09

К нелинейной оптике предельно коротких импульсов

© С.В. Сазонов

Национальный исследовательский центр „Курчатовский институт“,
123182 Москва, Россия
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
119991 Москва, Россия
Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
125993 Москва, Россия

e-mail: sazonov.sergey@gmail.com

Поступила в редакцию 27.06.2022 г.
В окончательной редакции 27.06.2022 г.
Принята к публикации 01.07.2022 г.

Представлен краткий научно-методический обзор теоретических работ и подходов, созданных в нелинейной оптике предельно коротких импульсов, начиная с 1970-х годов по настоящее время. Подчеркиваются важные особенности, отличающие нелинейную оптику предельно коротких импульсов от нелинейной оптики квазимонохроматических сигналов.

Ключевые слова: предельно короткий импульс, униполярный импульс, солитон.

DOI: 10.21883/OS.2022.12.54090.45-22

Короткие, ультракороткие и сверхкороткие импульсы

С появлением импульсных лазеров в 60-е годы прошлого столетия одной из основных тенденций развития нелинейной оптики и лазерной физики явилось создание в лабораторных условиях световых импульсов все более коротких длительностей. В свою очередь это вызвало бурное развитие теории взаимодействия коротких лазерных импульсов с веществом.

Создание лазеров с модуляцией добротности и синхронизацией мод привело к генерации наносекундных оптических импульсов. Такие импульсы стали называть короткими. Здесь дело в том, что длительности этих импульсов оказались сравнимы или даже меньше характерных времен необратимой релаксации среды, определяющих скорости необратимых потерь приобретенной средой энергии. Поэтому появилась возможность исследования быстропротекающих внутриатомных процессов. Как результат, был открыт такой резонансный эффект, как самоиндуцированная прозрачность (СИП) [1,2]. Резонанс здесь состоит в том, что несущая частота оптического импульса очень близка к частоте одного из квантовых переходов среды. Эффект СИП интересен, помимо прочего, тем, что он сопровождается распространением резонансного оптического солитона — устойчивого уединенного импульса. Это был первый оптический солитон, который наблюдался в условиях эксперимента и был описан теоретически.

При теоретических исследованиях для электрического поля лазерного импульса используется волновое уравнение, вытекающее из уравнений Максвелла:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P}}{\partial t^2}. \qquad (1)$$

Здесь c — скорость света в вакууме, $\mathbf{P}$ — поляризационный отклик среды.

Для отклика $\mathbf{P}$ записываются материальные уравнения. Их вид зависит от выбора конкретной модели среды, который в каждом конкретном случае может быть своим и определяется физическими соображениями.

Уравнение (1) и материальные уравнения для отклика среды составляют самосогласованную нелинейную систему, описывающую динамику среды и распространяющегося в нем импульса.

Для сугубо поперечной волны уравнение (1) можно упростить, положив в нем

$$(\nabla\cdot\mathbf{E}) = 0. \qquad (2)$$

Ниже мы еще вернемся к данному условию, которое согласуется с теоремой Гаусса при нулевой плотности свободных и связанных зарядов.

Несущая частота короткого оптического импульса видимого диапазона $\omega \sim 10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$. При этом его длительность $\tau_p \sim 10^{-9}\,\mathrm{s}$. Число световых колебаний, которое вмещает в себя такой импульс, имеет порядок величины $N \sim \omega\tau_p \sim 10^6$. Данное обстоятельство позволяет ввести малый параметр

$$\delta_1 = \frac{1}{N} \sim \frac{1}{\omega\tau_p} \ll 1. \qquad (3)$$

Благодаря этому малому параметру можно определить в общем случае комплексную, медленно меняющуюся огибающую (ММО) ψ электрического поля линейно-поляризованного импульса:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{e}E = \mathbf{e}\psi(\mathbf{r},t)e^{i(\omega t - kz)} + c.c. \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{e}$ — единичный вектор в направлении поляризации импульса, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения внутри среды, z — ось, в направлении которой распространяется импульс, k — проекция волнового вектора на ось z.

Приближение ММО соответствует тому, что огибающая ψ заметно изменяется на временах порядка τ_p, значительно превышающих период оптических колебаний $T \sim 1/\omega$, что формально можно записать в виде (3). Это позволяет в левой части волнового уравнения (1) пренебречь вторыми производными от ψ по z и t. Как результат, волновое уравнение для ψ имеет первый порядок относительно производных по z и t. Это существенно облегчает теоретические исследования. В свою очередь пренебрежение в материальных уравнениях (в том числе для поляризационного отклика среды) быстро осциллирующими слагаемыми на частотах порядка ω по сравнению со слагаемыми, заметно изменяющимися на временах порядка τ, также существенно упрощает материальные уравнения.

Резонансный характер эффекта СИП с хорошей точностью позволяет при описании среды учитывать только ее один квантовый переход, находящийся в резонансе с лазерным импульсом (приближение двухуровневой среды). Система волнового и материальных уравнений, описывающая СИП, получила название системы Максвелла–Блоха (МБ) [3,4]. Если несущая частота лазерного импульса в точности совпадает с частотой возбуждаемого квантового перехода, система МБ в одномерном случае сводится к уравнению синус–Гордона (СГ) для „площади" импульса — интеграла по времени от огибающей его электрического поля, $\theta \sim \int\limits_{-\infty}^{t} \psi dt$ [3,4]:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial\tau} = -\alpha\sin\theta. \tag{5}$$

Здесь бегущее время $\tau = t - z/v_g$, v_g — линейная групповая скорость света, соответствующая несущей частоте импульса, α — постоянный коэффициент, определяемый параметрами среды.

Уравнение (5) обладает хорошо известным солитонным решением, а также многосолитонными решениями, которые описывают упругие взаимодействия между солитонами различных амплитуд, длительностей и скоростей [3]. Кроме того, уравнение СГ обладает бризерными решениями. Бризер можно рассматривать как связанное состояние двух солитонов с однаковыми групповыми, но разными фазовыми скоростями. Как результат, бризер представляет собой распространяющийся с постоянной скоростью локализованный импульс, профиль которого периодически изменяется („дышит") в сопутствующей системе координат.

Сказанное выше о решениях уравнения СГ можно полностью отнести и к системе МБ. Как СГ, так и МБ являются интегрируемыми нелинейными системами в том смысле, что для них можно аналитически решить граничные задачи, а не только найти многие точные решения. Это нетривиальный факт для нелинейных систем.

Важно заметить, что скорости и амплитуды солитонов СГ и МБ возрастают с непрерывным укорочением их временной длительности τ_p.

