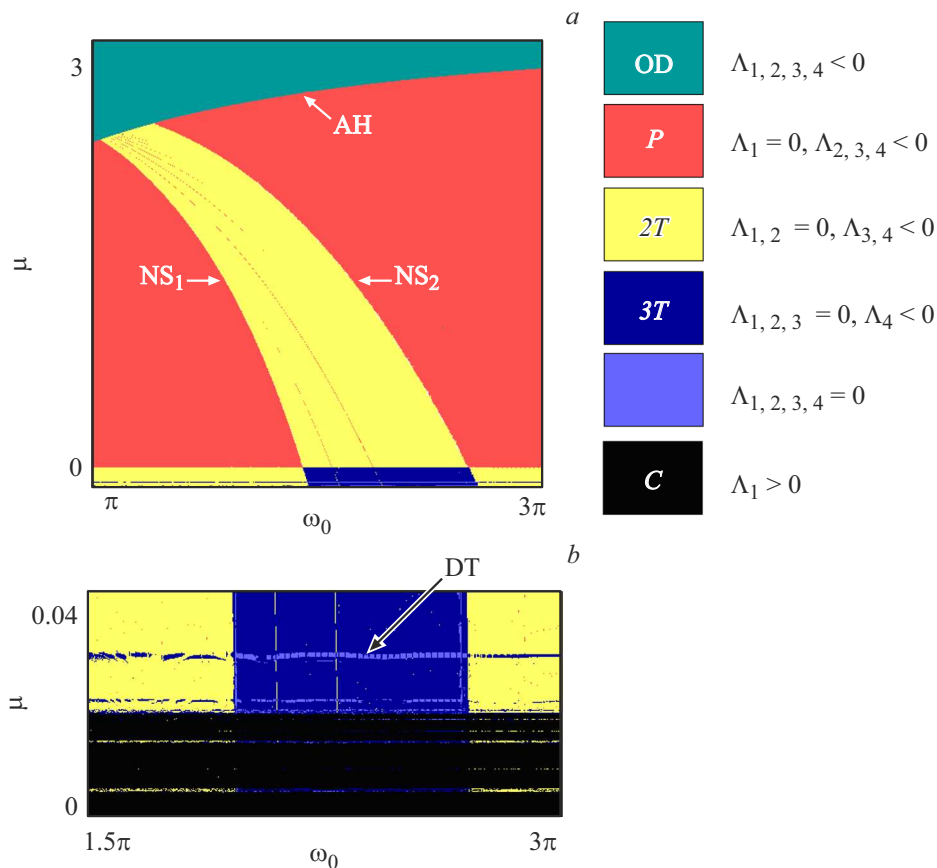


Рис. 2. Карта показателей Ляпунова связанных систем (а) и ее увеличенный фрагмент (б). Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

поскольку в индивидуальной системе Ресслера наблюдается хаос. Один показатель всегда остается нулевым при любой связи, что обязательно для потоковых систем. Графики на рис. 1 выявляют три характерные области. В случае большой связи два старших показателя нулевые ($\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$), а остальные отрицательные. Такой спектр показателей отвечает двухчастотному квазипериодическому режиму (двухчастотный инвариантный тор в фазовом пространстве). При уменьшении связи показатели Λ_3, Λ_4 остаются равными друг другу, возрастают и на границе области 2T обращаются в нуль. После этого показатель Λ_3 остается нулевым, а Λ_4 вновь становится отрицательным. В соответствии с [11] происходит квазипериодическая бифуркация Хопфа (QH), когда устойчивый трехчастотный тор 3T мягким образом возникает из двухчастотного. Внутри области 3T равны нулю три показателя Ляпунова: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = 0$, а остальные отрицательные. При уменьшении связи наблюдается несколько последовательных бифуркаций удвоения трехчастотных торов (DT), для которых четвертый показатель обращается в нуль, оставаясь отрицательным в ее окрестности [11]. Наконец, в области C старший показатель становится положительным: $\Lambda_1 > 0$, так что в основном это область хаоса. Возможны также очень узкие окна трехчастотных