В 1970-е годы был совершен прорыв в область пикосекундной лазерной оптики. Соответственно возросли интенсивности генерируемых сигналов, называемых ультракороткими импульсами. Поэтому появилась реальная возможность сильного возбуждения среды не только резонансными, но и нерезонансными импульсами. Был дан мощный толчок развитию нелинейной нерезонансной оптики. Для пикосекундных импульсов параметр δ_1 все еще мал и составляет порядка 10^{-3}. Такие интенсивные нерезонансные сигналы приводят к нелинейной модификации показателя преломления среды [5,6]:

$$n \to n + n_2|\psi|^2, \tag{6}$$

где n_2 — так называемый нелинейный показатель преломления.

При $n_2 > 0$ нелинейность является фокусирующей, в противном случае — дефокусирующей.

Огибающая ψ таких импульсов подчиняется нелинейному уравнению Шредингера (НУШ) [5,6]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} + a_1|\psi|^2\psi, \tag{7}$$

где $k_2 = \partial^k/\partial\omega^2 = \partial v_g^{-1}/\partial\omega$ — параметр дисперсии групповой скорости (ДГС) второго порядка, коэффициент нелинейности a_1 пропорционален n_2.

Нерезонансная кубическая нелинейность в (7) часто называется керровской нелинейностью.

НУШ, так же как и СГ и МБ, оказывается интегрируемым, обладая при $k_2a_1 < 0$ солитонными решениями [3]. Причем, в отличие от солитонов СГ и МБ, скорость солитонов НУШ равна линейной групповой скорости света v_g и не зависит от их амплитуды и длительности.

В случае фокусирующей нелинейности ($a_1 > 0$) солитоны НУШ формируются в спектральном диапазоне, где ДГС является отрицательной (аномальной). И наоборот.

К 1980-м годам были генерированы импульсы длительностью в несколько десятков фемтосекунд. Такие импульсы получили название сверхкоротких. Для них $\delta_1 \sim 10^{-2}$–10^{-1}. Несмотря на то, что данный параметр все еще мал, тем не менее он значительно больше, чем в случае коротких и ультракороких импульсов. Поэтому уравнение (7) приходится модифицировать, добавляя к нему производные высших порядков [7,8]:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\psi}{\partial z} &= -\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2} - i\frac{k_3}{3!}\frac{\partial^3\psi}{\partial\tau^3} + i\frac{k_4}{4!}\frac{\partial^4\psi}{\partial\tau^4} \\ &+ i\frac{k_5}{5!}\frac{\partial^5\psi}{\partial\tau^5} + a_1|\psi|^2\psi + ia_2\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\psi|^2\psi\right) \\ &- a_3\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(|\psi|^2\psi\right) - ia_4\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}\left(|\psi|^2\psi\right) + \ldots \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь k_j и a_j — соответственно параметры ДГС и нелинейной дисперсии j-го порядка ($j = 2, 3, 4, \ldots$).

Каждая производная более высокого порядка в (8) представляет собой последующий член разложения по все еще малому параметру δ_1.

Важно еще раз отметить, что для коротких, ультракоротких и сверхкоротких импульсов число колебаний удовлетворяет условию $N \gg 1$. Следовательно, спектры этих импульсов достаточно узкие, так как для их ширин $\delta\omega \sim 1/\tau_p$ справедливо неравенство $\delta\omega \ll \omega$. Таким образом, данные сигналы в спектральном смысле являются квазимонохроматическими импульсами (КМИ).

С дальнейшим укорочением длительностей лазерных импульсов в (8) необходимо учитывать линейную и нелинейную дисперсии все более высоких порядков. К тому же с ростом интенсивностей генерируемых сигналов существенными становятся нелинейности более высоких порядков. Все это приводит к значительному усложнению уравнения (8) и наталкивает на мысль о необходимости использования принципиально нового подхода.

Предельно короткие импульсы

Для импульсов, состоящих из одного периода оптических колебаний, значение параметра δ_1 становится порядка единицы. В этом случае δ_1 уже не является малым параметром, и разложение по его степеням становится некорректным. Следовательно, добавление к уравнению (8) новых слагаемых не приведет к адекватному описанию динамики импульса в нелинейной среде. Здесь становится необходимым поиск принципиально нового теоретического подхода.

Импульсы, содержащие порядка одного периода электромагнитных колебаний, в отечественной литературе получили название предельно коротких импульсов (ПКИ) [9]. В последнее время по отношению к таким сигналам стал применяться термин „малоцикловые импульсы“ [10]. В англоязычной литературе прочно прижился термин „few-cycle pulses“ [11,12]. Длительность ПКИ оптического диапазона составляет порядка единиц фемтосекунд.

На рубеже 80-х и 90-х годов прошлого столетия были проведены успешные эксперименты по генерации ПКИ в лабораторных условиях. Правда, следует отметить две еще более ранние экспериментальные работы по генерации ПКИ инфракрасного [13] и субтерагерцового диапазонов [14] методом оптического выпрямления. В этой связи мы будем применять термин ПКИ ко всем однопериодным импульсам независимо от их абсолютной длительности. Как правило, длительность таких сигналов лежит в интервале от пико- до единиц фемтосекунд. Аттосекундных импульсов, вызывающих процессы ионизации в нелинейной среде, мы здесь касаться не будем. Ниже центром нашего внимания будет взаимодействие ПКИ с непроводящими диэлектрическими средами.

Для построения теоретических схем и методов, позволяющих описывать распространение ПКИ в диэлектриках, необходимо вернуться к волновому уравнению (1), отказавшись от приближения ММО. В материальных уравнениях надо также отказаться от понятия огибающих компонент поляризационного отклика.

Как водится, теоретические исследования опережают экспериментальные, предвосхищая их порой на несколько десятилетий.

Отказ от использования приближения ММО был совершен еще в начале 70-х годов прошлого столетия. Отметим теоретические работы [15–17], где данный отказ был совершен при описании эффекта СИП. Особо выделим приближение однонаправленного распространения (ОР), с помощью которого волновое уравнение редуцируется от второго порядка к первому [16]. Проиллюстрируем использование приближения ОР на примере уравнения (1) при учете (2). Для простоты ограничимся „скалярным“ случаем, считая поле линейно-поляризованным. Поэтому от векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{P}$ перейдем к скалярным величинам E и P. Тогда, выделив преимущественное распространение импульса вдоль оси z, перепишем (1) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \nabla_\perp^2 E. \qquad (9)$$

Будем считать, что правая часть в (9) относительно мала. Это возможно, если малы оба слагаемых в правой части. Малость первого слагаемого соответствует малой концентрации атомов, активно взаимодействующих с полем лазерного импульса. В свою очередь это означает, что значение показателя преломления среды близко к единице:

$$\delta_2 = |n - 1| \ll 1. \qquad (10)$$

Второе слагаемое мало, если для описания динамики импульса в направлениях, поперечных к оси z, мы используем параксиальное приближение.

Пренебрежем в нулевом приближении правой частью в (9) и будем учитывать только волну, распространяющуюся вдоль оси z, отбросив волну, распространяющуюся в противоположном направлении. Тогда из (9) в нулевом приближении имеем $\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$ или $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$. Используя данное приближенное равенство в первой левой скобке уравнения (9), запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right) = -\frac{2\pi}{c}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{c}{2}\nabla_\perp^2 E,$$

где $\nabla_\perp^2$ — поперечный лапласиан.

Интегрируя по времени, будем иметь

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2\pi}{c}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{c}{2}\nabla_\perp^2 \int\limits_{-\infty}^{t} E\,dt'. \qquad (11)$$

Уравнение (11) описывает распространение лазерного импульса в разреженной среде (см. (10)) вдоль оси z со скоростью, близкой к скорости света в вакууме, при учете в параксиальном приближении его динамики в поперечных направлениях. Важно заметить, что редукция волнового уравнения от второго порядка к первому произошла в силу использования приближения ОР, а не ММО. Поэтому уравнение (11) справедливо как для КМИ, так и для импульсов со сколь угодно малым количеством оптических колебаний, включая ПКИ. Будет нелишним подчеркнуть, что такая редукция использовалась еще в 60-е годы прошлого столетия при решении задач по нелинейной акустике [18,19], где роль скорости света играла линейная скорость звука. В тех задачах приближение ОР было названо приближением медленно меняющегося профиля (ММП), которое не следует путать с приближением ММО. Происхождение данного названия легко понять, если еще раз принять к сведению, что редукция волнового уравнения к первому порядку возможна в предположении, что скорость волны очень близка к линейной скорости. Поэтому в сопутствующей системе отсчета профиль данной волны (не огибающая!) изменяется очень медленно.

В работе [16] рассматривался одномерный вариант уравнения (11), когда $\nabla_\perp^2 = 0$. Дополнение (11) материальными уравнениями блоховского типа для среды из двухуровневых атомов привело к новой нелинейной интегрируемой системе, названной редуцированной системой Максвелла–Блоха (РМБ).

Система РМБ обладает как солитонными (униполярными), так и бризерными решениями для электрического поля E импульса [4]. При этом униполярные солитоны обладают одним непрерывным свободным параметром, в качестве которого можно выбрать, например, временную длительность τ_p. Бризеры же являются двухпараметрическими решениями. Взяв для них в качестве свободных параметров τ_p и центральную частоту ω спектра, можно анализировать ситуацию при различных соотношениях между данными параметрами. Например, при $\omega\tau_p \gg 1$ бризерное решение переходит в солитон огибающей СИП. При этом, правда, следует помнить, что скорость такого солитона близка к скорости света в вакууме. В то же время скорость солитона СИП может быть в сотни и тысячи раз меньше данной скорости. Таким образом, тот факт, что приближение ОР позволяет записать волновое уравнение первого порядка для самого электрического поля, а не для его огибающей, является неоспоримым преимуществом этого приближения перед приближением ММО. С другой стороны, с помощью приближения ММО можно описывать резонансные солитоны СИП, скорость которых может быть значительно меньше скорости света в вакууме. Приближение ОР здесь этого не позволяет сделать.

Если в бризерном решении системы РМБ положить $\omega\tau_p \sim 1$, то мы придем к ПКИ с периодически изменяющимся профилем в сопутствующей системе координат.

В начале 70-х годов прошлого столетия теоретические работы [15,16] представляли в основном академический интерес. Настоятельная необходимость в подобных исследованиях возникла на рубеже 80-х и 90-х годов, когда ПКИ научились генерировать в экспериментальных условиях [20–23].

Здесь следует выделить теоретические работы [24–26], в которых не использовалось как приближение ММО (3), так и приближение малой плотности среды (10). Вместо них в нелинейной оптике ПКИ было предложено использовать приближения внезапных возмущений (ВВ)

$$\delta_3 = \omega_0\tau_p \ll 1 \tag{12}$$

и оптической прозрачности (ОП)

$$\delta_4 = (\omega_0\tau_p)^{-1} \ll 1. \tag{13}$$

Заметим, что приближение (12) было предложено А.Б. Мигдалом [27] при решении задач, связанных со столкновениями частиц в атомной физике. В приложении к оптике условие (12) означает, что спектр импульса перекрывает задействованный квантовый переход с частотой ω_0. Действительно, в этом случае спектральная ширина импульса $\delta\omega \sim 1/\tau_p \gg \omega_0$. Поэтому следует ожидать сильного возбуждения среды, сопровождающегося значительными изменениями населенностей стационарных квантовых состояний. Это, в свою очередь, означает сильное проявление нелинейно-оптических свойств среды. Кроме того, при столь коротких импульсных воздействиях весьма велика роль дисперсии. Поэтому здесь создаются благоприятные условия для формирования солитонов.

Как показано в [24], при условии (12) динамика ПКИ описывается уравнением СГ вида (5). Только здесь, в отличие от КМИ, усеченная „площадь" θ есть интеграл не от огибающей ψ, а от самого электрического поля E импульса: $\theta \sim \int\limits_{-\infty}^{t} E dt'$. Поэтому схожие с математической точки зрения решения теперь записываются не для огибающей, а для поля импульса. Здесь имеются как решения в виде униполярных солитонов, так и бризеров [3].

Отметим, что условие (12) использовалось в ряде задач, связанных с воздействиями ПКИ на различные среды [28–33]. При этом было акцентировано внимание на том, что в данном приближении именно электрической площадью импульса $S = \int_{-\infty}^{\infty} E dt \sim \theta_{t\to\infty}$ определяется результат его воздействия на различные квантовые объекты. Электрическая площадь однопериодного ПКИ равна нулю. Поэтому нулевым оказывается и результат его воздействия на среду. Для того чтобы воздействие было ненулевым, импульс должен обладать свойствами униполярного сигнала, для которого $S \neq 0$.

В отличие от (12) условие (13) соответствует слабому возбуждению среды и слабой дисперсии. В этом случае динамика ПКИ описывается модифицированным уравнением Кортевега-де Вриза (МКдВ) [25,26]

$$\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{n}{c}\frac{\partial E}{\partial t}-aE^2\frac{\partial E}{\partial t}-b\frac{\partial^3 E}{\partial t^3}=0. \qquad (14)$$

Еще раз подчеркнем, что здесь показатель преломления n, вообще говоря, не удовлетворяет условию (10).

Уравнение (14), как и уравнение СГ, обладает решениями в виде униполярных солитонов и бризеров [3].

Отметим, что о существовании одномерных решений типа униполярных солитонов было также сказано в работе [34].

Использованная при выводе уравнений СГ и МКдВ модель двухуровневой среды в общем случае неудовлетворительна. Как было сказано выше, при условии (12) спектр ПКИ значительно перекрывает задействованный квантовый переход. Следовательно, данный спектр должен захватывать и другие квантовые переходы. Чтобы этого не произошло, следует предположить, что два рассматриваемых квантовых состояния должны быть значительно удалены по энергетической шкале от других стационарных состояний.