торов. В случае хаоса не только показатель $\Lambda_2 = 0$, но и показатели Λ_3 и Λ_4 обращаются в нуль. Отметим, что в работах [14–17] обсуждается возможность хаоса с дополнительным нулевым показателем Ляпунова, в частности, в результате разрушения удваивающихся двухчастотных торов. В нашем случае наблюдается уже не один, а два дополнительных нулевых показателя. Отметим определенную дискуссию в связи с возможностью дополнительного нулевого показателя Ляпунова [16]. В связи с этим авторы [17] говорят об „очень близком к нулю показателе Ляпунова“, который может быть неотличим от нуля в численных расчетах. Проведем теперь двухпараметрический анализ, включая область более сильной связи. На рис. 2, а показана карта показателей Ляпунова на плоскости собственная частота квазипериодического генератора–величина связи подсистем (ω_0, μ) , а на рис. 2, б представлен ее увеличенный фрагмент. Тип режима определяется по спектру показателей Ляпунова, размерность инвариантного тора определяется по числу нулевых показателей. Цветовая палитра расшифрована на рисунке справа (цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи).

Этот рисунок визуализирует области периодических режимов (P), двухчастотных (2T) и трехчастотных (3T) торов и хаоса (C). Также наблюдается область, в которой

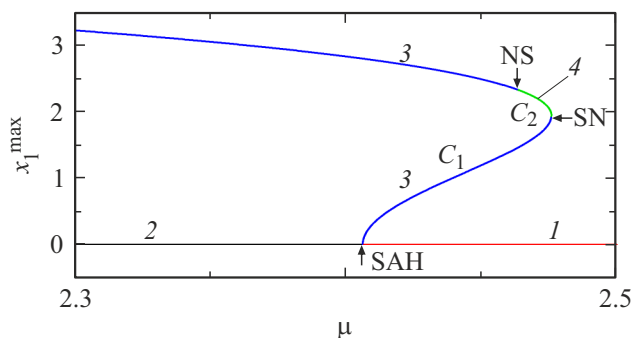


Рис. 3. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма. Линиями 1 и 2 показаны устойчивое и неустойчивое состояния равновесия, линиями 3 и 4 отмечены седловой и устойчивый предельные циклы. Показано максимальное значение переменной x_1 .

система имеет устойчивое состояние равновесия. Это проявление эффекта гибели колебаний OD (oscillation death) [1], когда большая диссипативная связь подавляет колебания обоих осцилляторов. В области хаоса на рис. 2, *b* просматриваются узкие окна трехчастотных торов, а в области трехчастотных торов — линии их удвоения DT.

Область гибели колебаний на рис. 2, *a* граничит с областью периодических режимов по линии бифуркации Андронова–Хопфа (АН), а область двухчастотных режимов с двух сторон ограничена линиями бифуркаций предельных циклов Неймарка–Сакера (NS). Эти бифуркации идентифицированы с помощью численного пакета ХРРАУТ. На рис. 2, *a* область гибели колебаний на небольшом отрезке визуально граничит также с областью двухчастотных торов. Чтобы прояснить этот момент, был проведен бифуркационный анализ. На рис. 3 показана соответствующая однопараметрическая бифуркационная диаграмма для $\omega_0 = 1.2\pi$. С увеличением связи в точке субкритической бифуркации Андронова–Хопфа (SAH) неустойчивое равновесие становится устойчивым, и от него отделяется седловой предельный цикл C_1 . В свою очередь этот цикл в точке седлоузловой бифуркации (SN) сливается с устойчивым циклом C_2 . Цикл C_2 в точке NS испытывает бифуркацию Неймарка–Сакера, и при уменьшении связи от него мягким образом отделяется устойчивый тор. Таким образом, в узком интервале параметра связи $2.4 \leq \mu \leq 2.476$ между точками SAH и SN располагается некоторая переходная область, и в системе возможна бистабильность (в частности, устойчивое равновесие может сосуществовать с устойчивым тором). Правее точки SN подавлены связью будут любые колебания. Отметим, что в [9,18,19] обсуждалась бифуркация на границе области гибели колебаний, в результате которой из состояния равновесия рождаются притягивающий двухчастотный тор и два седловых предельных цикла в идентичных по управляющим параметрам связанных генераторах. При

введении неидентичности, однако, такая бифуркация разрушалась. В нашем случае бифуркационный сценарий иной, причем системы заведомо „не идентичны“, а картина бифуркаций устойчива к некоторым вариациям параметров.