При условии (13) из двухуровневой модели следует однозначно отрицательное значение нелинейного показателя преломления n_2, определенного согласно (6). В то же время обычно в спектральной области прозрачности твердых тел данное значение положительно. Керровская нелинейность в двухуровневой модели появляется исключительно благодаря изменению населенностей стационарных квантовых состояний. В общем случае этого явно недостаточно. В этом состоит еще один недостаток модели двухуровневой среды.

Уравнение (14) можно при условии (13) получить, используя в качестве материального уравнения классический осциллятор с кубической нелинейностью (осциллятор Дюффинга) [35–38]. Как было показано в работе [39], данная модель в общем случае не соответствует экспериментальному закону дисперсии нелинейного показателя преломления. Особенно это касается спектральных областей вблизи резонансов. Поэтому вместо осциллятора Дюффинга в [39] была предложена классическая эмпирическая модель двух нелинейно-связанных осцилляторов, удовлетворительно описывающая отмеченный дисперсионный закон. В работе [40] данная модель была использована для моделирования электронно-оптической нелинейности фемтосекундных ПКИ в широкозонных диэлектриках. Так как характерные значения собственных частот электронно-оптических переходов составляют порядка $\omega_0\sim 10^{16}\,\mathrm{s}^{-1}$, то для ПКИ длительностью $\tau_p\sim 10^{-15}\,\mathrm{s}$ выполняется условие (13). Для участвующих во взаимодействии с ПКИ колебательных оптических мод в узлах кристаллической решетки использовалась обычная модель классического осциллятора Лоренца, удовлетворяющего условию (12), так как здесь характерные собственные частоты $\omega_0\sim 10^{13}\,\mathrm{s}^{-1}$. В результате для электрического поля ПКИ получено уравнение вида [40]

$$\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{n}{c}\frac{\partial E}{\partial t}+aE^2\frac{\partial E}{\partial t}-b\frac{\partial^3 E}{\partial t^3}+g\int\limits_{-\infty}^{t}Edt'$$

$$=\frac{c}{2n}\nabla_\perp^2\int\limits_{-\infty}^{t}Edt'. \qquad (15)$$

Отметим, что все коэффициенты в (15) положительны, что соответствует параметрам широкозонных диэлектриков.

В пренебрежении откликом колебательных мод кристалла, когда $g=0$, (15) в одномерном случае ($\nabla_\perp^2=0$) переходит в МКдВ с фокусирующей нелинейностью и нормальной ДГС ($a,g>0$). В этом случае не приходится говорить о формировании солитонов или бризеров. Оговоримся сразу, что здесь мы говорим только о „светлых“ солитонах, поле которых исчезает на бесконечности. Темных солитонов [6] мы касаться не будем. Ситуацию может изменить только наличие колебательных мод ($g\neq 0$). Численные эксперименты, проведенные с уравнением (15) в одномерном случае, показывают, что оно обладает решениями в виде ПКИ бризерного типа длительностью примерно в полтора периода оптических колебаний [40]. Однако оно не имеет решений в виде униполярных солитонов [40].

Если спектр импульса лежит ближе к частотам колебательных инфракрасных мод кристалла, чем к видимым частотам электронно-оптических переходов, то дисперсией, создаваемой данными переходами, можно пренебречь, положив в (15) $b\partial^3E/\partial t^3=0$. Тогда в одномерном случае из (15) приходим к уравнению Шэфера–Уэйна [41]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z\,\partial t}+\frac{n}{c}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}+\frac{a}{3}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(E^3\right)+gE=0. \qquad (16)$$

В [42,43] показано, что уравнение (16) является интегрируемым и обладает бризерными решениями типа ПКИ.

В работах [44,45] была рассмотрена двухкомпонентная модель среды, содержащей два сорта двухуровневых атомов с сильно различающимися частотами переходов, которые удовлетворяют соответственно условиям (12) и (13). В результате получено обобщение уравнения (15), заключающееся в замене $g\int_{-\infty}^{t}Edt'\to(g/\mu)\sin\left(\mu\int_{-\infty}^{t}Edt'\right)$, где постоянная μ определяется характеристиками квантового перехода, удовлетворяющего условию ВВ (12). Очевидно, что в пределе $\mu\to 0$ имеем переход к уравнению (15), когда нелинейностью отклика перекрываемого спектром ПКИ перехода можно пренебречь.

Двухкомпонентная модель среды, рассмотренная в [44,45], описывает, например, электронно-оптические (удовлетворяющие (13)) квантовые переходы и удаленные от них туннельные (удовлетворяющие (13)) переходы.

Учет частичного захвата во взаимодействие с ПКИ удаленных к туннельным переходам состояний был совершен в работах [46,47]. Как результат, получено обобщение уравнения СГ:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial t}+\left(\frac{n}{c}-4\beta\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=-\left[\alpha-\beta\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2\right]\sin\theta. \qquad (17)$$

Здесь β — коэффициент, описывающий примешивание к перекрываемому спектром ПКИ удаленных квантовых состояний.

Уравнение (17) оказалось интегрируемым [47]. Оно обладает как униполярными солитонными решениями, так и решениями типа бризеров [47]. Если $\beta<0$, униполярные солитоны уравнения (17) выглядят выше и острее солитонов уравнения СГ. В противном случае солитоны, наоборот, притуплены. С увеличением положительного значения β профиль униполярного солитона стремится к прямоугольному виду с предельно малой длительностью $\tau_p^{\min}=2\pi\sqrt{\beta/\alpha}$ [46]. Бризеры же при этом имеют вид локализованных профилей с колебаниями не синусоидального, а прямоугольного типа [47].

Выше было уделено внимание вопросам распространения ПКИ в оптически-изотропных средах, поляризационный отклик среды состоит из разложения только по нечетным степеням электрического поля импульса. В этой связи следует отметить работы [48–50], где исследована солитонная динамика униполярных и однопериодных ПКИ, включая генерацию гармоник [50]. В работе [51] получена векторная система двух уравнений для нелинейно взаимодействующих между собой обыкновенной и необыкновенной компонент ПКИ в одноосном кристалле. Данная система является прямым обобщением уравнения (15) и позволяет, в частности, исследовать процесс генерации терагерцового излучения в квадратично-нелинейном кристалле с помощью фемтосекундного оптического импульса. В этой связи следует вернуться к экспериментальным работам [13,14], где генерировались терагерцовые ПКИ в квадратично-нелинейных кристаллах методом оптического выпрямления. Для этого на одноосный кристалл подавался оптический пикосекундный КМИ. За счет квадратичной нелинейности в кристалле в числе прочего происходило выпрямление оптического импульса, сопровождаемое генерацией широкополосного терагерцового сигнала, состоящего всего из одного периода колебаний. Профиль электрического поля E_T данного сигнала определяется профилем огибающей ψ оптического импульса. С теоретической точки зрения интерес здесь состоит еще и в том, что для оптического импульса используется приближение ММО, а для терагерцового — приближение ОР. В простейшем случае самосогласованная динамика отмеченного процесса описывается нелинейной интегрируемой системой уравнений Ядзимы–Ойкавы [51,52]

$$i\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{1}{v_g}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=-\frac{k_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+\sigma E_T\psi, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial E_T}{\partial z}+\frac{n_T}{c}\frac{\partial E_T}{\partial t}=-q\frac{\partial}{\partial t}\left(|\psi|^2\right). \qquad (19)$$

Здесь n_T — терагерцовый показатель преломления, σ и q — коэффициенты, пропорциональные компонентам нелинейной оптической восприимчивости второго порядка.

Выше отмечалось, что понятие ПКИ применимо к импульсам различных абсолютных длительностей. Важно, чтобы они вмещали в себя порядка одного периода электромагнитных колебаний. Именно этому условию удовлетворяет генерируемая терагерцовая компонента E_T .

Генерация является наиболее эффективной при выполнении равенства $v_g=c/n_T$, называемого в теории нелинейных волн условием Захарова–Бенни (ЗБ) [4]. Удовлетворить данному условию в реальных кристаллах очень сложно, так как обычно $v_g>c/n_T$. Поэтому приходится применять оптические импульсы с наклонными волновыми фронтами [53–57]. Фазовые и групповые волновые фронты у таких импульсов не параллельны друг другу, а образуют между собой угол φ. Тогда условие ЗБ принимает вид равенства черенковского типа [55]: $v_g\cos\varphi=c/n_T$. Эффективность генерации по энергии таким способом достигает величин $\sim 10^{-4}$–10^{-2}. В [58,59] получены и проанализированы системы уравнений, обобщающие систему (18), (19) на случай наклона волновых фронтов у оптического импульса.

Система (18), (19) обладает солитонным решением, описывающим процесс генерации. При этом генерируемая терагерцовая составляющая представляет собой униполярный одномерный солитон [51,52].

Примечательный момент данного решения заключается в том, что несущая частота оптического импульса испытывает сдвиг в красную область: $\omega\to\omega-\Omega$, где величина Ω принадлежит терагерцовому диапазону [51,52]. Этот факт можно интерпретировать так, что в процессе генерации каждый оптический фотон отдает часть своей энергии генерируемому терагерцовому фотону. В результате частотный спектр оптического импульса как единое целое смещается в красную область [51]. Такое явление наблюдалось в экспериментальных условиях [54].

В настоящее время достигнуты значительные успехи в генерации как широкополосных, так и квазимонохроматических терагерцовых сигналов. Их интенсивности таковы, что в пору говорить о необходимости развития нелинейной „терагерцовой оптики“ [46,60]. В [60] показано, что нелинейный показатель преломления в терагерцовом диапазоне частот может на шесть порядков превосходить данный показатель в видимом диапазоне частот. При этом нелинейность обусловлена ангармонизмом оптической колебательной моды узлов кристалла, а величина n_2 выражается через измеряемый в экспериментах параметр — коэффициент теплового расширения рассматриваемого вещества [61]. Гигантские значения n_2 свидетельствуют о том, что нелинейные эффекты в терагерцовом диапазоне способны проявляться при импульсных интенсивностях, в миллионы раз меньших соответствующих интенсивностей в видимом диапазоне.

О теореме Гаусса, электрической площади и дифракции

Соотношение (2) представляет собой теорему Гаусса при нулевых плотностях свободных и связанных зарядов. Как было сказано выше, мы здесь не рассматриваем процессы, связанные с ионизацией. К тому же среды предполагаются непроводящими. Поэтому теорема Гаусса для рассматриваемых случаев имеет вид

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}) = 0. \tag{20}$$

Плотность связанного заряда, как известно, определяется выражением $\rho_b = -(\nabla \cdot \mathbf{P})$.

Отличная от нуля плотность связанного заряда возникает при пространственном разделении положительного и отрицательного зарядов в направлении поля $\mathbf{E}$ лазерного импульса (поперек его распространения). Очевидно, что $(\nabla \cdot \mathbf{E}) \sim E/D$, где D — характерный поперечный размер (апертура) импульса.

В случае квазимонохроматического импульса с медленно меняющейся огибающей в направлении распространения импульса, поперечном к $\mathbf{E}$, плотность индуцированного связанного заряда изменяет знак на масштабах длины волны λ. В этом случае $\partial E/\partial z \sim E/\lambda$. В результате имеем $(\nabla \cdot \mathbf{E})/(\partial E/\partial z) \sim \lambda/D$. Таким образом, соотношение (2) можно считать выполненным при условии

$$\frac{\lambda}{D} \ll 1. \tag{21}$$

Если поперечный размер импульса (например, при самофокусировке) становится порядка длины волны, то $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$. В этом случае надо использовать теорему Гаусса в виде (20). Здесь уже нарушается условие параксиальности [62].

В случае ПКИ, а также униполярных (полуволновых) импульсов условие (21) обобщается очевидным образом:

$$\frac{l_{\parallel}}{D} \ll 1, \tag{22}$$

где $l_{\parallel}$ — характерный размер импульса в направлении его распространения.

Таким образом, теорема Гаусса в виде (2) справедлива и для униполярных импульсов, если их продольные размеры значительно меньше поперечных размеров. В частности, уравнение (2) в точности справедливо для одномерных и двумерных импульсов, когда поперечные размеры равны бесконечности. Для линейно-поляризованных импульсов в этих случаях можно записать соответственно $E = E_x(z, t)$ и $E = E_x(z, y, t)$. В общем же (трехмерном) случае уравнение (2) можно считать верным, пока выполняется условие (22).

Отметим, что непараксиальный режим дифракции ПКИ в нелинейной среде исследовался, например, в [63]. Показано, в частности, что на непараксиальной стадии происходит самоделение импульса на отдельные сгустки световой энергии.

Вопрос использования теоремы Гаусса тесно связан с динамикой электрической площади $\mathbf{S} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}dt$. Как показано в [64,65], из уравнений Максвелла для электрической площади уединенных импульсов следует уравнение

$$\nabla \times \mathbf{S} = 0. \tag{23}$$

То есть поле $\mathbf{S}$ является безвихревым. В одномерном случае, когда $\mathbf{S} = \mathbf{S}(z)$, данное уравнение имеет вид [64] $d\mathbf{S}/dz = 0$. Таким образом, в одномерном случае выполняется правило сохранения электрической площади поперечного импульса, $\mathbf{S} = \text{const}$ [65]. Данное правило было замечено и обсуждалось в [66]. Однако только в [64] оно было строго доказано, причем свершено независимо от вида материальных уравнений.

В общем случае векторное поле однозначно определяется заданием его ротора и дивергенции в каждой точке рассматриваемой области пространства. Интегрируя по времени (20), придем к уравнению

$$(\nabla \cdot \mathbf{S}) = 4\pi Q, \tag{24}$$

где ассоциированный с электрической площадью импульса „заряд“ Q определен выражением

$$Q = -\nabla \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{P}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_b dt. \tag{25}$$

Таким образом, электрическая площадь уединенного импульса подчиняется уравнениям электростатического типа (23), (24).