Таким образом, при взаимодействии системы с автономной квазипериодичностью и хаотической системы при большой связи наблюдается режим гибели колебаний. С уменьшением связи возникают периодические автоколебания и далее двухчастотный тор. Из этого тора в результате квазипериодической бифуркации Хопфа рождается трехчастотный тор, испытывающий несколько бифуркаций удвоения. Далее трехчастотный тор разрушается с возникновением хаоса с двумя дополнительными нулевыми показателями Ляпунова. Ляпуновская карта позволяет выявить локализацию режимов разных типов на плоскости параметров. Описан новый сценарий перехода в связанных системах от режима гибели колебаний к квазипериодичности, имеющий место в некоторой области параметров.

Благодарности

Авторы благодарны Н.В. Станкевич за помощь.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear science* (Cambridge University Press, 2001).
- [2] A.G. Balanov, N.B. Janson, D.E. Postnov, O. Sosnovtseva, *Synchronization: from simple to complex* (Springer, 2009).
- [3] V. Anishchenko, S. Nikolaev, J. Kurths, *Phys. Rev. E*, **73** (5), 056202 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202
- [4] V. Anishchenko, S. Nikolaev, J. Kurths, *Phys. Rev. E*, **76** (4), 046216 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevE.76.046216
- [5] В.С. Анищенко, С.М. Николаев, *Нелинейная динамика*, **2** (3), 267 (2006). DOI: 10.20537/nd0603001
- [6] В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, *Лекции по нелинейной динамике* (НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, М.–Ижевск, 2011), с. 209–223, 250–278.
- [7] А.П. Кузнецов, Н.В. Станкевич, *Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, **23** (3), 71 (2015). DOI: 10.18500/0869-6632-2015-23-3-71-93
- [8] А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, *Письма в ЖТФ*, **48** (4), 48 (2022). DOI: 10.21883/PJTF.2022.04.52086.18925 [A.P. Kuznetsov, Yu.V. Sedova, *Tech. Phys. Lett.*, **48** (2), 85 (2022). DOI: 10.21883/TPL.2022.02.52858.18925].

- [9] A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.A. Shchegoleva, N.V. Stankevich, *Physica D*, **398**, 1 (2019). DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014
- [10] А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, Н.В. Станкевич, *ЖТФ*, **91** (11), 1619 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.11.51519.145-2
- [11] R. Vitolo, H. Broer, C. Simó, *Regul. Chaot. Dyn*, **16** (1-2), 154 (2011). DOI: 10.1134/S1560354711010060
- [12] Yu.A. Kuznetsov, H.G.E. Meijer, *Numerical bifurcation analysis of maps: from theory to software* (Cambridge University Press, 2019), p. 44–49.
- [13] K. Kamiyama, M. Komuro, T. Endo, K. Aihara, *Int. J. Bifur. Chaos*, **24** (12), 1430034 (2014). DOI: 10.1142/S0218127414300341
- [14] N.V. Stankevich, N.A. Shchegoleva, I.R. Sataev, A.P. Kuznetsov, *J. Comput. Nonlinear Dyn.*, **15** (11), 111001 (2020). DOI: 10.1115/1.4048025
- [15] E.A. Grines, A. Kazakov, I.R. Sataev, *Chaos*, **32** (9), 093105 (2022). DOI: 10.1063/5.0098163
- [16] M. Sekikawa, N. Inaba, *Int. J. Bifur. Chaos*, **31** (01), 2150009 (2021). DOI: 10.1142/S0218127421500097
- [17] E. Karatetskaia, A. Shykhmamedov, A. Kazakov, *Chaos*, **31** (1), 011102 (2021). DOI: 10.1063/5.0036405
- [18] M.V. Ivanchenko, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, J. Kurths, *Physica D*, **189** (1-2), 8 (2004). DOI: 10.1016/j.physd.2003.09.035
- [19] V. Astakhov, S. Koblyanskii, A. Shabunin, T. Kapitaniak, *Chaos*, **21** (2), 023127 (2011). DOI: 10.1063/1.3597643