Безвихревой характер векторного поля $\mathbf{S}$ позволяет ввести „потенциал“ Φ электрической площади, определенный как $\mathbf{S} = -\nabla Q$. Тогда (24) принимает вид уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi Q. \tag{26}$$

В параксиальном приближении (см. (22)) можно положить $Q = 0$. Тогда (26) переходит в уравнение Лапласа $\nabla^2 \Phi = 0$.

Теорема Гаусса является своеобразным тестом на физическую корректность полученных решений волновых и материальных уравнений в виде ПКИ. Не исключено, что некоторые решения здесь могут оказаться „лишними“, не удовлетворяя теореме Гаусса. Особую осторожность здесь следует проявлять в отношении решений типа униполярных импульсов в трехмерном пространстве.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере дифракции ПКИ в свободном пространстве, положив в (11) $P = 0$. Пусть на плоскости $z = 0$ задано распределение электрического поля: $E|_{z=0} = E(0, t, \mathbf{r}_\perp)$, где поперечный радиус-вектор $\mathbf{r}_\perp$ задает координаты поперек оси z. Тогда легко показать, что для полупространства $z > 0$ решение уравнения (11) имеет вид

$$E(z, \mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{2\pi cz} \times \frac{\partial}{\partial t} \int E(0, \mathbf{r}'_\perp, t - z/c - |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|^2/2cz) d^2\mathbf{r}'_\perp. \quad (27)$$

Здесь интегрирование ведется по всей плоскости $z = 0$.

Считая, что интеграл в (27) принимает конечное значение, получим для электрической площади любого локализованного во времени импульса $S = \infty^{+\infty}_{-\infty} E dt = 0$.

Таким образом, площадь ПКИ, подверженного дифракции в свободном трехмерном пространстве, равна нулю. Это справедливо, даже если на плоскости $z = 0$ ПКИ является униполярным. Данное обстоятельство легко объяснить с помощью выражения для дифракционной длины $l_d \sim D^2/\lambda \sim \omega D^2/c$. Отсюда видно, что для нулевой частоты данная длина равна нулю. Поэтому за счет дифракции нулевая частота сразу „вымывается" из спектра импульса. Как результат, его электрическая площадь становится равной нулю.

Заключение

Проведенный в настоящей работе краткий, далеко не полный, научно-методический обзор показывает, что подходы к теоретическим исследованиям нелинейной динамики ПКИ в различных средах весьма разнообразны. Широкий спектр ПКИ говорит о необходимости учета большого числа степеней свободы среды, способных быть вовлеченными во взаимодействие. В то же время учет в материальных уравнениях большого числа степеней свободы и квантовых переходов может очень значительно усложнить исследование. Поэтому процесс вывода или эмпирического поиска материальных уравнений требует от исследователя профессиональных навыков физика-теоретика, интуиции и, если хотите, искусства.

Интуитивно понятно, что для импульсов длительностью всего в несколько периодов электромагнитных колебаний неприменимо понятие огибающей. На самом деле оказывается, что и здесь не все так просто. Например, в работе [67] для таких импульсов все-таки используется понятие огибающей и выводится общее уравнение, содержащее интегральный оператор. Разложение данного оператора в ряд по высшим временным производным приводит к уравнению типа (8). Здесь нелишне отметить один из результатов работы [68], где показано, что для однопериодного ПКИ в среде с керровской нелинейностью вместо третьей гармоники центральной частоты его спектра (как это происходит в случае КМИ) генерируется четвертая гармоника. Увеличение количества периодов колебаний от одного до двух приводит к генерации третьей гармоники, как для обычных КМИ. Аналогичная ситуация имеет место в среде с квадратичной нелинейностью, где в случае однопериодного ПКИ генерируется не вторая, а третья гармоника [69]. Если же импульс двухпериодный, то генерируется, как и в случае КМИ, вторая гармоника. Данный переход между генерируемыми гармониками невозможно описать с помощью огибающей электрического поля. В то же время, отталкиваясь от работы [67], возможно предположить, что использование огибающей является корректным для импульсов, содержащих всего до двух колебаний. Для однопериодных же ПКИ понятие огибающей уже не является корректным, поэтому в материальных и волновых уравнениях необходимо использовать само электрическое поле импульса.

За рамками нашего анализа оказались многочисленные работы, где рассматриваются эффекты ионизации при воздействии ПКИ на вещество и образования лазерной плазмы. Здесь уже теорема Гаусса в форме (20) несправедлива. Правая часть в этих случаях должна содержать плотность свободных зарядов. Исследование данных процессов сейчас наиболее актуально для интенсивных аттосекундных импульсов. Генерация плазмы здесь также может способствовать формированию солитонов [70–72].

Не возникает сомнений, что в ближайшем будущем нелинейная оптика ПКИ преподнесет как теоретикам, так и экспериментаторам еще немало новых загадок и сюрпризов.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у ниго нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] S.L. McCall, E.L. Hahn. Phys. Rev. Lett., **18** (21), 908 (1967). DOI: 10.1103/PhysRevLett.18.908

[2] S.L. McCall, E.L. Hahn. Phys. Rev., **183** (2), 457 (1969). DOI: 10.1103/PhysRev.183.457

[3] G.L. Lamb, jr. *Elements of Solitons Theory*, 1st ed. (John Wiley & Sons, New York, 1980). DOI: 10.1002/zamm.19810611116 [Дж. Лэм. *Введение в теорию солитонов*, 1-е изд. (Мир, Москва, 1983)].

[4] R.K. Dodd, J.C. Eilbeck, J. Gibbon, H.C. Morris. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, 1st ed. (Academic Press, New York, 1982). DOI: 10.1002/zamm.19850650811 [Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, 1-е изд. (Мир, Москва, 1988).

[5] Yu.S. Kivshar, G.P. Agrawal. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, 1st ed. (Academic Press, New York,

2003). [Ю.С. Кившарь, Г.П. Агравал. *Оптические солитоны: от волоконных световодов к фотонным кристаллам*, 1-е изд. (Физматлит, Москва, 2005)].
[6] G.P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*, 1st ed. (Academic Press, New York, 1989). [Г. Агравал. *Нелинейная волоконная оптика*, 1-е изд. (Мир, Москва, 1996)].
[7] M.A. Porras. Phys. Rev. E, **65** (2), 026606 (2002). DOI: 10.1103/PhysRevE.65.026606
[8] P.M. Bennet, A. Aceves. Physica D, **184** (1–4), 352 (2003). DOI: 10.1016/S0167-2789(03)00240-9
[9] А.И. Маймистов. Квант. электрон., **30** (4), 287 (2000). [A.I. Maimistov. Quant. Electron., **30** (4), 287 (2000). DOI: 10.1070/QE2000v030n04ABEH001712].
[10] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, И. Бабушкин, А.В. Пахомов, Н.Н. Розанов. Письма в ЖЭТФ, **114** (5), 298 (2021). DOI: 10.31857/S123456782117002X [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, A.V. Pakhomov, N.N. Rosanov. JETP Lett., **114** (5), 250 (2021). DOI: 10.1134/S002136402117001X].
[11] H. Leblond, D. Mihalache. Physics Reports, **523** (2), 61 (2013). DOI: 10.1016/j.physrep.2012.10.006
[12] T. Brabec, F. Krausz. Rev. Modern Phys., **71** (2), 545 (2000). DOI: 10.1103/RevModPhys.72.545
[13] D.H. Auston, K.P. Cheung, J.A. Valdmanis, D.A. Kleinman. Phys. Rev. Lett., **53** (16), 1555 (1984). DOI: 10.1103/PhysRevLett.53.1555
[14] Д.А. Багдасарян, А.О. Макарян, П.С. Погосян. Письма в ЖЭТФ, **37** (10), 498 (1983). [D.A. Bagdasaryan, A.O. Makaryan, P.S. Pogosyan. JETP Lett., **37** (10), 594 (1983)].
[15] R.K. Bullough, F. Ahmad. Phys. Rev. Lett., **27** (6), 330 (1971). DOI: 10.1103/PhysRevLett.27.330
[16] J.C. Eilbeck, J.D. Gibbon, P.J. Caudrey, R.K. Bullough. J. Phys. A, **6**, 1337 (1973). DOI: 10.1088/0305-4470/6/9/009
[17] A. Kujawski. Z. Phys. B: Condens. Matter, **85**, 129 (1991). DOI: 10.1007/BF01387798
[18] Р.В. Хохлов. Радиотехн. и электрон., **6** (6), 917 (1961). [R.V. Khokhlov. Radio Eng. Electron., **6** (6), 77 (1961)].
[19] О.В. Руденко, С.И. Солуян, Р.В. Хохлов. Акуст. журн., **20** (2), 449 (1974). [O.V. Rudenko, S.I. Soluyan, R.V. Khokhlov. Sov. Phys. Acoust., **20** (2), 271 (1974)].
[20] J.A. Valdmanis, R.L. Fork, and J.P. Gordon. Opt. Lett., **10** (3), 131 (1985). DOI: 10.1364/OL.10.000131
[21] R.L. Fork, C.H. Brito-Cruz, P.C. Becker, C.V. Shank. Opt. Lett., **12** (7), 483 (1987). DOI: 10.1364/OL.12.000483
[22] P.C. Becker, H.L. Fragnito, J.Y. Bigot et al. Phys. Rev. Lett., **63** (5), 505 (1989). DOI: 10.1103/PhysRevLett.63.505
[23] J.T. Darrow, B.D. Hu, X.C. Zhang, D.H. Auston. Opt. Lett., **15** (6), 323 (1990). DOI: 10.1364/OL.15.000323
[24] Э.М. Беленов, П.Г. Крюков, А.В. Назаркин и др. Письма в ЖЭТФ, **47** (5), 442 (1988). [E.M. Belenov, P.G. Kryukov, A.V. Nazarkin et. al. JETP Lett., **47** (5), 523 (1988)].
[25] Э.М. Беленов, А.В. Назаркин. Письма в ЖЭТФ, **51** (5), 252 (1990). [E.M. Belenov, A.V. Nazarkin. JETP Lett., **51** (5), 288 (1990)].
[26] Э.М. Беленов, А.В. Назаркин, В.А. Ущаповский. ЖЭТФ, **100** (3), 762 (1991). [E.M. Belenov, A.V. Nazarkin, V.A. Ushapovski. Sov. Phys. JETP., **73** (3), 422 (1991)].
[27] А.Б. Мигдал. ЖЭТФ, **9**, 1163 (1939). [A.B. Migdal. Sov. Phys. JETP, **9**, 1163 (1939)].
[28] Д.Н. Макаров, В.И. Матвеев. Письма в ЖЭТФ, **103** (6), 464 (2016). DOI: 10.7868/S0370274X16060102 [D.N. Makarov, V.I. Matveev. JETP Lett., **103** (6), 415 (2016). DOI:10.1134/S0021364016060060].
[29] Д.Н. Макаров, В.И. Матвеев. Письма в ЖЭТФ, **103** (12), 851 (2016). DOI: 10.7868/S0370274X16120043 [D.N. Makarov, V.I. Matveev. JETP Lett., **103** (12), 756 (2016). DOI: 10.1134/S0021364016120079].
[30] Р.М. Архипов, М.В. Архипов, А.А. Шимко, А.В. Пахомов, Н.Н. Розанов. Письма в ЖЭТФ, **110** (1), 9 (2019). DOI: 10.1134/S0370274X19130034 [R.M. Arkhipov, M.V. Arkhipov, A.A. Shimko, A.V. Pakhomov, N.N. Rosanov. JETP Lett., **110** (1), 15 (2019). DOI: 10.1134/S0021364019130071].
[31] Э.М. Беленов, В.А. Исаков, А.В. Назаркин. Квант. электрон., **20** (11), 1045 (1993). [É.M. Belenov, V.A. Isakov, A.V. Nazarkin. Quantum Electron., **23** (11), 911 (1993). DOI: 10.1070/QE1993v023n11ABEH003222].
[32] А.Ю. Пархоменко, С.В. Сазонов. Письма в ЖЭТФ, **67** (11), 887 (1998). [A.Yu. Parkhomenko, S.V. Sazonov. JETP Lett., **67** (11), 934 (1998). DOI: 10.1134/1.558734].
[33] R.M. Arkhipov, F.V. Pakhomov, M.V. Arkhipov, I. Babushkin, A. Demircan, U. Morgner, N.N. Rosanov. Opt. Lett., **42** (11), 2189 (2017). DOI: 10.1364/OL.42.002189
[34] A.E. Kaplan, P.L. Shkolnikov. Phys. Rev. Lett., **75** (12), 2316 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevLett.75.2316
[35] A.I. Maimistov, S.O. Elyutin. J. Modern Optics, **39** (11), 2201 (1992). DOI: 10.1080/09500349214552231
[36] А.И. Маймистов, С.О. Елютин. Опт. и спектр., **70** (1), 101 (1991). [A.I. Maimistov, S.O. Elyutin. Opt. Spectrosc. **70** (1), 57 (1991)].
[37] E.V. Kazantseva, A.I. Maimistov, J-G. Caputo. Phys. Rev. E. **71** (5), 056622 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevE.71.056622
[38] А.И. Маймистов. Квант. электрон., **40** (9), 756 (2010). [A.I. Maimistov. Quant. Electron., **40** (9), 756 (2010). DOI: 10.1070/QE2010v040n09ABEH014396].
[39] С.А. Козлов. Опт. и спектр., **79** (2), 290 (1995). [S.A. Kozlov. Opt. Spectrosc., **79** (2), 267 (1995)].
[40] С.А. Козлов, С.В. Сазонов. ЖЭТФ, **111** (2), 404 (1997) [S.A. Kozlov, S.V. Sazonov. JETP, **84** (2), 221 (1997). DOI: 10.1134/1.558109].
[41] T. Schäfer, C.E. Wayne. Physica D, **196** (1, 2), 90 (2004). DOI: 10.1016/j.physd.2004.04.007
[42] A. Sakovich, S. Sakovich. J. Phys. A, **39** (22), L361 (2006). DOI: 10.1088/0305-4470/39/22/L03
[43] Yo. Matsuno. J. Math. Phys., **52** (12), 123702 (2011). DOI: 10.1063/1.3664904
[44] С.В. Сазонов. ЖЭТФ, **119** (3), 419 (2001). [S.V. Sazonov. JETP, **92** (3), 361 (2001). DOI: 10.1134/1.1364734].
[45] H. Leblond, S.V. Sazonov, I.V. Mel'nikov, D. Mihalache, F. Sanchez. Phys. Rev. A, **74** (6), 063815 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevA.74.063815
[46] С.В. Сазонов. ЖЭТФ, **146** (3), 483 (2014). DOI: 10.7868/S0044451014090089 [S.V. Sazonov. JETP, **119** (3), 423 (2014). DOI: 10.1134/S1063776114090192].
[47] S.V. Sazonov, N.V. Ustinov. Phys. Rev. A, **98** (6), 063803 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevA.98.063803
[48] E.V. Kazantseva, A.I. Maimistov, B.A. Malomed. Opt. Commun., **188** (1–4), 195 (2001). DOI: 10.1016/S0030-4018(00)01143-3
[49] E.V. Kazantseva, A.I. Maimistov. Phys. Lett. A, **263** (4–6), 434 (1999). DOI: 10.1016/S0375-9601(99)00768-9
[50] S.V. Sazonov. Opt. Commun., **380**, 480 (2016). DOI: 10.1016/j.optcom.2016.06.053

[51] С.В. Сазонов, А.Ф. Соболевский. ЖЭТФ, **123** (6), 1160 (2003). [S.V. Sazonov, A.F. Sobolevskii. JETP, **96** (6), 1019 (2003). DOI: 10.1134/1.1591214].
[52] С.В. Сазонов, А.Ф. Соболевский. Письма в ЖЭТФ, **75** (12), 746 (2002). [S.V. Sazonov, A.F. Sobolevskii. JETP Lett., **75** (12), 621 (2002). DOI: 10.1134/1.1503324].
[53] J. Hebling, G. Almasi, I.Z. Kozma, J. Kuhl. Optics Express, **10** (21), 1161 (2002). DOI: 10.1364/OE.10.001161
[54] А.Г. Степанов, А.А. Мельников, В.О. Компанец, С.В. Чекалин. Письма в ЖЭТФ, **85** (5), 279 (2007). [A.G. Stepanov, A.A. Mel'nikov, V.O. Kompanets, S.V. Chekalin. JETP Lett., **85** (5), 227 (2007). DOI: 10.1134/S0021364007050025].
[55] G.Kh. Kitaeva. Laser Phys. Lett., **5** (8), 559 (2008). DOI: 10.1002/lapl.200810039
[56] С.В. Сазонов. Письма в ЖЭТФ, **96** (4), 281 (2012). [S.V. Sazonov. JETP Lett., **96** (4), 263 (2012). DOI: 10.1134/S0021364012160126].
[57] А.Н. Бугай. ЭЧАЯ, **50** (2), 185 (2019). [A.N. Bugay. Physics of Particles and Nuclei, **50** (2), 210 (2019). DOI: 10.1134/S1063779619020023].
[58] С.В. Сазонов, Н.В. Устинов. Письма в ЖЭТФ, **114** (7), 437 (2021). DOI: 10.31857/S1234567821190022 [S.V. Sazonov, N.V. Ustinov. JETP Lett., **114** (7), 380, (2021). DOI: 10.1134/S0021364021190103].
[59] S.V. Sazonov, N.V. Ustinov. Laser Phys. Lett., **19** (2), 025401 (2022). DOI: 10.1088/1612-202X/ac4914
[60] A.N. Tcypkin, M.V. Melnik, M.O. Zhukova, O. Vorontsova, S.E. Putilin, S.A. Kozlov, Xi–Ch. Zhang. Optics Express, **27** (8), 10419 (2019). DOI: 10.1364/OE.27.010419
[61] K. Dolgaleva, D.V. Materikina, R.W. Boyd, S.A. Kozlov. Phys. Rev. A, **92** (2), 023809 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.92.023809
[62] N.N. Rosanov, V.E. Semenov, N.V. Vyssotina. J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt., **3** (2), S96 (2001). DOI: 10.1088/1464-4266/3/2/352
[63] С.А. Козлов, П.А. Петрошенко. Письма в ЖЭТФ, **76** (4), 241 (2002). [S.A. Kozlov, P.A. Petroshenko. JETP Lett., **76** (4), 206 (2002). DOI: 10.1134/1.1517385].
[64] Н.Н. Розанов. Опт. и спектр., **107** (5), 761 (2009). [N.N. Rosanov. Opt. Spectrosc., **107** (5), 721 (2009). DOI: 10.1134/S0030400X09110095].
[65] Н.Н. Розанов. *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-* (Физматлит, Москва, 2011). [N.N. Rosanov. *Dissipative Optical Solitons: From Micro- to Nano- and Atto-* (Fizmatlit, Moscow, 2011) [in Russian].
[66] А.Н. Бугай, С.В. Сазонов. Письма в ЖЭТФ, **87** (8), 470 (2008). [A.N. Bugay, S.V. Sazonov. JETP Lett. **87** (8), 403 (2008). DOI: 10.1134/S0021364008080031].
[67] T. Brabec, F. Krausz. Phys. Rev. Lett., **78** (17), 3282 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.3282
[68] A.A. Drozdov, S.A. Kozlov, A.A. Sukhorukov, Yu.S. Kivshar. Phys. Rev. A, **86** (5), 053822 (2012). DOI:10.1103/PhysRevA.86.053822
[69] S.V. Sazonov. J. Russian Laser Research, **39**, (3), 252 (2008). DOI: 10.1007/S10946-018-9715-3
[70] Ch.A. Husko, S. Combrieé, P. Colman, J. Zheng, A. Rossi, Ch.W. Wong. Scientific Reports, **3**, 1100 (2013). DOI: 10.1038/srep01100
[71] E.E. Serebryannikov, A.M. Zheltikov. Phys. Rev. A, **76** (1), 013820 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevA.76.013820
[72] V.A. Khalyapin, A.N. Bugay. Chaos, Solitons and Fractals, **156**, 111799 (2022). DOI: 10.1016/j.chaos.2022.111799